Модел. и анализ информ. систем. Т. **19**, № **1** (2012) 37–51

УДК 512.722+512.723

Об одном изоморфизме компактификаций схемы модулей векторных расслоений

Тимофеева Н.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: ntimofeeva@list.ru

получена 22 ноября 2011

Ключевые слова: полустабильные допустимые пары, функтор модулей, векторные расслоения, алгебраическая поверхность

Построен морфизм приведенного функтора модулей Гизекера – Маруямы (полустабильных когерентных пучков без кручения) на приведенный функтор модулей допустимых полустабильных пар с тем же полиномом Гильберта. Показано, что основные компоненты приведенной схемы модулей полустабильных допустимых пар $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ изоморфны основным компонентам приведенной схемы Гизекера – Маруямы.

Введение

В настоящей статье S — гладкая неприводимая проективная алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0, $\mathcal{O}_S$ — ее структурный пучок, E — когерентный $\mathcal{O}_S$-модуль без кручения, $E^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(E, \mathcal{O}_S)$ — двойственный $\mathcal{O}_S$-модуль. При этом $E^\vee$ рефлексивен и, следовательно, локально свободен. Далее всюду локально свободный когерентный пучок и соответствующее ему векторное расслоение не будут различаться, и оба термина употребляются как синонимы. Пусть L — очень обильный обратимый пучок на S; он считается фиксированным и будет называться *поляризацией*. Символ $\chi(\cdot)$ означает эйлерову характеристику, $c_i(\cdot)$ — i-й класс Чженя. Далее если $Y \subset X$ — локально замкнутая подсхема схемы X, то $\overline{Y}$ — ее теоретико-схемное замыкание в X.

Определение 1 ([4, 5])**.** Назовем поляризованную алгебраическую схему $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ *допустимой*, если схема $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ удовлетворяет одному из условий

i) $(\widetilde{S}, \widetilde{L}) \cong (S, L)$,

ii) $\widetilde{S} \cong \operatorname{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I[t] + (t))^s/(t^{s+1})$, где $I = \mathcal{F}itt^0 \mathcal{E}xt^2(\varkappa, \mathcal{O}_S)$ для артинова факторпучка $q : \bigoplus^r \mathcal{O}_S \twoheadrightarrow \varkappa$ длины $l(\varkappa) \leq c_2$, причем $\widetilde{L} = L \otimes (\sigma^{-1} I \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{S}})$ — очень обильный обратимый пучок на схеме $\widetilde{S}$; эту поляризацию $\widetilde{L}$ будем называть *выделенной*.

Замечание 1. Далее при необходимости L заменяется его достаточно большой тензорной степенью, которая, как показано в работе [5], может быть выбрана постоянной и фиксированной. Все полиномы Гильберта вычисляются относительно новых L и $\widetilde{L}$ соответственно.

Определение 2 ([6]). *S-(полу)стабильной парой* $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ назовем следующие данные:

- $\widetilde{S} = \bigcup_{i\geq 0} \widetilde{S}_i$ – допустимая схема, $\sigma : \widetilde{S} \to S$ — морфизм, называемый *каноническим*, $\sigma_i : \widetilde{S}_i \to S$ — его ограничения на компоненты $\widetilde{S}_i$, $i \geq 0$;
- $\widetilde{E}$ — векторное расслоение на схеме $\widetilde{S}$;
- $\widetilde{L} \in \operatorname{Pic} \widetilde{S}$ — выделенная поляризация;

такие, что

- $\chi(\widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^m) = rp(m)$, полином $p(m)$ и ранг r пучка $\widetilde{E}$ считаются фиксированными;
- на схеме $\widetilde{S}$ пучок $\widetilde{E}$ *стабилен* (соответственно *полустабилен*) *по Гизекеру,* то есть для любого собственного подпучка $\widetilde{F} \subset \widetilde{E}$ при $m \gg 0$

$$\frac{h^0(\widetilde{F} \otimes \widetilde{L}^m)}{\operatorname{rank} F} < \frac{h^0(\widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^m)}{\operatorname{rank} E},$$
$$(\text{соответственно } \frac{h^0(\widetilde{F} \otimes \widetilde{L}^m)}{\operatorname{rank} F} \leq \frac{h^0(\widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^m)}{\operatorname{rank} E});$$

- на каждой из дополнительных компонент $\widetilde{S}_i, i > 0$, пучок $\widetilde{E}_i := \widetilde{E}|_{\widetilde{S}_i}$ *квазиидеален,* то есть обладает описанием вида

$$\widetilde{E}_i = \sigma_i^* \ker q_0 / tors. \tag{1}$$

  для некоторого $q_0 \in \bigsqcup_{l\leq c_2} \operatorname{Quot}^l \bigoplus^r \mathcal{O}_S$.

В серии работ автора [1] — [5] построена проективная алгебраическая схема $\widetilde{M}$ как приведенная схема модулей S-полустабильных пар.

Схема $\widetilde{M}$ содержит открытую подсхему $\widetilde{M}_0$, изоморфную подсхеме M_0 полустабильных в смысле Гизекера векторных расслоений в схеме модулей $\overline{M}$ Гизекера — Маруямы полустабильных пучков без кручения с полиномом Гильберта, равным $\chi(E \otimes L^m) = rp(m)$. При этом используется определение полустабильности в смысле Гизекера.

Определение 3 ([7]). Когерентный $\mathcal{O}_S$-пучок E *стабилен* (соответственно *полустабилен*), если для любого собственного подпучка $F \subset E$ ранга $r' = \operatorname{rank} F$ при $m \gg 0$

$$\frac{\chi(E \otimes L^m)}{r} > \frac{\chi(F \otimes L^m)}{r'} \Big(\text{соответственно } \frac{\chi(E \otimes L^m)}{r} \geq \frac{\chi(F \otimes L^m)}{r'}\Big).$$

Пусть E — полустабильный локально свободный пучок. Тогда, очевидно, пучок $I = \mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$ тривиален, и $\widetilde{S} \cong S$. Тем самым $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E}) \cong ((S, L), E)$, что поставляет биективное соответствие $\widetilde{M_0} \cong M_0$.

Пусть E — полустабильный не локально свободный когерентный пучок; тогда схема $\widetilde{S}$ содержит приведенную неприводимую компоненту $\widetilde{S}_0$ такую, что морфизм $\sigma_0 := \sigma|_{\widetilde{S}_0} : \widetilde{S}_0 \to S$ — морфизм раздутия схемы S в пучке идеалов $I = \mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S)$. Формирование пучка I является способом охарактеризовать особенности пучка E, то есть его отличие от локально свободного. Действительно, факторпучок $\varkappa := E^{\vee\vee}/E$ — артинов длины, не превосходящей $c_2(E)$, и $\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_S) \cong \mathcal{E}xt^2(\varkappa, \mathcal{O}_S)$. Тогда $\mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^2(\varkappa, \mathcal{O}_S)$ — пучок идеалов (в общем случае неприведенной) подсхемы Z ограниченной [6] длины с носителем в конечном наборе точек на поверхности S. Поэтому, как показано в [4], остальные неприводимые компоненты $\widetilde{S}_i, i > 0$ схемы $\widetilde{S}$ в общем случае несут неприведенную схемную структуру.

