Модел. и анализ информ. систем. Т. **17**, № **1** (2010) 76–82

УДК 514.172.45

О числе фасет 2-смежностного многогранника

Максименко А.Н.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: maksimenko_a_n@mail.ru

получена 13 января 2010

Ключевые слова: 2-смежностные многогранники, число фасет

Многогранник P называется 2-смежностным, если любые две его вершины образуют ребро (1-грань) многогранника P. Высказывается предположение, что число $f_0(P)$ вершин такого многогранника не превосходит числа его фасет (граней наибольшей размерности). Доказывается справедливость утверждения для случаев $d < 7$ и $f_0(P) < d + 6$, где d — размерность многогранника.

Следуя общепринятой терминологии [4], d-мерный выпуклый многогранник будем коротко называть *d-многогранником*, его i-мерные грани — *i-гранями*, 0-грани — *вершинами*, 1-грани — *ребрами*, $(d-1)$-грани — *фасетами*. Многогранник называется *k-смежностным*, если любое k-элементное подмножество его вершин является множеством вершин некоторой грани этого многогранника. В частности, любые две вершины 2-смежностного многогранника инцидентны некоторому ребру этого многогранника (граф такого многогранника полный). Для d-многогранника P и $i = 0, 1, \ldots, d-1$ обозначим через $f_i(P)$ число его i-граней. Задача оценки чисел $f_i(P)$ в зависимости от числа вершин $f_0(P)$ для различных классов многогранников известна давно. Так, например, для симплициального многогранника (все фасеты которого — симплексы) эта задача известна как гипотеза о нижней границе и полностью решена в 1971 — 1973 гг. Барнетте [7, 8]. В частности, если P — симплициален, то

$$f_{d-1}(P) \geq (d-1)(f_0(P) - d) + 2. \tag{1}$$

Известны оценки такого рода и для некоторых других классов многогранников. Так, например, для купитопов, многогранников, не содержащих треугольных 2-граней, установлено [10], что $f_i(P) \geq f_i(C^d)$, где C^d — d-мерный куб. С другой стороны, задача изучения общих комбинаторных свойств 2-смежностных многогранников до сих пор не рассматривалась. Вернее, внимание уделялось только их подмножеству — $[d/2]$-смежностным многогранникам, которые чаще называют просто *смежностными* [15, 12]. Досадность этого упущения подтверждается следующими фактами.

Из многочисленных работ [2, 3, 13, 14], посвященных изучению многогранников задач комбинаторной оптимизации, известно, что среди них очень часто встречаются именно 2-смежностные многогранники. Кроме того, в работе В.А. Бондаренко и

А.Г. Бродского [1] установлено, что при случайном выборе n вершин d-мерного куба натянутая на них выпуклая оболочка с вероятностью, близкой к единице, оказывается 2-смежностным многогранником при $n = O(2^{d/6})$. Такая закономерность была замечена еще в 1956 г. Д. Гейлом [11], и вызывает удивление тот факт, что до сих пор классу 2-смежностных многогранников уделялось так мало внимания. Справедливости ради следует сказать, что этот класс гораздо шире хорошо изученного класса смежностных многогранников [15, 12] и значительно сложнее симплициальных. Сложность эта определяется тем, что класс 2-смежностных многогранников ограничен одним-единственным условием: любые две вершины таких многогранников должны быть соединены ребром. Попробуем сделать в этом направлении хоть какое-то предположение.

Гипотеза. *Число вершин 2-смежностного многогранника не превосходит числа его фасет.*

Заметим, что в силу формулы (1) это утверждение будет справедливым для всех 2-смежностных многогранников, являющихся симплициальными, в частности, для d-мерного симплекса.

Ниже будет показано, что эта гипотеза справедлива для случаев $d < 7$ (малая размерность) и $f_0 < d+6$ (небольшое число вершин). Далее, с целью проверки гипотезы, будут рассмотрены разнообразные примеры 2-смежностных многогранников.

I. Малая размерность

Примерами 2-смежностных многогранников в привычных 2-мерном и 3-мерном пространствах могут служить лишь треугольник и тетраэдр. Или, иначе говоря, только 2- и 3-мерные симплексы, для которых справедливость гипотезы очевидна. Какое-то разнообразие появляется лишь при рассмотрении 4-многогранников. Как было замечено, их 3-грани могут быть только симплексами, а, значит, сами многогранники симплициальны и удовлетворяют уравнениям Дена-Соммервилля [4]. При $d = 4$ эти уравнения могут быть записаны в следующем виде:

$$f_3 = \frac{f_2}{2} = f_1 - f_0,$$

где f_i — число i-граней, $i = 0, 1, 2, 3$. В таком случае число фасет и число вершин 2-смежностного 4-многогранника связаны уравнением

$$f_3 = \frac{f_0(f_0 - 3)}{2} \tag{2}$$

и справедливость гипотезы при $d = 4$ доказана.

