Модел. и анализ информ. систем. Т. **17**, № **1** (2010) 83–92

УДК 517.957

Явление буферности в обобщенном уравнении Свифта–Хоэнберга

Сандуляк Д.В.[1]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: danzova@hotmail.ru

получена 2 сентября 2009

Ключевые слова: мультистабильность, буферность, гидродинамика, принцип подобия, асимптотические методы.

Рассматривается специальным образом обобщенное уравнение Свифта–Хоэнберга с нулевыми граничными условиями типа Дирихле на концах конечного отрезка. Устанавливается, что при увеличении длины l упомянутого отрезка и при фиксированной достаточно малой надкритичности ε количество сосуществующих устойчивых состояний равновесия у этой краевой задачи неограниченно растет, т.е. наблюдается явление буферности.

1. Общая постановка проблемы

Конвекция, связанная с неоднородным нагревом, является без преувеличения самым распространенным видом течений газа и жидкости во Вселенной. Немалую роль она играет и в разнообразных технических устройствах. Этим уже вполне объясняется стойкий и пристальный интерес исследователей к конвекции.

Для «микроскопического» описания структур предложены разнообразные модельные уравнения. К их числу принадлежит уравнение Свифта–Хоэнберга, имеющее вид

$$\partial_t w = \varepsilon w - (1+\Delta)^2 w - w^3, \tag{1}$$

где w — действительная функция пространственных и временной координат, а ε — малый положительный параметр.

В качестве объекта исследования нами выбрано специальное обобщение уравнения Свифта–Хоэнберга с одномерной пространственной переменной

$$\partial_t w = \varepsilon w - (1+\partial_x^2)^2 w + f(w), \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проекты РНП.2.2.2.3.8064 и РНП.2.2.1.1.5859) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракты № 02.740.11.0197 и П30).

где $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $w = w(t,x)$ – вещественная скалярная функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = \partial_x^2 w|_{x=0} = \partial_x^2 w|_{x=l} = 0. \tag{3}$$

$\partial_t = \partial/\partial t, \partial_x = \partial/\partial x$, ε – положительный параметр (надкритичность). Относительно функции $f(w)$ предполагаем, что $f(w) \in C^\infty$ нечётна и $f'(0)=0$, $f'''(0)/3! = a < 0$.

Выполним в краевой задаче (2), (3) замену $\pi x/l \to x$, приводящую ее к более удобному для последующего анализа виду

$$\partial_t w = \varepsilon w - (1 + \nu\, \partial_x^2)^2 w + f(w), \tag{4}$$

$$w|_{x=0} = w|_{x=\pi} = \partial_x^2 w|_{x=0} = \partial_x^2 w|_{x=\pi} = 0, \tag{5}$$

где $\nu = \pi^2/l^2$.

Фазовым пространством для данной задачи служит $\overset{\circ}{W}{}_2^4(0,\pi)$, где $\overset{\circ}{W}{}_2^4$ — замыкание в метрике соболевского пространства $W_2^4(0,\pi)$ линеала гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям (5). Нас интересует существование и устойчивость ее пространственно неоднородных состояний равновесия (так называемых диссипативных структур), бифурцирующих из нуля при уменьшении параметра ν и при фиксированной надкритичности ε, подчиненной требованиям

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Исследуем устойчивость нулевого состояния равновесия задачи (4), (5). Отбросим в (4), (5) нелинейное слагаемое $f(w)$ и применим к получившейся линейной краевой задаче метод Фурье по системе функций $\sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$ В результате убеждаемся, что за устойчивость решения $w = 0$ отвечают знаки характеристических показателей $\lambda_n = \varepsilon - (1 - n^2\nu)^2$, $n \geqslant 0$. Отсюда и из условия $0 < \varepsilon < 1$ следует, что состояние равновесия $w = 0$ задачи (4), (5) экспоненциально неустойчиво при

$$\nu \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{\nu_-(\varepsilon)}{n^2}, \frac{\nu_+(\varepsilon)}{n^2} \Big),\ \nu_\pm(\varepsilon) = 1 \pm \sqrt{\varepsilon}. \tag{6}$$

Структура множества (6) такова, что с ростом n интервалы $(\nu_-(\varepsilon)/n^2, \nu_+(\varepsilon)/n^2)$ начинают пересекаться во все большем числе. Поэтому при $\nu \to 0$ нулевое состояние равновесия заведомо неустойчиво и степень его неустойчивости неограниченно растет. Следует также отметить, что состав положительных показателей λ_n при уменьшении ν постоянно обновляется. В связи с этим можно ожидать, что при $\nu \to 0$ и при условиях $0 < \varepsilon < 1$ в рамках краевой задачи (4), (5) происходит бесконечная последовательность бифуркаций рождения и смерти диссипативных структур.