Каждому полустабильному когерентному пучку без кручения E ставится в соответствие пара $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$, где $(\widetilde{S}, \widetilde{L})$ определяется только что описанным способом.

Пусть U — открытое по Зарискому подмножество одной из компонент $\widetilde{S}_i, i \geq 0$ и $\sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$ — соответствующая группа сечений, являющаяся $\mathcal{O}_{\widetilde{S}_i}(U)$-модулем. Сечения $s \in \sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$, аннулируемые простыми идеалами положительной коразмерности в $\mathcal{O}_{\widetilde{S}_i}(U)$, образуют подмодуль в $\sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$, который будем обозначать $tors_i(U)$. Соответствие $U \mapsto tors_i(U)$ определяет подпучок $tors_i \subset \sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}$. Заметим, что ассоциированные простые идеалы положительной коразмерности, аннулирующие сечения $s \in \sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$, соответствуют подсхемам с носителями в прообразе $\sigma^{-1}(\operatorname{Supp}\varkappa) = \bigcup_{i>0} \widetilde{S}_i$. Поскольку по построению схема $\widetilde{S} = \bigcup_{i \geq 0} \widetilde{S}_i$ связна, то подпучки $tors_i, i \geq 0$, позволяют построить подпучок $tors \subset \sigma^*E$. Последний определяется следующим образом. Сечение $s \in \sigma^*E|_{\widetilde{S}_i}(U)$ удовлетворяет условию $s \in tors|_{\widetilde{S}_i}(U)$ тогда и только тогда, когда

- существует сечение $y \in \mathcal{O}_{\widetilde{S}_i}(U)$ такое, что $ys = 0$,
- выполнено хотя бы одно из двух условий: либо $y \in \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал положительной коразмерности; либо существует открытое по Зарискому подмножество $V \subset \widetilde{S}$ и сечение $s' \in \sigma^*E(V)$ такие, что $V \supset U$, $s'|_U = s$, и $s'|_{V \cap \widetilde{S}_0} \in tors(\sigma^*E|_{\widetilde{S}_0})(V \cap \widetilde{S}_0)$. В последнем выражении подпучок кручения $tors(\sigma^*E|_{\widetilde{S}_0})$ понимается в обычном смысле.

Подпучок $tors \subset \sigma^*E$ играет в рассматриваемой конструкции роль, аналогичную роли подпучка кручения в случае приведенной и неприводимой базисной схемы. Поскольку путаница исключена, то символ $tors$ всюду понимается в указанном смысле, а подпучок $tors$ называется *подпучком кручения*.

В работе [5] доказано, что пучки $\sigma^*E/tors$ локально свободны. Пучок $\widetilde{E}$, входящий в пару $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$, определяется соотношением $\widetilde{E} = \sigma^*E/tors$. При этом имеет место изоморфизм $H^0(\widetilde{S}, \widetilde{E} \otimes \widetilde{L}) \cong H^0(S, E \otimes L)$.

Там же показано, что ограничение пучка $\widetilde{E}$ на каждую из компонент $\widetilde{S}_i$, $i > 0$, дается соотношением квазиидеальности (1), где $q_0 : \mathcal{O}_S^{\oplus r} \twoheadrightarrow \varkappa$ — эпиморфизм, определяемый точной тройкой $0 \to E \to E^{\vee\vee} \to \varkappa \to 0$ с учетом локальной свободы пучка $E^{\vee\vee}$.

Разрешение особенностей полустабильного пучка E может быть глобализовано в плоском семействе с помощью конструкции, развитой в различных вариантах в работах [2, 3, 5]. Пусть T — приведенная неприводимая квазипроективная схема, $\mathbb{E}$ — пучок $\mathcal{O}_{T\times S}$-модулей, $\mathbb{L}$ — обратимый $\mathcal{O}_{T\times S}$-пучок, очень обильный относительно T такой, что $\mathbb{L}|_{t\times S} = L$, причем $\chi(\mathbb{E}\otimes\mathbb{L}^m|_{t\times S}) = rp(m)$ для всех замкнутых точек $t\in T$. Также будем предполагать, что T содержит непустое открытое подмножество T_0 такое, что $\mathbb{E}|_{T_0\times S}$ — локально свободный $\mathcal{O}_{T_0\times S}$-модуль. Тогда определены:

- $\widetilde{T}$ — целая нормальная схема, полученная некоторым раздутием $\phi : \widetilde{T}\to T$ схемы T,
- $\pi : \widetilde{\Sigma}\to\widetilde{T}$ — плоское семейство допустимых схем с обратимым $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}$-модулем $\widetilde{\mathbb{L}}$ таким, что $\widetilde{\mathbb{L}}|_{t\times S}$ — выделенная поляризация схемы $\pi^{-1}(t)$,
- $\widetilde{\mathbb{E}}$ — локально свободный $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}}$-модуль, причем $((\pi^{-1}(t),\widetilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(t)}),\widetilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(t)})$ — S-полустабильная допустимая пара.

При этом имеет место морфизм раздутия $\Phi:\widetilde{\Sigma}\to\widetilde{T}\times S$, и $(\Phi_*\widetilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = (\phi, id_S)^*\mathbb{E}$; что следует из совпадения пучков в левой и правой части, которые рефлексивны, на открытом подмножестве вне коразмерности 3. При этом схема $\widetilde{T}\times S$ является целой и нормальной.

Указанный механизм назван в [5] *стандартным разрешением.*

В разделе 1 мы напомним определения приведенных функторов $(\mathfrak{f}^{GM}/\sim)$ модулей когерентных полустабильных пучков без кручения ("функтор Гизекера – Маруямы") и $(\mathfrak{f}/\sim)$ модулей допустимых полустабильных пар. Ранг r и полином $p(m)$ фиксированы и одинаковы для обоих функторов модулей.

В настоящей статье доказываются следующие результаты.

Теорема 1. *Имеет место морфизм приведенных функторов модулей* $\mathfrak{t} : (\mathfrak{f}^{GM}/\sim)\to(\mathfrak{f}/\sim)$, *определяемый процедурой стандартного разрешения.*

Теорема 2. *Основные компоненты приведенной схемы* $\widetilde{M}$ *изоморфны основным компонентам приведенной схемы Гизекера – Маруямы.*

Эти теоремы доказываются в разделах 1 и 2 соответственно.

1. Морфизм функторов модулей: доказательство теоремы 1

Следуя [8, гл. 2, п. 2.2], напомним некоторые определения. Пусть $\mathcal{C}$ — категория, $\mathcal{C}^o$ — двойственная к ней категория, $\mathcal{C}' = \mathcal{F}unct(\mathcal{C}^o, Sets)$ — категория функторов в категорию множеств. По лемме Ионеды функтор $\mathcal{C}\to\mathcal{C}' : F\mapsto(\underline{F} : X\mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,F))$ вкладывает $\mathcal{C}$ как полную подкатегорию в $\mathcal{C}'$.