Для случаев $d = 5$ и $d = 6$ воспользуемся результатом следующих рассуждений. Рассмотрим множества F_k и F_{k-1} всех k- и $(k-1)$-граней многогранника P. Введем в рассмотрение двудольный граф, множества вершин которого отождествим с F_k и F_{k-1}, а множество ребер его определим следующим образом. Вершины $x \in F_{k-1}$ и $y \in F_k$ графа соединены ребром, если грань x принадлежит грани y. Число $|E|$ ребер этого графа можно подсчитать двумя способами: перебирая вершины из F_k, либо перебирая вершины из F_{k-1}. В первом случае получаем $|E| = \sum\limits_{y \in F_k} f_{k-1}(y)$, где

$f_{k-1}(y)$ — число $(k-1)$-граней грани y. А во втором: $|E| \geq (d-k+1)f_{k-1}$, так как каждая $(k-1)$-грань d-многогранника является пересечением как минимум $(d-k+1)$ его k-граней [4]. Сравнивая результаты подсчетов, приходим к неравенству

$$(d-k+1)f_{k-1} \leq \sum_{y \in F_k} f_{k-1}(y).$$

Учитывая, что все 3-грани 2-смежностного многогранника являются симплексами, получаем

$$(d-2)f_2 \leq 4f_3 \tag{3}$$

и

$$(d-1)f_1 \leq 3f_2.$$

При $d=5$ эти неравенства приобретают вид

$$4f_1 \leq 3f_2 \leq 4f_3. \tag{4}$$

Для удобства рассуждений введем следующие понятия. $(d-2)$-грани d-многогранника будем называть *риджами.* Так как каждый ридж является пересечением ровно двух фасет многогранника, то можно ввести понятие *ридж-графа* многогранника. Вершинам ридж-графа многогранника соответствуют фасеты многогранника, а ребрам — риджи. Согласно этой терминологии неравенство (4) означает, что число ребер 2-смежностного 5-многогранника не превосходит числа его риджей. И так как граф такого многогранника полный, то число f_4 вершин ридж-графа не может быть меньше числа f_0 вершин самого многогранника. (Для произвольного 2-смежностного d-многогранника эти рассуждения имели бы вид $f_1 \leq f_{d-2} \Rightarrow f_0 \leq f_{d-1}$.)

Для проверки справедливости гипотезы при $d=6$ воспользуемся формулой Эйлера—Пуанкаре [4]

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + f_4 - f_5 = 0$$

и неравенством (3): $4f_2 \leq 4f_3$. Получаем

$$f_1 - f_0 \leq f_4 - f_5. \tag{5}$$

По условию $f_1 - f_0 = \dfrac{f_0(f_0-3)}{2}$. С другой стороны, ридж-граф такого многогранника не обязан быть полным, поэтому $f_4 - f_5 \leq \dfrac{f_5(f_5-3)}{2}$. Объединяя эти рассуждения с неравенством (5), имеем

$$f_0(f_0-3) \leq f_5(f_5-3).$$

Следовательно, $f_0 \leq f_5$.

II. Небольшое число вершин

Для d-мерного симплекса справедливость гипотезы очевидна. Покажем, что при $d \geq 4$ и числе вершин $d+2 \leq f_0 \leq d+5$ число фасет 2-смежностного d-многогранника удовлетворяет неравенству

$$f_{d-1} \geq d+5. \tag{6}$$

Докажем это утверждение индукцией по d. Для $d = 4$ его справедливость следует из формулы (2).

Допустим, что при $d = k$ неравенство (6) выполнено.

Для 2-смежностного $(k + 1)$-многогранника P рассмотрим два случая.

1. Предположим, что каждая фасета многогранника P содержит ровно $d = k+1$ вершин. Тогда P симплициален, и число его фасет удовлетворяет неравенству (1):

$$f_{d-1}(P) \geq (d-1)(f_0 - d) + 2 \geq 2d \geq d+5 \quad \text{для } f_0 \geq d+2 \text{ и } d \geq 5.$$

2. Рассмотрим теперь те случаи, когда хотя бы одна из фасет многогранника не является симплексом, то есть число s ее вершин удовлетворяет неравенствам $k+2 \leq s \leq k+5$. Заметим, что эта фасета (как, впрочем, и все остальные) является 2-смежностным k-многогранником, для которого неравенство (6) предполагается выполненным. Тогда число смежных с ней фасет (имеющих с ней общий ридж) не может быть меньше $k + 5$, а число всех фасет многогранника P не меньше $k + 6$. Таким образом, справедливость гипотезы для $f_0 \leq d + 5$ доказана.