На основе проделанного линейного анализа конкретизируем поставленную выше бифуркационную проблему. Наиболее простая и естественная ситуация, которая может здесь возникнуть, заключается в следующем: при всех $\nu_-(\varepsilon) < \nu < \nu_+(\varepsilon)$ краевая задача (4), (5) имеет пару непрерывно зависящих от ν диссипативных структур

$$w_1(x,\nu,\varepsilon) = w_0(x,\nu,\varepsilon),\ w_2(x,\nu,\varepsilon) = w_0(\pi - x,\nu,\varepsilon), \tag{7}$$

где функция $w_0(x, \nu, \varepsilon)$ обладает свойствами:

$$\partial_x w_0(x, \nu, \varepsilon) \not\equiv 0 \ \text{ при любом } \nu \in (\nu_-(\varepsilon), \nu_+(\varepsilon)),\ w_0(x, \nu_\pm(\varepsilon), \varepsilon) \equiv 0. \tag{8}$$

Поскольку задача (4), (5) инвариантна по отношению к замене $\pi - x \to x$, ее диссипативные структуры существуют парами, т.е. если имеется какое-либо состояние равновесия $w = w(x)$, то таковым будет и $w = w(\pi - x)$.

Требования (8) означают, что при уменьшении ν пара диссипативных структур (7) сначала бифурцирует из нулевого состояния равновесия (при $\nu = \nu_+(\varepsilon)$), а затем «умирает» на нем (при $\nu = \nu(\varepsilon)$). С помощью принципа подобия можно построить и другие диссипативные структуры задачи (4), (5), бифурцирующие из нуля при уменьшении ν.

Суть принципа подобия состоит в следующем. Продолжим функцию $w_0(x, \nu, \varepsilon)$ по переменной x на отрезок $[-\pi, 0]$ нечетным образом, а затем на всю ось x по периодичности с периодом 2π. Тогда при любом натуральном n функция $w_0(nx, n^2 v, \varepsilon)$ по-прежнему будет удовлетворять краевой задаче (4), (5), если, конечно, $n^2\nu \in (\nu_-(\varepsilon), \nu_+(\varepsilon))$. Из этого следует, что на каждом из интервалов

$$\nu_-(\varepsilon)/n^2 < \nu < \nu_+(\varepsilon)/n^2, \quad n = 1, 2, ... \tag{9}$$

задача (4), (5) имеет две диссипативные структуры, задающиеся равенствами

$$w_n^1 = w_0(nx, n^2\nu, \varepsilon), w_n^2 = w_0(\pi - nx, n^2\nu, \varepsilon). \tag{10}$$

Сопоставляя область неустойчивости (6) с интервалами (9) и учитывая свойства (3), убеждаемся, что семействами (10) при $n = 1, 2, ...$ исчерпываются все диссипативные структуры краевой задачи (4), (5), бифурцирующие из ее нулевого состояния равновесия. Кроме того, как уже отмечалось выше, с ростом n интервалы (9) начинают пересекаться во все возрастающем числе, а значит, и количество сосуществующих диссипативных структур (10) при $\nu \to 0$ неограниченно растет.

Следует отметить, что пока все изложенные построения, связанные с принципом подобия, носят условный характер, так как мы еще не доказали существования основной пары диссипативных структур (7).

2. Локальная постановка задачи

Ясно, что проблема существования основных диссипативных структур (7) с нужными свойствами (3) может стать локальной только при дополнительном предположении о малости длины интервала $(\nu_-(\varepsilon), \nu_+(\varepsilon))$, что эквивалентно малости параметра ε. Таким образом, при нахождении состояний равновесия (7) будем считать, что

$$0 < \varepsilon << 1, \quad \nu = 1 + \delta\sqrt(\varepsilon), \delta \in (-1, 1), \tag{11}$$

где параметр δ, имеющий порядок единицы, отвечает за изменение ν на требуемом интервале $(\nu_-(\varepsilon), \nu_+(\varepsilon))$.