Определение 4 ([8, гл. 2, определение 2.2.1])**.** Функтор $\mathfrak{f}\in \mathcal{O}b\,\mathcal{C}'$ *копредставлен объектом* $F\in\mathcal{O}b\,\mathcal{C}$, если существует $\mathcal{C}'$-морфизм $\psi : \mathfrak{f}\to\underline{F}$ такой, что любой морфизм $\psi' : \mathfrak{f}\to\underline{F'}$ пропускается через единственный морфизм $\omega : \underline{F}\to\underline{F'}$.

Определение 5. Схема $\widetilde{M}$ — *грубое пространство модулей* функтора $\mathfrak{f}$, если $\mathfrak{f}$ копредставлен схемой $\widetilde{M}$.

Пусть T – схема над полем k. Рассматриваются семейства полустабильных пар

$$\mathfrak{F}_T = \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{\pi} : \widetilde{\Sigma}_T \to T,\ \widetilde{\mathbb{L}}_T \in \mathrm{Pic}\, \widetilde{\Sigma}_T,\ \forall t \in T\ \widetilde{L}_t = \widetilde{\mathbb{L}}_T|_{\widetilde{\pi}^{-1}(t)} \quad \text{очень обилен;} \\ (\widetilde{\pi}^{-1}(t), \widetilde{L}_t) \text{ допустимая схема с выделенной поляризацией;} \\ \widetilde{\mathbb{E}}_T - \text{локально свободный } \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_T} - \text{пучок;} \\ \chi(\widetilde{\mathbb{E}}_T \otimes \widetilde{\mathbb{L}}_T^m)|_{\widetilde{\pi}^{-1}(t)}) = rp(m); \\ ((\widetilde{\pi}^{-1}(t), \widetilde{L}_t), \widetilde{\mathbb{E}}_T|_{\widetilde{\pi}^{-1}(t)}) - \text{(полу)стабильная допустимая пара} \end{array} \right\}$$

и функтор $\mathfrak{f} : (Schemes_k)^o \to (Sets)$ из категории k-схем в категорию множеств, ставящий в соответствие схеме T множество $\{\mathfrak{F}_T\}$. Функтор модулей $(\mathfrak{f}/\sim)$ ставит в соответствие схеме T множество классов эквивалентности $(\{\mathfrak{F}_T\}/\sim)$.

При этом отношение эквивалентности $\sim$ определено следующим образом. Семейства $((\widetilde{\pi} : \widetilde{\Sigma}_T \to T, \widetilde{\mathbb{L}}_T), \widetilde{\mathbb{E}}_T)$ и $((\widetilde{\pi}' : \widetilde{\Sigma}'_T \to T, \widetilde{\mathbb{L}}'_T), \widetilde{\mathbb{E}}'_T)$ из множества $\{\mathfrak{F}_T\}$ будем считать эквивалентными (обозначение $((\widetilde{\pi} : \widetilde{\Sigma}_T \to T, \widetilde{\mathbb{L}}_T), \widetilde{\mathbb{E}}_T) \sim ((\widetilde{\pi}' : \widetilde{\Sigma}'_T \to T, \widetilde{\mathbb{L}}'_T), \widetilde{\mathbb{E}}'_T))$, если
1) существует изоморфизм $\iota : \widetilde{\Sigma}_T \xrightarrow{\sim} \widetilde{\Sigma}'_T$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Sigma}_T \arrow[rr, "\iota", "\sim"'] \arrow[dr, "\widetilde{\pi}"'] & & \widetilde{\Sigma}'_T \arrow[dl, "\widetilde{\pi}'"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

коммутативна;
2) существуют линейные расслоения $\mathcal{L}', \mathcal{L}''$ на T такие, что $\iota^*\widetilde{\mathbb{E}}'_T = \widetilde{\mathbb{E}}_T \otimes \widetilde{\pi}^*\mathcal{L}'$ и $\iota^*\widetilde{\mathbb{L}}'_T = \widetilde{\mathbb{L}}_T \otimes \widetilde{\pi}^*\mathcal{L}''$.

Соглашение 1. В этой работе мы ограничиваемся рассмотрением полной подкатегории $RSch_k$ приведенных схем и *приведенного функтора модулей* $(\mathfrak{f}_{red}/\sim) = (\mathfrak{f}|_{(RSch_k)^o}/\sim)$ [6]. Поскольку исключена двусмысленность, будем употреблять символ $(\mathfrak{f}/\sim)$ для приведенного функтора модулей.

В общем случае результаты работы [5] влекут существование грубого пространства модулей у каждого максимального по включению неприводимого подстека в $\coprod_{T \in Ob(RSch_k)} (\mathfrak{F}_T/\sim)$, содержащего такие пары $((\widetilde{\pi}^{-1}(t), \widetilde{L}_t), \widetilde{\mathbb{E}}_T|_{\widetilde{\pi}^{-1}(t)})$, что $(\widetilde{\pi}^{-1}(t), \widetilde{L}_t) \cong (S, L)$. Такие пары будем называть *S-парами.* Под $\widetilde{M}$ понимается именно пространство модулей подстека, содержащего полустабильные S-пары. Мы подчеркиваем этот момент, говоря об *основных компонентах* схемы модулей.

Аналогично, под схемой Гизекера — Маруямы $\overline{M}$ будем понимать объединение тех компонент приведенной схемы модулей полустабильных когерентных пучков без кручения, которые содержат локально свободные пучки.

Функтор Гизекера – Маруямы $\mathfrak{f}^{GM} : (Schemes_k)^o \to Sets$ определяется следующим образом: $T \mapsto \{\mathfrak{F}_T^{GM}\}$, где

$$\mathfrak{F}_T^{GM} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{E}_T\text{– пучок } \mathcal{O}_{T\times S} \text{ – модулей, плоский над } T; \\ \mathbb{L}_T\text{– обратимый пучок } \mathcal{O}_{T\times S} \text{ – модулей,} \\ L_t := \mathbb{L}_T|_{t\times S} \text{ очень обилен;} \\ E_t := \mathbb{E}_T|_{t\times S} \text{ без кручения} \\ \text{и полустабилен по Гизекеру относительно } L_t; \\ \chi(E_t \otimes L_t^m) = rp(m). \end{array} \right\}$$

Семейства $(\mathbb{L}_T, \mathbb{E}_T)$ и $(\mathbb{L}'_T, \mathbb{E}'_T)$ считаются эквивалентными, если найдутся обратимые $\mathcal{O}_T$-пучки $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ такие, что для проекции $p : T \times S \to T$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}'_T & \cong & \mathbb{E}_T \otimes p^*\mathcal{L}', \\ \mathbb{L}'_T & \cong & \mathbb{L}_T \otimes p^*\mathcal{L}''. \end{array}$$

Для этого функтора будем также использовать соглашение, аналогичное соглашению 1.

Морфизм функторов $\mathfrak{t} : (\mathfrak{f}^{GM}/\sim) \to (\mathfrak{f}/\sim)$ определяется коммутативными диаграммами

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, mapsto] \arrow[dr] & \{\mathfrak{F}_T^{GM}\}/\sim \arrow[d, "\mathfrak{t}_T"] \\ & \{\mathfrak{F}_T\}/\sim \end{tikzcd} \qquad (2)$$

где $T \in \mathcal{O}bRSch_k$, $\mathfrak{t}_T : (\{\mathfrak{F}_T^{GM}\}/\sim) \to (\{\mathfrak{F}_T\}/\sim)$ – морфизм в категории множеств (отображение).