III. Примеры 2-смежностных многогранников

Общая теория выпуклых многогранников имеет в своем арсенале большое количество разнообразных приемов построения новых многогранников на базе уже имеющихся. Но подавляющее большинство этих операций не сохраняет свойство 2-смежностности трансформируемого многогранника.

Наиболее продуктивным для наших целей оказывается метод построения пирамиды над имеющимся основанием, состоящий в следующем. Заданный d-многогранник рассматривается в $(d + 1)$-мерном пространстве и называется основанием пирамиды. В качестве же вершины пирамиды выбирается любая точка, не лежащая с ним в одной гиперплоскости. Ясно, что в выпуклой оболочке этой конструкции добавленная точка окажется вершиной, смежной со всеми остальными вершинами многогранника, а смежность вершин основания не нарушится. Число же фасет построенного таким образом $(d+1)$-многогранника окажется на единицу большим, чем число фасет основания пирамиды. Таким образом, на основе любого 2-смежностного d-многогранника можно построить пример 2-смежностного $(d+1)$-многогранника с на единицу большим числом вершин и той же разностью между числом фасет и вершин.

В качестве основы для таких построений удобно взять циклические 4-многогранники, числа вершин и фасет которых связаны уравнением (2). Полученные 2-смежностные d-пирамиды на f_0 вершинах будут иметь

$$f_{d-1} = \frac{(f_0 - d + 4)(f_0 - d + 1)}{2} + d - 4 \tag{7}$$

фасет. Получающаяся отсюда формула для разности между числом фасет и числом вершин выглядит более информативно:

$$f_{d-1} - f_0 = \frac{(x+5)x}{2}, \tag{8}$$

где $x = f_0 - (d+1)$. Любопытно сравнить формулу (7) с нижней оценкой (1) числа фасет симплициального многогранника. Нетрудно увидеть, что при $d+1 < f_0 < 3d-8$ предложенная пирамидальная конструкция дает примеры 2-смежностных d-многогранников с заведомо меньшим числом фасет, чем у любого симплициального d-многогранника с тем же числом вершин.

В качестве еще одного способа построения примеров 2-смежностных многогранников можно рассмотреть так называемую «швейную» конструкцию Шемера [9, 15]. Этот метод был разработан для построения $\left[\frac{d}{2}\right]$-смежностных многогранников, имеющих, как известно [4], наибольшее число фасет. Именно «благодаря» последнему факту получающиеся с помощью этой методики примеры имеют большее число фасет, чем рассмотренные выше пирамиды, и для поиска нижней границы оказываются неинтересны.

Другим подходом к построению 2-смежностных многогранников с как можно меньшим числом фасет может быть численный эксперимент. Воспользуемся тем, что выпуклая оболочка любого подмножества вершин 2-смежностного многогранника тоже является 2-смежностным многогранником. Значит, выбирая случайным образом всевозможные подмножества вершин уже известных 2-смежностных многогранников и натягивая на них выпуклые оболочки, мы можем получать новые разнообразные примеры 2-смежностных многогранников.

Наиболее трудоемкой процедурой при таком подходе будет подсчет числа фасет вновь получаемых многогранников. Эта задача была возложена на программный продукт lrs 4.2 [6]. В качестве же объектов эксперимента были выбраны 10-многогранник Айхольцера [5] и многогранники задачи КЛИКА (см., например, [2]) размерности 10, 15 и 21. Многогранник Айхольцера имеет 44 вершины и 9708 фасет. Его полное описание можно найти в списке примеров 0/1-многогранников по адресу `http://www.math.tu-berlin.de/polymake/examples/ZeroOne/` в файле `OA:10-44.poly`. Многогранник задачи КЛИКА строится следующим образом. Установим взаимно-однозначное соответствие между ребрами n-вершинного неориентированного полного графа G и координатами точек пространства $\mathbb{R}^d$, где $d = \frac{n(n-1)}{2}$. Каждому подграфу графа G поставим в соответствие точку, у которой координаты, соответствующие ребрам подграфа, равны единице, а остальные координаты — нулю. Таким образом, множеству всех полных подграфов графа G будет соответствовать множество из $2^n - n - 1$ точек в $\mathbb{R}^d$. Выпуклая оболочка этих точек и называется многогранником задачи КЛИКА. При $n = 5$ он будет иметь размерность $d = 10$, 26 вершин и 493 фасеты. При $n = 6$ это будет 15-многогранник на 57 вершинах, имеющий 21441 фасет. И т.д.