Для отыскания диссипативных структур краевой задачи (4), (5) при условиях (11) воспользуемся аналогом стандартного одночастотного метода [1], т.е. подставим в (4), (5) ряд по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$ вида

$$w = \sqrt{\varepsilon} w_1(x) + \varepsilon w_2(x) + \varepsilon^{3/2} w_3(x) + ..., \quad w_1(x) = \xi_0 \sin x, \tag{12}$$

где ξ_0— неизвестная «амплитуда». Приравнивая затем коэффициенты при ε и $\varepsilon^{3/2}$ в левой и правой частях получившегося выражения, для нахождения w_1 и w_3 приходим к краевым задачам:

$$-(1+\partial_x^2)^2 w_2 = 0, \qquad w_2|_{x=0,\pi} = \partial_x^2 w_2|_{x=0,\pi} = 0, \tag{13}$$

$$-(1+\partial_x^2) w_3 = (\delta^2-1)w_1 - a w_1^3, \quad w_3|_{x=0,\pi} = \partial_x^2 w_3|_{x=0,\pi} = 0. \tag{14}$$

Из краевой задачи (13) вытекает равенство

$$w_2 = \xi_1 \sin x, \tag{15}$$

где вещественная постоянная ξ_1, как и аналогичная ей постоянная ξ_0 из (12), пока произвольна. Учитывая вид w_2 и равенство $\partial_x^2 w_2 + \partial_x^4 w_2 = 0$, убеждаемся, что условие разрешимости второй из приведенных краевых задач имеет вид

$$a\frac{3}{4}\xi_0^3 - (\delta^2-1)\xi_0 = 0. \tag{16}$$

Фигурирующее в (11) ограничение $|\delta| < 1$ на параметр $|\delta|$ позволяет найти из уравнения разветвления (16) амплитуду

$$\xi_0(\delta) = \sqrt{\frac{4(\delta^2-1)}{3a}}\,. \tag{17}$$

Подставляя ее в равенства для w_1, полностью определяем первый член ряда (12). Что же касается следующей амплитуды ξ_1, то она находится из условия разрешимости аналогичной (13),(14) краевой задачи для $w_4(x)$, причем для нее получается уже линейное неоднородное уравнение вида $a\frac{3}{2}\xi_0^2\xi_1 = \varphi$. А так как в дальнейшем явная формула для ξ_1 нам не потребуется, то вычисление правой части φ этого уравнения опустим. Отметим только, что описанный алгоритм отыскания коэффициентов ряда (12) продолжается неограниченно, причем аддитивная добавка $\xi_{k-1}\sin x$, возникающая на k-м шаге, определяется через шаг из условия разрешимости краевой задачи для $w_{k+2}(x)$.

Строгий смысл изложенным формальным построениям придает следующее утверждение.

Теорема 1. *При выполнении условий (11) краевая задача (4) имеет две экспоненциально устойчивые диссипативные структуры:*

$$w_1(x,\delta,\varepsilon) = w_0(x,\delta,\varepsilon), \quad w_2(x,\delta,\varepsilon) = w_0(\pi - x,\delta,\varepsilon), \tag{18}$$

$$w_0(x,-1,\varepsilon) \,=\, w_0(x,1,\varepsilon) \,\equiv\, 0, \tag{19}$$

где функция $w_0(x,\delta,\varepsilon)$ допускает (в метрике пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^4(0,\pi)$) равномерное по δ из любого фиксированного отрезка $[\delta_1,\delta_2] \in (-1,1)$ асимптотическое представление (12),(17).

Сформулированная теорема представляет собой один из вариантов классической бифуркационной теоремы Тьюринга–Пригожина [1]. Ее обоснование существенно опирается на тот факт, что при условиях (11) краевая задача (4) в достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия имеет экспоненциально орбитально устойчивое одномерное инвариантное многообразие [1]

$$w = \xi \sin x + \Phi(\xi, \varepsilon, \delta), \tag{20}$$

параметризованное некоторой координатой $\xi : |\xi| \le \xi_0$, $\xi_0 = const > 0$. Здесь функция Φ со значениями в $\overset{\circ}{W}{}_2^4(0, \pi)$ достаточно гладко зависит от $(\xi, \sqrt{\varepsilon}, \delta)$ и такова, что $\Phi(0, \varepsilon, \delta) \equiv 0$, $\Phi'_\xi(0, 0, \delta) \equiv 0$.

Наличие многообразия (20) позволяет свести проблему поиска интересующих нас состояний равновесия к аналогичной одномерной задаче. Действительно, опираясь на стандартную технику построения нормальных форм, нетрудно убедиться, что после нормировок $\xi/\sqrt{\varepsilon} \to \xi, \varepsilon t \to t$ уравнение на указанном многообразии записывается в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = (1 - \delta^2)\xi + a\frac{3}{4}\xi^3 + \varepsilon\Omega(\xi, \varepsilon, \delta). \tag{21}$$

Здесь Ω – гладкая по совокупности переменных ξ, $\sqrt{\varepsilon}$, δ скалярная функция, удовлетворяющая тождеству $\Omega(0, \varepsilon, \delta) \equiv 0$. Как и отмеченное выше аналогичное свойство функции Φ, данное равенство означает, что точке $\xi = 0$ на многообразии (20) отвечает состояние равновесия $w = 0$ исходной задачи (4). Добавим еще, что в силу инвариантности последней относительно замены $w \to -w$ функции Φ, Ω являются нечетными по ξ.

На завершающем этапе обоснования введем в рассмотрение укороченную нормальную форму

$$\frac{d\xi}{dt} = (1 - \delta^2)\xi + a\frac{3}{4}\xi^3$$

и заметим, что двум экспоненциально устойчивым ее состояниям равновесия $\xi = \pm\xi_0(\delta)$ в полном уравнении (21) отвечают аналогичные состояния равновесия

$$\xi = \pm\xi(\varepsilon, \delta) : \quad \xi(0, \delta) = \xi_0(\delta), \quad \xi(\varepsilon, 1) = \xi(\varepsilon, -1) \equiv 0$$

(последние два тождества — следствия того факта, что при $\delta = \pm 1$ в уравнении (21) происходят бифуркации типа вилки, в результате которых и возникают эти состояния равновесия).

Возвращаясь к интересующей нас проблеме, подставим найденные чуть выше положения равновесия $\xi = \pm\xi(\varepsilon, \delta)$ в (20). В результате получим требуемые диссипативные структуры (18). Остается добавить, что асимптотическое представление (12) для $w_0(x, \delta, \varepsilon)$ вытекает из гладкости многообразия (20) и правой части уравнения (21) по $\sqrt{\varepsilon}$, а тождества (19) — из свойств $\xi(\varepsilon, \pm 1) \equiv 0$ функции $\xi(\varepsilon, \delta)$. Теорема 1 доказана.

Из установленной теоремы и принципа подобия немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 \in (0,1)$, что при любом фиксированном $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и при каждом натуральном n на соответствующем интервале (9) изменения параметра ν краевая задача (4) имеет пару диссипативных структур*

$$w_n^1(x,\nu,\varepsilon) = w_0(nx,\delta_n(\nu,\varepsilon),\varepsilon),\ \ w_n^2(x,\nu,\varepsilon) = w_0(\pi - nx,\delta_n(\nu,\varepsilon),\varepsilon), \tag{22}$$

где

$$\delta_n(\nu,\varepsilon) = (n^2\nu - 1)/\sqrt{\varepsilon}. \tag{23}$$

Отметим, что, как следует из равенств (19), состояния равновесия (22) обладают свойствами $w_n^1|_{\nu=\nu_{\pm}(\varepsilon)/n^2} \equiv w_n^2|_{\nu=\nu_{\pm}(\varepsilon)/n^2} \equiv 0$, т.е. возникают из нуля при $\nu = \nu_{\pm}(\varepsilon)/n^2$. Заметим еще, что поскольку в данной теореме параметры ε и ν независимы, то при фиксированном $\varepsilon > 0$ и при $\nu \to 0$ количество сосуществующих диссипативных структур (22) неограниченно увеличивается (имеет порядок $\sqrt{\varepsilon/\nu}$). При этом их состав постоянно обновляется, так как каждая пара состояния равновесия (22) «живет» лишь в своей ячейке (9). Тем самым, при $\nu \to 0$ наблюдается бесконечная последовательность бифуркаций их рождения и смерти.

3. Исследование устойчивости

Для того чтобы сформулировать основной результат данной работы, касающийся устойчивости построенных выше состояний равновесия (22), фиксируем произвольно два числа δ_1 и δ_2, удовлетворяющие неравенствам

$$-1/\sqrt{3} < \delta_1 < \delta_2 < 1/\sqrt{3}. \tag{24}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta_1,\delta_2) \in (0,1)$, что при всех $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ и при каждом $n \ge 1$ пара диссипативных структур (22), (23) краевой задачи (4) экспоненциально устойчива на отрезке*

$$[(1+\delta_1\sqrt{\varepsilon})/n^2, (1+\delta_2\sqrt{\varepsilon})/n^2] \tag{25}$$

изменения параметра ν.

Доказательство. Для обоснования приведенной теоремы фиксируем произвольно номер n и линеаризуем краевую задачу (4) на состоянии равновесия $w = w_n^1(x,\nu,\varepsilon)$. Подчеркнем, что случай $w = w_n^2(x,\nu,\varepsilon)$ не нуждается в отдельном рассмотрении, так как w_n^2 переходит в w_n^1 либо после замены $\pi - x \to x$ (при $n = 2k-1$, $k = 1,2,...$), либо в результате замены $w \to -w$ (при $n = 2k$, $k = 1,2,...$). Выполним, далее, в получившейся линейной краевой задаче замену $nx \to x$ и будем искать ее решения в форме Эйлера, т.е. в виде $w = = h(x)\exp(\lambda t)$. В результате для определения $h(x)$ и возможных значений $\lambda \in \mathbb{C}$ приходим к спектральной задаче

$$-(1 + (1+\delta\sqrt{\varepsilon})\partial_x^2)^2 h + (\varepsilon + f'(w_0(x,\delta,\varepsilon)))h = \lambda h, \tag{26}$$

$$h|_{x=0} = h|_{x=n\pi} = \partial_x^2 h|_{x=0} = \partial_x^2 h|_{x=n\pi} = 0, \tag{27}$$

где $w_0(x,\delta,\varepsilon)$ — функция из (7), а параметр δ задан равенством $\delta=\delta_n(\nu,\varepsilon)$(см. (23)). Итак, проблема устойчивости пары состояний равновесия (22), (23) свелась к анализу расположения спектра задачи (26), (27). В связи с этим обратим внимание, что в силу самосопряженности фигурирующего в левой части уравнения (26) дифференциального оператора этот спектр состоит из счетного числа действительных собственных значений.

Наряду с задачей (26), (27) введем в рассмотрение вспомогательную краевую задачу

$$-(1+\partial_x^2)^2h=\lambda h, h|_{x=0,n\pi}=\partial_x^2h|_{x=0,n\pi}=0,$$

получающуюся из исходной при $\varepsilon=0$. Непосредственная проверка показывает, что ее собственные значения имеют вид

$$\lambda(z)=-(1-z^2)^2,\ z=m/n,\ m=1,..., \tag{28}$$

а отвечающие им собственные функции задаются равенствами $w=\sin(mx/n)$, $m>0$. Из формул (28) вытекает, что равномерно по n все пределы при $\varepsilon\to0$ собственных значений задачи (26), (27) лежат на полуоси $(-\infty,0]$. Однако, в силу того, что $\lambda(z)|_{z=1}=0,$ заведомо существуют и так называемые критические точки спектра, стремящиеся к нулю при $\varepsilon\to0,n\to\infty$. Ясно, что именно от их знаков зависит в конечном итоге устойчивость интересующих нас состояний равновесия.

При построении асимптотики критических собственных значений существенно то обстоятельство, что при $\varepsilon=0$ отвечающие им собственные функции

$$h=\sin(1+z)x, z=k/n, k\in\mathbb{Z} \tag{29}$$

можно представить в виде

$$h=h_1(x)\cos(zx)+h_2(x)\sin(zx), \tag{30}$$
$$h_1(x)|_{x=0,\,\pi}=\partial_x^2h_1(x)|_{x=0,\,\pi},\ \ \partial_xh_2(x)|_{x=0,\,\pi}=\partial_x^3h_2(x)|_{x=0,\,\pi}. \tag{31}$$

Поэтому будем искать их в указанном виде и при $\varepsilon>0$. Подставляя выражение (30) в уравнение (26), получаем систему

$$\begin{gathered}-h_1-2[1+\delta\sqrt{\varepsilon}]\{\partial_x^2h_1-z^2h_1+2z\partial_xh_2\}-(1+\delta\sqrt{\varepsilon})^2\Big(\partial_x^4h_1-6z^2\partial_x^2h_1+z^4h_1+\\ +4z\partial_x^3h_2-4z^3\partial_xh_2\Big)+(f'(w_0)+\varepsilon)h_1=\lambda h_1,\\ -h_2-2(1+\delta\sqrt{\varepsilon})\{-2z\partial_xh_1+\partial_x^2h_2-z^2h_2\}-(1+\delta\sqrt{\varepsilon})^2\Big(-4z\partial_x^3h_1+4z^3\partial_xh_1+\\ +\partial_x^4h_2-6z^2\partial_x^2h_2+z^4h_2\Big)+(f'(w_0)+\varepsilon)h_2=\lambda h_2,\end{gathered} \tag{32}$$

которую дополним граничными условиями (31). Для удобства параметр z (принимающий, напомним, дискретные значения $\pm k/n, k=0,1,...$) будем здесь считать меняющимся непрерывно на некотором отрезке $|z|\le z_0$, где $z_0>0$ достаточно мало. То же самое относится и к параметру δ: считаем, что он независимо от n,ε,ν непрерывно меняется на отрезке $[\delta_1,\delta_2]$ (см. (24)).

Из очевидной связи краевых задач (26), (27) и (31), (32) следует, что проблема устойчивости диссипативных структур (22), (23) сводится к асимптотическому вычислению собственных значений задачи (31), (32), стремящихся к нулю при $\varepsilon, z \to 0$. Действительно, предположим, что мы уже нашли одно из таких собственных значений

$$\lambda = \lambda(z,\delta,\varepsilon) : |z| \le z_0,\ \delta \in [\delta_1, \delta_2],\ \lambda(0,\delta,0) \equiv 0 \tag{33}$$

и ему отвечает собственная функция с компонентами $h_j(x,z,\delta,\varepsilon)$, $j = 1,2$, для которых в силу (30) справедливы равенства вида $h_1(x,z,\delta,0) = \sin x$, $h_2(x,z,\delta,0) = \pm\cos x$. Тогда, продолжая h_1 с отрезка $0 \le x \le \pi$ на всю ось x по закону нечетности и 2π-периодичности, а h_2 — по четности и 2π-периодичности, получим набор критических собственных значений

$$\lambda = \lambda(z,\delta,\varepsilon)|_{z=\pm k/n,\,\delta=\delta_n(\nu,\varepsilon)},\ k = 0,1,...,k/n \le z_0 \tag{34}$$

исходной задачи (26), (27) и соответствующий набор собственных функций

$$h = \Big(h_1(x,z,\delta,\varepsilon)\cos zx - h_2(x,z,\delta,\varepsilon)\sin zx\Big)\Big|_{z=\pm k/n,\,\delta=\delta_n(\nu,\varepsilon)}. \tag{35}$$

При $\varepsilon = z = 0$ краевая задача (32), (31) распадается на две независимые краевые задачи

$$\begin{gathered} -(1+\partial_x^2)^2 h_1 = \lambda h_1,\ h_1|_{x=0,\pi} = \partial_x^2 h_1|_{x=0,\pi}, \\ -(1+\partial_x^2)^2 h_2 = \lambda h_2,\ \partial_x h_2|_{x=0,\pi} = \partial_x^3 h_1|_{x=0,\pi}, \end{gathered} \tag{36}$$

каждая из которых имеет простое нулевое собственное значение с собственными функциями $h_1^0(x) = \sin x$ и $h_2^0(x) = \cos x$ соответственно. Остальные же собственные значения задач (3.12) являются отрицательными. Обозначим через L дифференциальный оператор, порожденный левыми частями уравнений (32) в пространстве $L_2([0,\pi]; R^2)$ (область определения $E = W_2^4([0,\pi]; R^2)$ этого оператора состоит из вектор-функций $\mathrm{colon}(h_1; h_2)$, удовлетворяющих граничным условиям (31)). Из отмеченного чуть выше следует, что при всех достаточно малых ε и z оператор L имеет двумерное инвариантное подпространство

$$E_0(\varepsilon,z,\delta) = \mathrm{span}\{v_1(x,\varepsilon,z,\delta), v_2(x,\varepsilon,z,\delta)\} \subset E, \tag{37}$$

где $v_j(x,0,0,\delta) = e_j(x), j = 1,2,\ e_1(x) = \mathrm{colon}(\sin x, 0), e_2(x) = \mathrm{colon}(0, \cos x)$.

Инвариантность пространства (37) означает существование такой матрицы второго порядка $\Lambda(\varepsilon,z,\delta)$, $\Lambda(0,0,\delta) = 0$, что

$$LV = V\Lambda, \tag{38}$$

где по столбцам матрицы V размера 2×2 стоят базисные функции пространства $E_0(\varepsilon,z,\delta)$. Отметим также, что матрицы V и Λ можно выбрать гладко зависящими от $\sqrt{\varepsilon}, \delta, z$, так как от этих параметров гладко зависят коэффициенты уравнений (32).

Итак, проблема устойчивости состояний равновесия (22), (23) свелась к исследованию знаков собственных значений матрицы $\Lambda(\varepsilon,z,\delta)$, что, в свою очередь, требует знания нескольких членов ее тейлоровского разложения по $\sqrt{\varepsilon}$ и z. Для их нахождения подставим в равенство (38) ряды

$$\Lambda = \varepsilon\Lambda_1 + \sqrt{\varepsilon}z\Lambda_2 + z^2\Lambda_3 + ...,$$
$$V = V_0 + \sqrt{\varepsilon}V_1 + zV_2 + \varepsilon V_3 + \sqrt{\varepsilon}zV_4 + z^2V_5 + ...,$$

где

$$V_0 = [e_1(x), e_2(x)], \quad V_j = [v_{1j}, v_{2j}], \ j = 1, ..., 5;$$
$$v_{1j} = \mathrm{colon}(h_{1j}, 0), \quad v_2j = \mathrm{colon}(0, h_{2j}), \ j = 1, 3, 5;$$
$$v_{1j} = \mathrm{colon}(0, h_{1j}), \quad v_{2j} = \mathrm{colon}(h_{2j}, 0), \ j = 2, 4;$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} \lambda_5 & 0 \\ 0 & \lambda_6 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ и z, для определения функций h_{1j}, h_{2j}, $j = 1, ..., 5$ получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных краевых задач, из условий разрешимости которых находятся элементы матриц $\Lambda_j, j = 1, 2, 3$.

Действуя указанным выше способом, убеждаемся, что $h_{11} = h_{21} = h_{12} = h_{22} = 0$, а функции $h_{1j}, h_{2j}, j = 3, 4, 5$ являются решениями краевых задач ($L_0 = -(1 + \partial_x^2)^2$)

$$\begin{aligned}
L_0h_{13} + (1 - \delta^2 + 3a\xi_0^2(\delta)\sin^2 x)\sin x &= \lambda_1 \sin x, & h_{13}|_{x=0,\pi} &= \partial_x^2 h_{13}|_{x=0,\pi} = 0,\\
L_0h_{23} + (1 - \delta^2 + 3a\xi_0^2(\delta)\sin^2 x)\cos x &= \lambda_2 \cos x, & \partial_x h_{23}|_{x=0,\pi} &= \partial_x^3 h_{23}|_{x=0,\pi} = 0,\\
L_0h_{24} &= (\lambda_3 + 4\delta)\sin x, & h_{24}|_{x=0,\pi} &= \partial_x^2 h_{24}|_{x=0,\pi} = 0,\\
L_0h_{14} &= (\lambda_4 + 4\delta)\cos x, & \partial_x h_{14}|_{x=0,\pi} &= \partial_x^3 h_{14}|_{x=0,\pi} = 0,\\
L_0h_{15} &= (\lambda_5 + 4)\sin x, & h_{15}|_{x=0,\pi} &= \partial_x^2 h_{15}|_{x=0,\pi} = 0,\\
L_0h_{25} &= (\lambda_6 + 4)\cos x, & \partial_x h_{25}|_{x=0,\pi} &= \partial_x^3 h_{25}|_{x=0,\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Что же касается разрешимости этих задач, то она обеспечивается подходящим выбором постоянных $\lambda_j, j = 1, ..., 6$, а именно, равенствами

$$\lambda_1 = \frac{3a}{2}\xi_0^2(\delta), \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -4\delta, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = -4. \tag{39}$$

Полученной информации о матрице $\Lambda(\varepsilon, z, \delta)$ достаточно для анализа знаков ее определителя и следа при всех $\varepsilon, |z| \ll 1$. Действительно, функции $\mathrm{tr}\Lambda(\varepsilon, 0, \delta)$, $\det\Lambda(\varepsilon, 0, \delta)$, являются четными по z и $\det\Lambda(\varepsilon, 0, \delta) \equiv 0$, так как, во-первых, краевая задача (32), (31) не меняется при заменах $z \to -z, h_2 \to -h_2$; во-вторых, при $z = 0$ она имеет нулевое собственное значение с собственной функцией

$$\mathrm{colon}(0, \partial_x w_0(x, \delta, \varepsilon)), \tag{40}$$

где w_0 — функция, фигурирующая в (7). А отсюда и из формул (17), (39) заключаем, что

$$\mathrm{tr}\Lambda = -2(1 - \delta^2)\varepsilon - 8z^2 + O(\varepsilon^{3/2} + \sqrt{\varepsilon}z^2 + z^4), \tag{41}$$
$$\det\Lambda = 8z^2[(1 - 3\delta^2)\varepsilon + 2z^2 + O(\varepsilon^{3/2} + \sqrt{\varepsilon}z^2 + z^4)]. \tag{42}$$

Из тейлоровского разложения (41) вытекает отрицательность $\mathrm{tr}\Lambda$ при любом фиксированном $\delta \in (-1, 1)$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0, |z|$. Поэтому в анализе нуждается только знак функции $z^{-2}\det\Lambda$. Но при $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$ в силу выбора δ_1, δ_2 (см. (24)) первое слагаемое в квадратных скобках из формулы (42) положительно, что влечет неравенство $z^{-2}\det\Lambda > 0$ при всех $\varepsilon, |z| \ll 1$.

Подведем итог. Как следует из проведенного анализа, интересующие нас критические собственные значения задачи (26), (27) являются собственными значениями матриц

$$\Lambda_k = \Lambda(\varepsilon, z, \delta)|_{z=k/n,\,\delta=\delta_n(\nu,\varepsilon)}, \quad k = 0, \pm 1, ..., \pm k_0, \tag{43}$$

где k_0 – целая часть nz_0. Заметим, далее, что поскольку при значениях ν из отрезка (9) автоматически выполняется неравенство $\delta_n^2(\nu, \varepsilon) < 1/3$, то все эти матрицы оказываются гурвицевыми. Исключение составляет только матрица (43) с номером $k = 0$, одно собственное значение которой отрицательно, а другое равно нулю. Однако при обратном переходе от задачи (32), (31) к (26), (27) нулевое собственное значение пропадает, так как в силу (33), (29) и (40) ему отвечает нулевая собственная функция. Теорема 3 доказана.

Следует отметить, что отрезки (25), как и исходные интервалы (9), с ростом n начинают пересекаться во все большем числе. А это значит, что при любом фиксированном достаточно малом $\varepsilon > 0$ и при $\nu \to 0$ наряду с ростом общего числа сосуществующих диссипативных структур (22), (23) неограниченно увеличивается и количество устойчивых среди них. Точнее говоря, теорема 3 гарантирует сосуществование порядка $(\delta_2 - \delta_1)/(2\sqrt{\nu})$ устойчивых состояний равновесия. Тем самым, установлено, что при $\nu \to 0$ в рамках краевой задачи (2) реализуется хорошо известное явление буферности.

Литература

1. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.*, Явление буферности в системах, близких к двумерным гамильтоновым // Тр. Института матем. и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, №1. С. 109-140.

The buffer phenomenon in the generalization of the Swift–Hohenberg equation

Keywords: buffer phenomenon, multistability, hydrodynamics,asymptotic methods

The generalization of the Swift–Hohenberg equation is considered in this article. We establish that the number of steady-state solutions unrestrictedly grows up when the delay tends to infinity and other parameters are correctly fixed.

Сведения об авторе: Сандуляк Дарья Владимировна,
Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова,
аспирант, ассистент кафедры диф. уравнений, младший научный сотрудник.