Замечание 2. Мы рассматриваем подфункторы в $\mathfrak{f}^{GM}$ и в $\mathfrak{f}$, соответствующие максимальным по включению неприводимым подстекам, содержащим локально свободные пучки и S-пары соответственно. Поэтому любое семейство $\mathfrak{F}_T^{GM}$ (соответственно $\mathfrak{F}_T$) можно включить в семейство $\mathfrak{F}_{T'}^{GM}$ (соответственно $\mathfrak{F}_{T'}$) с некоторой связной базой T', содержащее локально свободные пучки (соответственно S-пары) согласно расслоенной диаграмме

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, hook, "i"] & \mathfrak{F}_T^{GM} \arrow[l] \arrow[d, hook] \\ T' & \mathfrak{F}_{T'}^{GM} \arrow[l] \end{tikzcd} \text{ (соответственно } \begin{tikzcd} T \arrow[d, hook, "i"] & \mathfrak{F}_T \arrow[l] \arrow[d, hook] \\ T' & \mathfrak{F}_{T'} \arrow[l] \end{tikzcd} \text{)}$$

а именно $\mathbb{E}_T = (i, id_S)^*\mathbb{E}_{T'}$ (соответственно $\widetilde{\Sigma}_T = \widetilde{\Sigma}_{T'} \times_{T'} T$, $\widetilde{i} : \widetilde{\Sigma}_T \hookrightarrow \widetilde{\Sigma}_{T'}$ – индуцированный морфизм вложения, $\widetilde{\mathbb{E}}_T = \widetilde{i}^*\widetilde{\mathbb{E}}_{T'}$, $\widetilde{\mathbb{L}}_T = \widetilde{i}^*\widetilde{\mathbb{L}}_{T'}$). В частности, такое ограничение исключает из рассмотрения вложенные компоненты схемы модулей, если только они не содержат локально свободные пучки (соответственно S-пары). Тем самым достаточно выполнить построение диаграмм (2) лишь для семейств, содержащих локально свободные пучки (соответственно S-пары), где T – приведенная схема.

Пусть $p : \Sigma_T \to T$ – плоское семейство схем со слоем, изоморфным S, $\mathbb{L}_T$ – семейство очень обильных обратимых пучков на его слоях, $\mathbb{E}_T$ – плоское семейство когерентных пучков без кручения на слоях морфизма p, имеющих ранг r и полином Гильберта $rp(m)$, полустабильных относительно поляризаций, поставляемых семейством $\mathbb{L}_T$. Применение стандартного разрешения приводит к набору данных $(\widetilde{\pi} : \widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}} \to \widetilde{T}, \widetilde{\mathbb{L}}_{\widetilde{T}}, \widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}})$. Пусть $\Sigma_{\widetilde{T}} := \Sigma_T \times_T \widetilde{T}$, где $\phi : \widetilde{T} \to T$ – бирациональный морфизм, также поставляемый стандартным разрешением, а $(\phi, id_S) : \Sigma_{\widetilde{T}} \to \Sigma_T$ – индуцированный морфизм.

Далее, согласно конструкциям работ [2, 3, 5], имеет место *частичный* морфизм функторов $\mathfrak{t}^{-1} : (\mathfrak{f}/\sim) \to (\mathfrak{f}^{GM}/\sim)$, определяемый операцией $\boldsymbol{\sigma} : \widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}} \to \Sigma_{\widetilde{T}}$ и $(\boldsymbol{\sigma}_* -)^{\vee\vee}$ на тех семействах, которые получаются стандартным разрешением семейств когерентных полустабильных пучков без кручения. При этом $\mathfrak{t}^{-1} \circ \mathfrak{t} = id_{\mathfrak{f}^{GM}/\sim}$. Поскольку $\mathfrak{t}^{-1}$ определен только частичным образом, то невозможно утверждать, что $\mathfrak{t}$ – изоморфизм.

Замечание 3. Вместе с тем, как показано в [5], существует бирациональный морфизм схем модулей $\kappa : \overline{M} \to \widetilde{M}$, которые подразумеваются приведенными. Схема $\widetilde{M}$ может не быть нормальной, поэтому, хотя κ – биективный морфизм и при ограничении на каждую из неприводимых компонент является морфизмом целых схем, но отсюда еще не следует, что κ – изоморфизм.

Далее мы покажем, что имеется морфизм приведенного функтора модулей Гизекера – Маруямы на приведенный функтор модулей допустимых полустабильных пар. А именно, построим для каждой приведенной схемы T соответствие $\mathbb{E}_T \mapsto ((\widetilde{\Sigma}_T, \widetilde{\mathbb{L}}_T), \widetilde{\mathbb{E}}_T)$, задающее отображение множеств $(\{\mathbb{E}_T\}/\sim) \to (\{((\widetilde{\Sigma}_T, \widetilde{\mathbb{L}}_T), \widetilde{\mathbb{E}}_T)\}/\sim)$. Это означает, что по каждому плоскому над базой T семейству полустабильных когерентных пучков $\mathbb{E}_T$ можно построить семейство $((\widetilde{\Sigma}_T, \widetilde{\mathbb{L}}_T), \widetilde{\mathbb{E}}_T)$ допустимых полустабильных пар с той же базой T.

Процедура стандартного разрешения приводит к плоскому над базой $\widetilde{T}$ семейству допустимых схем $\widetilde{\pi} : \widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}} \to \widetilde{T}$, локально свободному $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}}}$-пучку $\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}}$ и обратимому $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}}}$-пучку $\widetilde{\mathbb{L}}_{\widetilde{T}}$, очень обильному относительно морфизма $\widetilde{\pi}$.

Предложение 1. *Существуют*

- $\widetilde{\Sigma}_T$ *– схема,*
- $\pi : \widetilde{\Sigma}_T \to T$ *– плоский морфизм,*
- $\overline{\phi} : \widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}} \to \widetilde{\Sigma}_T$ *– бирациональный морфизм,*
- $\widetilde{\mathbb{E}}_T$ *– локально свободный* $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_T}$*-пучок,*
- $\widetilde{\mathbb{L}}_T$ *– обратимый* $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_T}$*-пучок,*

такие, что

- *квадрат*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}} \arrow[r, "\overline{\phi}"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}"'] & \widetilde{\Sigma}_T \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{T} \arrow[r, "\phi"] & T \end{tikzcd}$$

декартов,

- $\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\pi}^* \mathcal{L}' = \overline{\phi}^* \mathbb{E}_T$ *для некоторого* $\mathcal{L}' \in \operatorname{Pic} \widetilde{T}$,
- $\widetilde{\mathbb{L}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\pi}^* \mathcal{L}'' = \overline{\phi}^* \widetilde{\mathbb{L}}_T$ *для некоторого* $\mathcal{L}'' \in \operatorname{Pic} \widetilde{T}$.

Сформулированное предложение приводит к искомому морфизму функторов $\mathfrak{t} : (\mathfrak{f}^{GM}/\sim) \to (\mathfrak{f}/\sim)$, задаваемому для любой приведенной схемы $T \in \mathcal{O}b\, RSch_k$ коммутативной диаграммой (2)

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, mapsto] \arrow[dr] & (\{\mathbb{E}_T\}/\sim) \arrow[d] \\ & (\{((\widetilde{\Sigma}_T, \widetilde{\mathbb{L}}_T), \widetilde{\mathbb{E}}_T)\}/\sim) \end{tikzcd}$$

в которой вертикальная стрелка – морфизм (отображение) в категории множеств, определяемый предложением 1. Горизонтальная и наклонная стрелки определяются функториальными соответствиями $(\mathfrak{f}^{GM}/\sim)$ и $(\mathfrak{f}/\sim)$.

Доказательство предложения 1. Для построения схемы $\widetilde{\Sigma}_T$ будем считать, что $m \gg 0$ велико настолько, что пучок $\mathcal{O}_{\widetilde{T}}$-модулей $\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}})$ локально свободен, канонически определенный морфизм $\widetilde{\pi}^*\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}) \to \widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}$ сюръективен, и определено индуцированное замкнутое вложение $\widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}} \hookrightarrow G(\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}), r)$ в расслоение Грассмана $G(\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}), r)$. Также имеет место (относительное) вложение Плюккера расслоения Грассмана в (относительное) проективное пространство

$$G(\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}), r) \hookrightarrow P(\bigwedge^r \widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}})).$$

Кроме этого, рассмотрим изоморфизм пучков $\mathcal{O}_{\widetilde{T}}$-модулей $p_*(\phi, id_S)^*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}^m_T) = \phi^* p_*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}^m_T)$ и пучок $\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}})$. Указанные пучки локально свободны и совпадают на открытом подмножестве схемы $\widetilde{T}$. Тогда, обозначив за $\mathcal{L}'$ обратимый пучок вида $\mathcal{L}' := \det p_*(\phi, id_S)^*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}^m_T) \otimes (\det \widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}))^\vee$, получим пару локально свободных $\mathcal{O}_{\widetilde{T}}$-пучков $\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}) \otimes \mathcal{L}'$ и $p_*(\phi, id_S)^*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}^m_T)$, совпадающих вдоль открытого подмножества нормальной целой схемы $\widetilde{T}$, получаемого удалением подсхемы коразмерности ≥ 2. Отсюда следует, что пучки совпадают, а именно

$$\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}) \otimes \mathcal{L}' = p_*(\phi, id_S)^*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}^m_T) = \phi^* p_*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}^m_T).$$

Таким образом, формирование внешних степеней и переход к проективизациям и грассмановым расслоениям индуцирует расслоенную диаграмму

$$\begin{tikzcd} P(\bigwedge^r(\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}) \otimes \mathcal{L}')) \arrow[r] \arrow[d] & P(\bigwedge^r p_*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}^m_T)) \arrow[d] \\ \widetilde{T} \arrow[r] & T \end{tikzcd} \tag{3}$$

совместимую с вложениями Плюккера в том смысле, что квадрат

$$\begin{tikzcd} P(\bigwedge^r(\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}) \otimes \mathcal{L}')) \arrow[r] & P(\bigwedge^r p_*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}^m_T)) \\ G(\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}) \otimes \mathcal{L}'), r) \arrow[r, "g"] \arrow[u, hook] & G(p_*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}^m_T), r) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{4}$$

также декартов. Обозначим за $\widetilde{\Sigma}'_T$ (теоретико-схемный) образ композиции $\widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}} \hookrightarrow G(\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}) \otimes \mathcal{L}'), r) \xrightarrow{g} G(p_*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}^m_T), r)$, где вложение индуцировано пучком $\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}) \otimes \mathcal{L}'$, а морфизм g определен предыдущей диаграммой. Чтобы убедиться в том, что схема $\widetilde{\Sigma}'_T$ плоская над T, достаточно проверить совпадение образов слоев схемы $\widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}}$ над замкнутыми точками слоя $\phi^{-1}(t)$ для каждой замкнутой точки $t \in T$. Но по конструкции образы всех слоев схемы $\widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}}$ над точками подсхемы $\phi^{-1}(t)$ задаются одинаковыми наборами локальных уравнений в слоях проективного расслоения $P(\bigwedge^r p_*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}^m_T))$ и, следовательно, в слоях грассманова расслоения $G(p_*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}^m_T), r)$. Это завершает доказательство того, что схема $\widetilde{\Sigma}'_T$ плоская над T.

Также понятно, что морфизм $\overline{\phi}' : \widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}} \to \widetilde{\Sigma}'_T$ схемы $\widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}}$ на свой образ является изоморфизмом над открытым подмножеством $\pi^{-1}(T_0)$, где T_0 – открытая подсхема схемы T, над которой ϕ – изоморфизм. Отсюда сразу же получаем, что морфизм $\overline{\phi}'$ бирационален.

Теперь обратимся к замкнутым вложениям $j_{\widetilde{T}} : \widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}} \hookrightarrow G(\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}) \otimes \mathcal{L}'), r)$ и $j_T : \widetilde{\Sigma}'_T \hookrightarrow G(p_*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}^m_T), r)$. Символом $\mathcal{S}_T$ обозначим универсальный (локально свободный) факторпучок ранга r на $G(p_*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}^m_T), r)$, символом $\mathcal{S}_{\widetilde{T}}$ – универсальный (локально свободный) факторпучок ранга r на $G(\widetilde{\pi}_*(\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}}) \otimes \mathcal{L}'), r)$. Понятно, что в силу конструкции (3, 4) рассматриваемых грассмановых расслоений можно написать $\mathcal{S}_{\widetilde{T}} = g^* \mathcal{S}_T$. При этом $j^*_{\widetilde{T}} \mathcal{S}_{\widetilde{T}} = \widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m_{\widetilde{T}} \otimes \widetilde{\pi}^* \mathcal{L}'$, а $j^*_T \mathcal{S}_T$ – локально свободный пучок на схеме $\widetilde{\Sigma}'_T$.

Рассмотрим обратимый $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}}}$-пучок $\widetilde{\mathbb{L}}_{\widetilde{T}}$, поставляющий выделенную поляризацию на слоях морфизма $\widetilde{\pi} : \widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}} \to \widetilde{T}$, и его прямой образ $\widetilde{\pi}_* \widetilde{\mathbb{L}}_{\widetilde{T}}$. Последний пучок локально свободен в силу выбора пучка $\widetilde{\mathbb{L}}_{\widetilde{T}}$. Также возьмем (какой-нибудь) обратимый $\mathcal{O}_{\Sigma_T}$-пучок $\mathbb{L}_T$, очень обильный относительно проекции $p : \Sigma_T \to T$ и такой, что на слоях над точками открытой подсхемы T_0 пучки $\widetilde{\mathbb{L}}_{\widetilde{T}}$ и $\mathbb{L}_T$ поставляют одинаковые поляризации. Также пучок $p_* \mathbb{L}_T$ локально свободен. В силу постоянства полинома Гильберта на слоях морфизмов $\widetilde{\pi}$ и p и бирациональности морфизма $\widetilde{\Sigma}'_{\widetilde{T}} \to \Sigma_T$ ранги локально свободных пучков $\widetilde{\pi}_*\widetilde{\mathbb{L}}_{\widetilde{T}}$ и $p_*\mathbb{L}_T$ одинаковы. Более того, на открытой подсхеме $T_0 \subset T$ их ограничения изоморфны. Таким образом, существует обратимый $\mathcal{O}_{\widetilde{T}}$-пучок $\mathcal{L}''$ такой, что $\widetilde{\pi}_*\widetilde{\mathbb{L}}_{\widetilde{T}} \otimes \mathcal{L}'' = \phi^* p_*\mathbb{L}_T = p_*(\phi, id_S)^*\mathbb{L}_T$.

Теперь рассмотрим относительное проективное пространство $P(\widetilde{\pi}_*\widetilde{\mathbb{L}}_{\widetilde{T}} \otimes \mathcal{L}'')$ вместе с замкнутым вложением $i : \widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}} \hookrightarrow P(\widetilde{\pi}_*\widetilde{\mathbb{L}}_{\widetilde{T}} \otimes \mathcal{L}'')$, а также относительное проективное пространство той же размерности $P(p_*\mathbb{L}_T)$. Тогда квадрат

$$\begin{tikzcd} P(\widetilde{\pi}_*\widetilde{\mathbb{L}}_{\widetilde{T}} \otimes \mathcal{L}'') \arrow[r] \arrow[d] & P(p_*\mathbb{L}_T) \arrow[d] \\ \widetilde{T} \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

декартов. Обозначим за $\widetilde{\Sigma}''_T$ образ композиции $\widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}} \hookrightarrow P(\widetilde{\pi}_*\widetilde{\mathbb{L}}_{\widetilde{T}} \otimes \mathcal{L}'') \to P(p_*\mathbb{L}_T)$. По построению схема $\widetilde{\Sigma}''_T$ плоская над T. Обозначим за $j : \widetilde{\Sigma}''_T \hookrightarrow P(p_*\mathbb{L}_T)$ соответствующее замкнутое вложение этой подсхемы; пусть $\mathcal{O}_P(1)$ – канонический обратимый пучок на проективном расслоении $P(p_*\mathbb{L}_T)$. Тогда положим по определению $\widetilde{\mathbb{L}}''_T := j^*\mathcal{O}_P(1)$.

Теперь сформируем расслоенное произведение $G(p_*(\mathbb{E}_T \otimes L_T^m), r) \times_T P(p_*\mathbb{L}_T)$ и рассмотрим отображение $\widetilde{\Sigma}_{\widetilde{T}} \to G(p_*(\mathbb{E}_T \otimes L_T^m), r) \times_T P(p_*\mathbb{L}_T)$, индуцированное ранее построенными отображениями в сомножители. Пусть $\widetilde{\Sigma}_T$ – схемный образ этого отображения; тогда, очевидно, имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Sigma}'_T \arrow[d, hook] & & \widetilde{\Sigma}_T \arrow[ll, "p'"'] \arrow[rr, "p''"] \arrow[d, hook] & & \widetilde{\Sigma}''_T \arrow[d, hook] \\ G(p_*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}_T^m), r) & & G(p_*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}_T^m), r) \times_T P(p_*\mathbb{L}_T) \arrow[ll] \arrow[rr] & & P(p_*\mathbb{L}_T) \end{tikzcd}$$

Бирациональные морфизмы p', p'' определяются проекциями произведения $G(p_*(\mathbb{E}_T \otimes \mathbb{L}_T^m), r) \times_T P(p_*\mathbb{L}_T)$ на сомножители.

Осталось определить пучки $\widetilde{\mathbb{L}}_T$ и $\widetilde{\mathbb{E}}_T$ на схеме $\widetilde{\Sigma}_T$ по формулам:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{L}}_T &:= p''^*\widetilde{\mathbb{L}}''_T, \\ \widetilde{\mathbb{E}}_T &:= p'^*(j_T^*\mathcal{S}_T) \otimes \widetilde{L}_T^{-m} \end{aligned}$$

□

Замечание 4. Если T – целая нормальная схема, то построенное функториальное соответствие обратимо. Тем самым, класс схем, над которым определен частичный функтор $\mathbf{t}^{-1}$, содержит все целые нормальные схемы.

2. Изоморфизм схем модулей: доказательство теоремы 2

Вначале напомним некоторые объекты и конструкции, используемые в классическом построении схемы Гизекера — Маруямы. В силу выбора поляризации L считаем, что $H^0(S, E \otimes L^m) \otimes L^{-m} \to E$ — эпиморфизм. Пусть $\mathrm{Quot}^{rp(m)}(V \otimes L^{-m})$

— схема $Quot$ Гротендика, параметризующая факторпучки $V \otimes L^{-m} \twoheadrightarrow E$ при $V \cong H^0(S, E \otimes L^m)$, имеющие относительно L полином Гильберта, равный $rp(m)$. Схема $Quot$ несет универсальное семейство факторпучков

$$V \otimes L^{-m} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathrm{Quot}^{rp(m)}(V \otimes L^{-m})} \twoheadrightarrow \mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}.$$

Пусть Q' — квазипроективная подсхема в $\mathrm{Quot}^{rp(m)}(V \otimes L^{-m})$, состоящая из точек, отвечающих полустабильным пучкам, $\xi : Q \to Q'$ — любое ее гладкое разрешение, $\mathbb{E}_Q := \xi^* \mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}|_{Q'}$ — плоское над Q семейство когерентных пучков, наследуемое с $\mathbb{E}_{\mathrm{Quot}}$. Классический способ построения схемы Гизекера — Маруямы состоит в формировании GIT-фактора $Q'^{ss}//PGL(V)$ множества Q'^{ss} полустабильных точек относительно действия группы $PGL(V)$ на схеме Q'. Последнее индуцировано линейными преобразованиями векторного пространства V.

Применение к данным $Q \times S, \mathbb{L} = \mathcal{O}_Q \boxtimes L, \mathbb{E}_Q$ процедуры стандартного разрешения приводит к набору данных $\widetilde{Q}, \widetilde{\mathbb{L}}, \widetilde{\mathbb{E}}_Q$.

Заметим, что пучком $\widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^m$ определяется замкнутое вложение $j : \widetilde{S} \hookrightarrow G(V, r)$, где $G(V, r)$ — многообразие Грассмана, параметризующее факторпространства размерности r векторного пространства $V \cong H^0(\widetilde{S}, \widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^m)$. Это вложение определено не единственным образом, а с точностью до класса изоморфизма $H^0(\widetilde{S}, \widetilde{E} \otimes \widetilde{L}^m) \xrightarrow{\sim} V$ по модулю умножения на ненулевые скаляры $\vartheta \in k^*$. Пусть $P(m) = \chi(j^* \mathcal{O}_{G(V,r)}(m))$ — полином Гильберта подсхемы $j(\widetilde{S}) \subset G(V, r)$. Таким образом, точка, соответствующая подсхеме $j(\widetilde{S}) \subset G(V, r)$, определена в схеме Гильберта $\mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$ с точностью до действия группы $PGL(V)$.

В работе [5] показано, что данными $\widetilde{Q}, \widetilde{\mathbb{L}}, \widetilde{\mathbb{E}}_Q$ определен морфизм

$$\mu : \widetilde{Q} \to \mathrm{Hilb}^{P(m)} G(V, r).$$

Там же доказывается, что имеет место морфизм проективных схем $\kappa : \overline{M} \to \widetilde{M}$.

Также для дальнейшего необходимо понятие M-эквивалентности полустабильных допустимых пар, введенное и изученное в [5].

Для каждой пары схем вида $\widetilde{S}_1 = \mathrm{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I_1[t] + (t))^s/(t)^{s+1}$ и $\widetilde{S}_2 = \mathrm{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I_2[t] + (t))^s/(t)^{s+1}$ определена схема

$$\widetilde{S}_{12} = \mathrm{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I'_1[t] + (t))^s/(t)^{s+1} = \mathrm{Proj} \bigoplus_{s \geq 0} (I'_2[t] + (t))^s/(t)^{s+1}$$

вместе с морфизмами $\widetilde{S}_1 \xleftarrow{\sigma'_1} \widetilde{S}_{12} \xrightarrow{\sigma'_2} \widetilde{S}_2$, причем диаграмма

$$\begin{tikzcd} \widetilde{S}_{12} \arrow[r, "\sigma'_2"] \arrow[d, "\sigma'_1"'] & \widetilde{S}_2 \arrow[d, "\sigma_2"] \\ \widetilde{S}_1 \arrow[r, "\sigma_1"'] & S \end{tikzcd}$$

коммутативна. Пучки идеалов $I'_1 \subset \mathcal{O}_{\widetilde{S}_2}$ и $I'_2 \subset \mathcal{O}_{\widetilde{S}_1}$ определяются по формулам $I'_1 = \sigma_2^{-1} I_1 \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{S}_2}$ и $I'_2 = \sigma_1^{-1} I_2 \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{S}_1}$ соответственно. Операция $(\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2) \mapsto \widetilde{S}_1 \diamond \widetilde{S}_2 = \widetilde{S}_{12}$, определенная только что указанным способом, очевидно ассоциативна. Более того, поскольку для любого допустимого морфизма $\sigma : \widetilde{S} \to S$ выполнено $\widetilde{S} \diamond S = S \diamond \widetilde{S} = \widetilde{S}$, то допустимые морфизмы каждого класса $[E]$ S-эквивалентных полустабильных когерентных пучков порождают коммутативный моноид $\diamondsuit[E]$ с бинарной операцией $\diamond$ и нейтральным элементом $id_S : S \to S$.

Определение 6 ([5])**.** Полустабильные пары $(\widetilde{S}, \widetilde{E})$ и $(\widetilde{S}', \widetilde{E}')$ назовем *M-эквивалентными (моноидально эквивалентными)*, если для морфизмов $\diamond$-произведения $\widetilde{S} \diamond \widetilde{S}'$ на сомножители $\overline{\sigma}' : \widetilde{S} \diamond \widetilde{S}' \to \widetilde{S}$ и $\overline{\sigma} : \widetilde{S} \diamond \widetilde{S}' \to \widetilde{S}'$ и ассоциированных полистабильных пучков $\bigoplus_i gr_i(\widetilde{E})$ и $\bigoplus_i gr_i(\widetilde{E}')$ имеют место изоморфизмы

$$\overline{\sigma}'^* \bigoplus_i gr_i(\widetilde{E})/tors \cong \overline{\sigma}^* \bigoplus_i gr_i(\widetilde{E}')/tors.$$

Из результатов работы [5] следует, что классы M-эквивалентности допустимых полустабильных пар $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ биективны классам S-эквивалентности полустабильных когерентных пучков, причем биекция устанавливается соответствием $E \mapsto ((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \sigma^* E/tors)$. Поэтому достаточно убедиться в том, что схема Гизекера — Маруямы $\overline{M}$ является копредставляющей схемой функтора $\mathfrak{f}$ наряду со схемой $\widetilde{M}$. Выберем объект $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$. В силу биективности множества классов M-эквивалентности полустабильных допустимых пар классам S-эквивалентности полустабильных когерентных пучков, объект $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ определяет морфизм $h \in \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Spec}\, k, \overline{M})$.

Обратно, морфизм $h \in \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Spec}\, k, \overline{M})$ выделяет точку, представляющую класс M-эквивалентности объектов $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$.

Построим для любой приведенной схемы B и естественного преобразования $\psi' : \mathfrak{f} \to \underline{F}'$ единственное естественное преобразование $\omega : \underline{\overline{M}} \to \underline{F}'$ такое, что выполнено $\psi' = \omega \circ \psi$. При этом преобразование ψ' соответствует плоскому семейству $\pi : \widetilde{\Sigma} \to B$ с послойной поляризацией $\widetilde{\mathbb{L}}$, оснащенному семейством локально свободных пучков $\widetilde{\mathbb{E}}$. При этом достаточно ограничиться случаем, когда B — целая схема. Действительно, всякая приведенная схема может быть представлена в виде объединения неприводимых компонент. Также мы принимаем во внимание замечание 2.

При этом ограничение на любой слой $\pi^{-1}(b)$ морфизма π поставляет объект $((\pi^{-1}(b), \widetilde{\mathbb{L}}|_{\pi^{-1}(b)}), \widetilde{\mathbb{E}}|_{\pi^{-1}(b)})$, принадлежащий классу $\mathfrak{F}$. Тогда имеет место морфизм в расслоение Грассмана $\widetilde{\Sigma} \to G(\pi_*(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m), r)$, ограничивающийся на слоях морфизма π до вложения $j_b : \pi^{-1}(b) \hookrightarrow G(H^0(\pi^{-1}(b), \widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m|_{\pi^{-1}(b)}), r)$.

Пучок $\pi_*(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m)$ локально свободен, поэтому расслоение Грассмана $G(\pi_*(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m), r)$ локально тривиально над B. Пусть $\bigcup_i B_i = B$ — тривиализующее открытое по Зарискому покрытие; подсемейства $\widetilde{\Sigma}_i$ заданы расслоенными квадратами

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Sigma} \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{\Sigma}_i \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\pi_i"] \\ B & B_i \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

в которых горизонтальные стрелки — открытые вложения. Зафиксируем изоморфизмы тривиализации $\tau_i : G(\pi_*(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m), r)|_{B_i} \to G(V, r) \times B_i$. Композиция

$$\widetilde{\Sigma}_i \xrightarrow{j_i} G(\pi_*(\widetilde{\mathbb{E}} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m), r)|_{B_i} \xrightarrow{\tau_i} G(V, r) \times B_i \xrightarrow{pr_1} G(V, r)$$

задает морфизм базы в схему Гильберта $\mu_i : B_i \to \mathrm{Hilb}^{P(t)} G(V, r)$, пропускаемый через подсхему $\mu(\widetilde{Q})$. Для универсальной схемы $\mathrm{Univ}^{P(m)} G(V, r)$ над схемой Гильберта $\mathrm{Hilb}^{P(m)} G(V, r)$ имеем расслоенную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Sigma}_i \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & & \mathrm{Univ}^{P(m)} G(V,r) \arrow[dd] \\
& \mathrm{Univ}^{P(m)} G(V,r)|_{\mu(\widetilde{Q})} \arrow[urr] \arrow[dd] & & \\
B_i \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & \mathrm{Hilb}^{P(m)} G(V,r) \\
& \mu(\widetilde{Q}) \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Определим схемы B_{iQ} и $\widetilde{\Sigma}_{iQ}$ как расслоенные произведения $B_{iQ} := B_i \times_{\mu(\widetilde{Q})} \widetilde{Q}$ и $\widetilde{\Sigma}_{iQ} := \widetilde{\Sigma}_i \times_{B_i} B_{iQ}$. Пусть $\widetilde{\beta} : \widetilde{\Sigma}_{iQ} \to \widetilde{\Sigma}_i$ — морфизм проекции на сомножитель. Обозначим $\widetilde{\mathbb{E}}_{iQ} := \widetilde{\beta}^* \widetilde{\mathbb{E}}_i$. Тем самым определен морфизм $\Phi_i : \widetilde{\Sigma}_{iQ} \to B_{iQ} \times S$, получаемый с помощью расслоенного произведения из морфизма $\Phi : \widetilde{\Sigma}_Q \to \widetilde{Q} \times S$. По теореме Серра и выбору обратимого пучка $\widetilde{\mathbb{L}}$ имеем эпиморфизм $\pi^* \pi_* (\widetilde{\mathbb{E}}_{iQ} \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^m) \otimes \widetilde{\mathbb{L}}^{-m} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathbb{E}}_{iQ}$. Пусть B_0 — открытое подмножество схемы B, над которым $\widetilde{\Sigma}$ локально тривиально со слоем, изоморфным S. Измельчая, если необходимо, покрытие $\{B_i\}$, приходим на пересечениях $B_{i0} = B_0 \cap B_i$ к эпиморфизму $V \otimes L^{-m} \boxtimes \mathcal{O}_{B_{i0}} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathbb{E}}_{iQ}|_{B_{i0}}$. Тем самым определен морфизм $q_{i0} : B_{i0} \to \mathrm{Quot}^{rp(m)} (V \otimes \mathbb{L}^{-m})$. В силу того, что члены семейства $\widetilde{\mathbb{E}}_{iQ}|_{B_{i0}} = \widetilde{\mathbb{E}}_{iQ}|_{B_{i0}}$ являются полустабильными локально свободными пучками, то морфизм q_{i0} пропускается через подсхему Q'.

Образуем замыкание $\overline{q_{i0} B_{i0}} \supset q_{i0} B_{i0}$ в схеме Q' и произведение $B_i \times \overline{q_{i0} B_{i0}}$. Пусть $\widetilde{B}_i$ — замыкание в произведении $B_i \times \overline{q_{i0} B_{i0}}$ подмножества точек вида $(b, q_{i0}(b)), b \in B_{i0}$. Проекция $\rho : \widetilde{B}_i \to B_i$ на первый сомножитель является бирациональным морфизмом целых схем. Далее необходимо, чтобы схема $\widetilde{B}_i$ была нормальной; поэтому, если это не так, заменим схему $\widetilde{B}_i$ ее нормализацией. Введем обозначение для композиции $q_i : \widetilde{B}_i \hookrightarrow B_i \times \overline{q_{i0} B_{i0}} \xrightarrow{pr_2} \overline{q_{i0} B_{i0}} \subset Q'$. Остальные необходимые обозначения фиксируются расслоенной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\widetilde{\Sigma}}_{iQ} \arrow[r, "\widetilde{\rho}"] \arrow[d, "\widetilde{\Phi}_i"'] & \widetilde{\Sigma}_{iQ} \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_i"] & \widetilde{\Sigma}_Q \arrow[d, "\Phi"] \\
\widetilde{B}_i \times S \arrow[r, "\rho \times id_S"] & B_{iQ} \times S \arrow[r] & \widetilde{Q} \times S
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим пучки $\mathbb{E}_{iQ} := (\widetilde{\Phi}_{i*} \widetilde{\rho}^* \widetilde{\widetilde{\mathbb{E}}}_{iQ})^{\vee\vee}$ и $(q_i, id_S)^* \mathbb{E}_Q$. Оба пучка рефлексивны на целой нормальной схеме $\widetilde{B}_i \times S$ и совпадают на открытом подмножестве, получаемом исключением подсхемы коразмерности 3, где они не локально свободны. Тем самым, $\mathbb{E}_{iQ} = (q_i, id_S)^* \mathbb{E}_Q$, что, в частности, доказывает плоскость над $\widetilde{B}_i$ пучка $\mathbb{E}_{iQ}$.

Сквозные отображения $\widetilde{B}_i \to B_{iQ} \to \widetilde{Q} \to \underline{Q}'$ при формировании $PGL(V)$-фактора пропускаются через морфизмы $B_i \to \overline{M}$, поскольку изоморфные полустабильные допустимые пары задают $PGL(V)$-эквивалентные точки. Морфизмы $B_i \to \overline{M}$ склеиваются в морфизм $B \to \overline{M}$. Двойственный к нему морфизм в двойственной категории $(Schemes_k)^o$ задает естественное преобразование $\omega : \underline{\overline{M}} \to \underline{F}'$.

Список литературы

1. Тимофеева Н. В. Компактификация в схеме Гильберта многообразия модулей стабильных 2-векторных расслоений на поверхности // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 5. С. 756–769.

2. Тимофеева Н. В. О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности // Матем. сборник. 2008. Т. 199, № 7. С. 103–122.

3. Тимофеева Н. В. О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, II // Матем. сборник. 2009. Т. 200, № 3. С. 95–118.

4. Тимофеева Н. В. О вырождении поверхности в компактификации Фиттинга модулей стабильных векторных расслоений // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 1. С. 143–150.

5. Тимофеева Н. В. О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. III: Функториальный подход // Матем. сб., 2011. Т. 202, № 3, С. 107–160.

6. Timofeeva N. V. On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface. IV: Nonreduced moduli // препринт ArXiv:1108.3789v3.

7. Gieseker D. On the moduli of vector bundles on an algebraic surface // Annals of Math. 1977. V. 106. P. 45–60.

8. Huybrechts D., Lehn M. The geometry of moduli spaces of sheaves // Aspects Math., E31. Braunschweig: Vieweg, 1997. 269 p.

On an Isomorphism of Compactifications of Moduli Scheme of Vector Bundles

Timofeeva N. V.

Keywords: semistable admissible pairs, moduli functor, vector bundles, algebraic surface

A morphism of the reduced Gieseker – Maruyama moduli functor (of semistable coherent torsion-free sheaves) on the surface to the reduced moduli functor of admissible semistable pairs with the same Hilbert polynomial, is constructed. It is shown that main components of reduced moduli scheme for semistable admissible pairs $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ are isomorphic to main components of the reduced Gieseker – Maruyama moduli scheme.

Сведения об авторе:
Тимофеева Надежда Владимировна,
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и математической логики