Наиболее интересные результаты были получены при обработке 15-многогранника задачи КЛИКА. Результаты обработки нескольких сотен тысяч случайных примеров сведены в таблице. В первой строчке указано число вершин, во второй — наименьшее найденное для обработанных примеров число фасет. Третья строчка равна разности второй и первой — оказалось, что ее значения почти не зависят от размерности тестируемого многогранника. В четвертой строчке для сравнения приводится аналогичная характеристика упомянутых выше пирамидальных конструкций.

вершины	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
фасеты	20	22	23	27	34	35	44	50	44	65	92	101	147	174	174
разность	3	4	4	7	13	13	21	26	19	39	65	73	118	144	143
пирамиды	3	7	12	18	25	33	42	52	63	75	88	102	117	133	150

Как видно из таблицы, разность между числом фасет и вершин «в реальности» растет заметно медленнее, чем оценка (8).

IV. Заключительные замечания

Проведенные исследования дают основания предполагать, что число фасет 2-смежностного многогранника растет значительно быстрее числа вершин. Но доказательство гипотезы о нижней границе даже в упрощенной форме $f_{d-1} \geq f_0$ наталкивается на ряд трудностей. Перечислим некоторые из них.

1) При $d+1 < f_0 < 3d-8$ существуют примеры 2-смежностных многогранников с числом фасет меньшим, чем у любого симплициального многогранника. Кроме того, условие 2-смежностности значительно легче условия симплициальности. Эти замечания заставляют предположить, что доказательство гипотезы о нижней границе для 2-смежностных многогранников окажется труднее аналогичного утверждения для симплициальных.

2) При обработке случайных 2-смежностных многогранников был обнаружен интересный пример 10-многогранника на 20 вершинах, имеющего 39 фасет. При удалении любой из вершин этого многогранника число фасет выпуклой оболочки оставшихся 19 вершин может только увеличиться (45, 61 или 86).

3) Известны примеры (не 2-смежностных) релаксационных многогранников труднорешаемых задач (см., например, [3, 2]), число попарно смежных вершин которых растет экспоненциально, а число фасет — полиномиально.

Список литературы

1. Бондаренко В.А., Бродский А.Г. О случайных 2-смежностных 0/1-многогранниках // Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 1. С. 64–69.

2. Бондаренко В.А., Максименко А.Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. М.: ЛКИ, 2008. 184 с.

3. Деза М.М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик. М.: МЦНМО, 2001. 736 с.

4. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981. 344 с.

5. Aichholzer O. Extremal properties of 0/1-polytopes of dimension 5 // G. Ziegler and G. Kalai, editors, Polytopes - Combinatorics and Computation. Birkhauser, 2000. P. 111–130.

6. Avis D. lrslib Ver 4.2 is a self-contained ANSI C implementation as a callable library of the reverse search algorithm for vertex enumeration/convex hull problems: http://cgm.cs.mcgill.ca/~avis/C/lrs.html

7. Barnette D. The minimum number of vertices of a simple polytope // Israel J. Math. 1971. V. 10. P. 121–125.

8. Barnette D. A proof for the lower bound conjecture for convex polytopes // Pacific J. Math. 1973. V. 46. P. 349–354.

9. Bisztriczky T. On sewing neighbourly polytopes // Note di Matematica. 2000/2001. V. 20, № 1. P. 73-–80.

10. Blind G. and Blind R. Convex polytopes without triangular faces // Isr. J. Math. 1990. V. 71. P. 129–134.

11. Gale D. Neighboring vertices on a convex polyhedron // Linear inequalities and related systems / Eds. H.W. Kuhn, A.W. Tucker. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1956.

12. Henk M., Richter-Gebert J. and Ziegler G. Basic properties of convex polytopes // J.E. Goodman and J. O'Rourke, editors, Handbook of Discrete and Computational Geometry, chapter 16. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, second edition, 2004. P. 355–382.

13. Kovalev M., Maurras J.-F., Vaxes Y. On the convex hull of 3-cycles of the complete graph // Pesquisa Operacional. 2003. V. 23, № 1. P. 99–109.

14. Onn S. Geometry, Complexity, and Combinatorics of Permutation Polytopes // J. Comb. Theory, Series A. 1993. V. 64, № 1. P. 31–49.

15. Shemer I. Neighborly polytopes // Isr. J. Math. 1982. V. 43. P. 291–314.

On the number of facets of a 2-neighborly polytope

Maksimenko A.N.

Keywords: 2-neighborly polytopes, number of facets

A d-polytope P is 2-neighborly if each 2 vertices of P determine an edge. It is conjectured that the number $f_0(P)$ of vertices for such polytope does not exceed the number $f_{d-1}(P)$ of facets. The conjecture is separately proved for $d < 7$ and for $f_0(P) < d + 6$.

Сведения об авторе: **Максименко Александр Николаевич**,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент