Модел. и анализ информ. систем. Т. **17**, № **1** (2010) 93–116

УДК 517.977.5 + 517.928.2

Приближение нулевого порядка асимптотики решения сингулярно возмущённой линейно-квадратичной задачи управления с разрывными коэффициентами

Курина Г.А.[1], Нгуен Т.Х.

Воронежская государственная лесотехническая академия

e-mail: kurina@math.vsu.ru, nthoai0682@yahoo.com

получена 5 марта 2010

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача оптимального управления, сингулярные возмущения, разрывные коэффициенты, асимптотическое разложение

Приводится формализм построения приближения нулевого порядка для асимптотического решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с разрывными коэффициентами, основанный на непосредственной подстановке в условие задачи постулируемого асимптотического разложения решения погранслойного типа и определении четырёх задач оптимального управления для нахождения членов асимптотики. Устанавливается однозначная разрешимость задач, решениями которых являются члены асимптотического разложения решения нулевого порядка. Рассматривается иллюстративный пример.

1. Постановка задачи. При построении асимптотических разложений решений задач оптимального управления с малым параметром в основном используются асимптотики решений краевых задач, вытекающих из условий оптимальности управления. Второй подход к построению асимптотики решения задач оптимального управления с малым параметром, который назван в [1] (см. также [2]) прямой схемой, заключается в непосредственной подстановке в условия задачи постулируемого асимптотического разложения решения и определении серии задач для нахождения коэффициентов асимптотики. При таком подходе для нахождения членов асимптотического разложения решения можно использовать пакеты программ для решения задач оптимального управления. Обзор работ, посвященных применению прямой схемы в различных задачах, приведен в [3].

[1]Работа поддержана РФФИ (код проекта 08 - 06 - 00302).

В настоящей работе рассматривается задача P_ε, состоящая в минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\left\langle\begin{pmatrix}\overset{(j)}{x}\\ \overset{(j)}{y}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overset{(j)}{W}_1(t,\varepsilon) & \overset{(j)}{W}_2(t,\varepsilon)\\ \overset{(j)}{W}_2(t,\varepsilon)' & \overset{(j)}{W}_3(t,\varepsilon)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overset{(j)}{x}\\ \overset{(j)}{y}\end{pmatrix}\right\rangle+\right.$$
$$\left.+\left\langle\overset{(j)}{u},\overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)\overset{(j)}{u}\right\rangle\right\}dt \tag{1}$$

на траекториях системы

$$\begin{aligned}\dot{\overset{(j)}{x}}&=\overset{(j)}{A}_1(t,\varepsilon)\overset{(j)}{x}+\overset{(j)}{A}_2(t,\varepsilon)\overset{(j)}{y}+\overset{(j)}{B}_1(t,\varepsilon)\overset{(j)}{u},\\ \varepsilon\dot{\overset{(j)}{y}}&=\overset{(j)}{A}_3(t,\varepsilon)\overset{(j)}{x}+\overset{(j)}{A}_4(t,\varepsilon)\overset{(j)}{y}+\overset{(j)}{B}_2(t,\varepsilon)\overset{(j)}{u},\quad t_{j-1}\le t\le t_j,\ \ j=1,2,\end{aligned}\tag{2}$$

при условиях

$$\begin{aligned}&\overset{(1)}{x}(0,\varepsilon)=x^0,\ \ \overset{(1)}{y}(0,\varepsilon)=y^0,\\ &\overset{(2)}{x}(t_1,\varepsilon)=\overset{(1)}{x}(t_1,\varepsilon),\ \ \overset{(2)}{y}(t_1,\varepsilon)=\overset{(1)}{y}(t_1,\varepsilon).\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь $0=t_0<t_1<t_2=T$, значения $t_j (j=0,1,2)$ фиксированы; $\overset{(j)}{x}=\overset{(j)}{x}(t,\varepsilon)\in\mathbb{R}^n$, $\overset{(j)}{y}=\overset{(j)}{y}(t,\varepsilon)\in\mathbb{R}^m$, $\overset{(j)}{u}=\overset{(j)}{u}(t,\varepsilon)\in\mathbb{R}^r$, штрих означает транспонирование, угловые скобки означают скалярное произведение в соответствующих пространствах, $\varepsilon>0$ – малый параметр, точка сверху означает дифференцирование по t, соответствующих размеров матрицы $\overset{(j)}{W}_i(t,\varepsilon)(i=\overline{1,3})$, $\overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)$, $\overset{(j)}{A}_i(t,\varepsilon)(i=\overline{1,4})$, $\overset{(j)}{B}_i(t,\varepsilon)(i=1,2)$, являются достаточно гладкими при всех $t\in[t_{j-1},t_j]$ и $\varepsilon\ge 0$, матрицы $\overset{(j)}{\mathbb{W}}(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\overset{(j)}{W}_1(t,\varepsilon) & \overset{(j)}{W}_2(t,\varepsilon)\\ \overset{(j)}{W}_2(t,\varepsilon)' & \overset{(j)}{W}_3(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$ и $\overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)$ симметричны, а матрицы $\overset{(j)}{\mathbb{W}}(t,0)$ и $\overset{(j)}{R}(t,0)$ положительно определены при всех $t\in[t_{j-1},t_j]$, $j=1,2$.

В качестве допустимых управлений $u(t,\varepsilon)=\begin{cases}\overset{(1)}{u}(t,\varepsilon),t\in[t_0,t_1],\\ \overset{(2)}{u}(t,\varepsilon),t\in[t_1,t_2]\end{cases}$ выбираются кусочно-непрерывные функции. При этом для $\varepsilon>0$ рассматриваются непрерывные соответствующие траектории

$$x(t,\varepsilon)=\begin{cases}\overset{(1)}{x}(t,\varepsilon), & t\in[t_0,t_1],\\ \overset{(2)}{x}(t,\varepsilon), & t\in[t_1,t_2]\end{cases},\quad y(t,\varepsilon)=\begin{cases}\overset{(1)}{y}(t,\varepsilon), & t\in[t_0,t_1],\\ \overset{(2)}{y}(t,\varepsilon), & t\in[t_1,t_2],\end{cases}$$

являющиеся решением задачи (2) - (3). При $\varepsilon=0$ траектория $y(t,\varepsilon)$ будет иметь в общем случае разрыв при $t=t_1$.

Отметим, что многие содержательные инженерно-технические задачи формулируются в терминах разрывных систем (см., например, [4]). Асимптотика решений сингулярно-возмущенных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений в случае, когда вырожденное уравнение имеет разрывное решение, построена, например, в [5, 6].

Далее, используя прямую схему применения метода пограничных функций (см., например, [7]), будет приведён формализм построения приближения нулевого порядка для асимптотического решения задачи (1) – (3). Также будет установлена однозначная разрешимость задач, решениями которых являются члены асимптотического разложения решения нулевого порядка, и рассмотрен иллюстративный пример.

2. Формализм построения приближения нулевого порядка решения задачи $\boldsymbol{P}_\varepsilon$. Обозначим через $\overset{(j)}{\lambda}_i(t)$ собственные значения матриц $\overset{(j)}{A}_{40}(t)$. Предположим, что выполнено условие

1^0. $\mathrm{Re}\,\overset{(j)}{\lambda}_i(t) < 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = 1, 2$, $t \in [t_{j-1}, t_j]$.

Следуя прямой схеме [1, 2] и методу пограничных функций [7], решение $(\overset{(j)}{u}, \overset{(j)}{z}) = (\overset{(j)}{u}, (\overset{(j)}{x}{}', \overset{(j)}{y}{}')')$, где $\overset{(j)}{z} = (\overset{(j)}{x}{}', \overset{(j)}{y}{}')'$, $j = 1, 2$, возмущенной задачи P_ε будем искать в виде разложения по целым неотрицательным степеням ε:

$$\begin{gathered}
\overset{(j)}{z}(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i \overset{(j)}{z}_i(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i (\overset{(j)}{\overline{z}}_i(t) + \overset{(j)}{\Pi}_i z(\tau_{j-1}) + \overset{(j)}{Q}_i z(\tau_j)),\\
\overset{(j)}{u}(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i \overset{(j)}{u}_i(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i (\overset{(j)}{\overline{u}}_i(t) + \overset{(j)}{\Pi}_i u(\tau_{j-1}) + \overset{(j)}{Q}_i u(\tau_j)),\\
t_{j-1} \leq t \leq t_j,\ j = 1, 2,
\end{gathered} \tag{4}$$

где символы $\overset{(j)}{\Pi}, j = 1, 2$, означают функции погранслоя экспоненциального типа вблизи левых концов промежутков $[0, t_1]$ и $[t_1, T]$, а $\overset{(j)}{Q}, j = 1, 2,$ – функции погранслоя экспоненциального типа вблизи правых концов этих же промежутков, $\tau_0 = \frac{t}{\varepsilon}$, $\tau_1 = \frac{t-t_1}{\varepsilon}$, $\tau_2 = \frac{t-T}{\varepsilon}$.

Матричные коэффициенты в (1), (2) разложим в ряды по целым неотрицательным степеням ε. Коэффициент при ε^k в разложении некоторой матрицы $D(t,\varepsilon)$ по степеням ε будем обозначать через $D_k(t)$.

Подставим (4) в (1) – (3), представим подынтегральную функцию в (1) и правые части в (2) в виде асимптотической суммы слагаемых, зависящих от $t, \tau_0, \tau_1, \tau_2$. Учитывая экспоненциальный характер функций погранслоя, при интегрировании в (1) выражений, зависящих от аргументов τ_j, $j = 0, 1, 2$, перейдем к интегрированию по этим переменным по соответствующим бесконечным промежуткам. Затем в (2), (3) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε, отдельно зависящие от $t, \tau_0, \tau_1, \tau_2$. Получим соотношения для членов рядов в (4). Минимизируемый функционал (1) представим в виде разложения

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i J_i. \tag{5}$$

Ниже будут получены задачи оптимального управления, из которых можно найти члены разложений (4) при $i = 0$.

2.1. Задача для определения членов нулевого порядка регулярной части асимптотики. Для коэффициентов погранслойных рядов в разложении (4) для $x(t,\varepsilon)$ при $i=0$ получаем уравнения

$$\frac{d\overset{(j)}{\Pi}_0 x}{d\tau_{j-1}} = 0, \quad \frac{d\overset{(j)}{Q}_0 x}{d\tau_j} = 0. \tag{6}$$

Учитывая экспоненциальный характер функций погранслоя, а именно, функции погранслоя должны удовлетворять оценкам:

$$\|\overset{(j)}{\Pi}_0 z(\tau_{j-1})\| \le c e^{-\gamma\tau_{j-1}}, \quad \|\overset{(j)}{Q}_0 z(\tau_j)\| \le c e^{\gamma\tau_j}, \quad i \ge 0, \quad j=1,2, \tag{7}$$

где c, γ – некоторые положительные постоянные, не зависящие от τ_0, τ_1, τ_2, из (6) получаем равенства

$$\overset{(j)}{\Pi}_0 x(\tau_{j-1}) \equiv 0, \ \overset{(j)}{Q}_0 x(\tau_j) \equiv 0. \tag{8}$$

Подставляя разложения (4), (5) в равенства (1) – (3), приравнивая коэффициенты при ε^0, причем в (2) приравнивая только коэффициенты, зависящие от t, используя соотношения (7), (8) и отбрасывая условия для $y(\cdot,\varepsilon)$, получаем для определения пары функций $(\overset{(j)}{\overline{u}}_0(t), \overset{(j)}{\overline{z}}_0(t))$ задачу $\overline{P}_0$, которая заключается в минимизации функционала

$$J_0(\overline{u}_0) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\left\langle \overset{(j)}{\overline{z}}_0, \overset{(j)}{\mathbb{W}}_0(t)\overset{(j)}{\overline{z}}_0\right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{\overline{u}}_0, \overset{(j)}{R}_0(t)\overset{(j)}{\overline{u}}_0\right\rangle\right) dt \tag{9}$$

на траекториях системы

$$\begin{aligned} \dot{\overset{(j)}{\overline{x}}}_0 &= \overset{(j)}{A}_{10}(t)\overset{(j)}{\overline{x}}_0 + \overset{(j)}{A}_{20}(t)\overset{(j)}{\overline{y}}_0 + \overset{(j)}{B}_{10}(t)\overset{(j)}{\overline{u}}_0, \\ 0 &= \overset{(j)}{A}_{30}(t)\overset{(j)}{\overline{x}}_0 + \overset{(j)}{A}_{40}(t)\overset{(j)}{\overline{y}}_0 + \overset{(j)}{B}_{20}(t)\overset{(j)}{\overline{u}}_0, \quad t_{j-1} \le t \le t_j, \quad j=1,2, \end{aligned} \tag{10}$$

при условиях

$$\overset{(1)}{\overline{x}}_0(0) = x^0, \quad \overset{(2)}{\overline{x}}_0(t_1) = \overset{(1)}{\overline{x}}_0(t_1). \tag{11}$$

Здесь $\overset{(j)}{\overline{z}}_0 = (\overset{(j)}{\overline{x}}{}_0', \overset{(j)}{\overline{y}}{}_0')'$, $j=1,2$.

Установим однозначную разрешимость задачи $\overline{P}_0$.

Утверждение 1 (Достаточное условие оптимальности управления для задачи $\overline{P}_0$). *Управление $\overline{u}_{0*}(\cdot)$, составленное из функций $\overset{(j)}{\overline{u}}_{0*}(\cdot)$, задаваемых формулами*

$$\overset{(j)}{\overline{u}}_{0*} = \overset{(j)}{R}_0(t)^{-1}\left(\overset{(j)}{B}_{10}(t)'\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 + \overset{(j)}{B}_{20}(t)'\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0\right), \quad t_{j-1} \le t \le t_j, \quad j=1,2, \tag{12}$$

где $\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0(\cdot)$, $\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0(\cdot)$ *– решение задачи*

$$\begin{gathered}
\dot{\overset{(j)}{\overline{\varphi}}}_0 = \overset{(j)}{W}_{10}(t)\overset{(j)}{\overline{x}}_{0*} + \overset{(j)}{W}_{20}(t)\overset{(j)}{\overline{y}}_{0*} - \overset{(j)}{A}_{10}(t)'\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 - \overset{(j)}{A}_{30}(t)'\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0,\\
0 = \overset{(j)}{W}_{20}(t)'\overset{(j)}{\overline{x}}_{0*} + \overset{(j)}{W}_{30}(t)\overset{(j)}{\overline{y}}_{0*} - \overset{(j)}{A}_{20}(t)'\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 - \overset{(j)}{A}_{40}(t)'\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0,\ \ t_{j-1} \le t \le t_j,\ \ j = 1, 2,
\end{gathered} \tag{13}$$

$$\overset{(2)}{\overline{\varphi}}_0(T) = 0,\ \ \overset{(1)}{\overline{\varphi}}_0(t_1) = \overset{(2)}{\overline{\varphi}}_0(t_1), \tag{14}$$

$\overset{(j)}{\overline{x}}_{0*}(\cdot), \overset{(j)}{\overline{y}}_{0*}(\cdot)$ *– траектория системы* (10), (11), *соответствующая* $\overset{(j)}{\overline{u}}_0 = \overset{(j)}{\overline{u}}_{0*}$, *является оптимальным управлением для задачи* (9) - (11).

Доказательство. Пусть $\overline{u}_0(\cdot)$ – произвольное допустимое управление, $\overline{x}_0(\cdot)$, $\overline{y}_0(\cdot)$ – соответствующая ему траектория – решение задачи (10), (11). Запишем выражение для приращения функционала (9) в следующем виде:

$$\begin{gathered}
J_0(\overline{u}_0) - J_0(\overline{u}_{0*}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\left\langle \begin{pmatrix} \overset{(j)}{\overline{x}}_0 - \overset{(j)}{\overline{x}}_{0*} \\ \overset{(j)}{\overline{y}}_0 - \overset{(j)}{\overline{y}}_{0*} \end{pmatrix}, \overset{(j)}{\mathbb{W}}_0(t)\begin{pmatrix} \overset{(j)}{\overline{x}}_0 - \overset{(j)}{\overline{x}}_{0*} \\ \overset{(j)}{\overline{y}}_0 - \overset{(j)}{\overline{y}}_{0*} \end{pmatrix}\right\rangle + \right.\\
\left. + \left\langle \overset{(j)}{\overline{u}}_0 - \overset{(j)}{\overline{u}}_{0*}, \overset{(j)}{R}_0(t)(\overset{(j)}{\overline{u}}_0 - \overset{(j)}{\overline{u}}_{0*})\right\rangle\right\} dt + \Delta,
\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\Delta = \sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\left\langle \begin{pmatrix} \overset{(j)}{\overline{x}}_0 - \overset{(j)}{\overline{x}}_{0*} \\ \overset{(j)}{\overline{y}}_0 - \overset{(j)}{\overline{y}}_{0*} \end{pmatrix}, \overset{(j)}{\mathbb{W}}_0(t)\begin{pmatrix} \overset{(j)}{\overline{x}}_{0*} \\ \overset{(j)}{\overline{y}}_{0*} \end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{\overline{u}}_0 - \overset{(j)}{\overline{u}}_{0*}, \overset{(j)}{R}_0(t)\overset{(j)}{\overline{u}}_{0*}\right\rangle\right\} dt.$$

Для краткости аргументы у переменных $\overset{(j)}{\overline{z}}_0$, $\overset{(j)}{\overline{z}}_{0*}$, $\overset{(j)}{\overline{u}}_0$, $\overset{(j)}{\overline{u}}_{0*}$, $\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0$, $\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0$ будем опускать.

Преобразуем выражение для Δ, используя (13), (12), (10). Имеем цепочку равенств

$$\begin{gathered}
\Delta = \sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\left\langle \begin{pmatrix} \overset{(j)}{\overline{x}}_0 - \overset{(j)}{\overline{x}}_{0*} \\ \overset{(j)}{\overline{y}}_0 - \overset{(j)}{\overline{y}}_{0*} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{\overset{(j)}{\overline{\varphi}}}_0 + \overset{(j)}{A}_{10}(t)'\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 + \overset{(j)}{A}_{30}(t)'\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0, \\ \overset{(j)}{A}_{20}(t)'\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 + \overset{(j)}{A}_{40}(t)'\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0 \end{pmatrix}\right\rangle + \right.\\
\left. + \left\langle \overset{(j)}{\overline{u}}_0 - \overset{(j)}{\overline{u}}_{0*}, \overset{(j)}{B}_{10}(t)'\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 + \overset{(j)}{B}_{20}(t)'\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0\right\rangle\right\} dt = \\
= \sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\left\langle \begin{pmatrix} \overset{(j)}{\overline{x}}_0 - \overset{(j)}{\overline{x}}_{0*} \\ \overset{(j)}{\overline{y}}_0 - \overset{(j)}{\overline{y}}_{0*} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{\overset{(j)}{\overline{\varphi}}}_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} \dot{\overset{(j)}{\overline{x}}}_0 - \dot{\overset{(j)}{\overline{x}}}_{0*} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 \\ \overset{(j)}{\overline{\psi}}_0 \end{pmatrix}\right\rangle\right\} dt = \\
= \sum_{j=1}^{2}\left\langle \overset{(j)}{\overline{x}}_0 - \overset{(j)}{\overline{x}}_{0*}, \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0\right\rangle\Bigg|_{t_{j-1}}^{t_j}.
\end{gathered}$$

Отсюда, учитывая (11) и (14), получаем, что $\Delta = 0$.

Так как матрицы $\overset{(j)}{\mathbb{W}}_0(t)$ и $\overset{(j)}{R}_0(t)$ положительно определены при всех $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2$, то из соотношения (15) и последнего равенства получаем, что $\overline{u}_{0*}(\cdot)$ является оптимальным управлением для задачи (9) – (11). ■

Утверждение 2 (Необходимое условие оптимальности управления для задачи $\overline{P}_0$). *Оптимальное управление* $\overline{u}_{0*}(\cdot)$ *для задачи* (9) – (11) *составлено из функций* $\overset{(j)}{\overline{u}}_{0*}(\cdot)$, $j = 1, 2$, *заданных формулами* (12), *где* $\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0(\cdot)$, $\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0(\cdot)$ – *решение системы* (13) *при условиях* (14).

Доказательство. При условии 1^0 из второго уравнения системы (10) находим

$$\overset{(j)}{\overline{y}}_0 = -\overset{(j)}{A}_{40}(t)^{-1}\Big(\overset{(j)}{A}_{30}(t)\overset{(j)}{\overline{x}}_0 + \overset{(j)}{B}_{20}(t)\overset{(j)}{\overline{u}}_0\Big), \quad t_{j-1} \le t \le t_j, \quad j = 1, 2. \tag{16}$$

Подставив эти выражения для $\overset{(j)}{\overline{y}}_0$ в функционал (9) и в первое уравнение системы (10), получаем задачу минимизации функционала

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\left\langle\begin{pmatrix}\overset{(j)}{\overline{x}}_0\\ -\overset{(j)}{A}_{40}(t)^{-1}\Big(\overset{(j)}{A}_{30}(t)\overset{(j)}{\overline{x}}_0 + \overset{(j)}{B}_{20}(t)\overset{(j)}{\overline{u}}_0\Big)\end{pmatrix},\right.\right.\\ \left.\left.\overset{(j)}{\mathbb{W}}_0(t)\begin{pmatrix}\overset{(j)}{\overline{x}}_0\\ -\overset{(j)}{A}_{40}(t)^{-1}\Big(\overset{(j)}{A}_{30}(t)\overset{(j)}{\overline{x}}_0 + \overset{(j)}{B}_{20}(t)\overset{(j)}{\overline{u}}_0\Big)\end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle\overset{(j)}{\overline{u}}_0, \overset{(j)}{R}_0(t)\overset{(j)}{\overline{u}}_0\right\rangle\right\}dt\end{gathered} \tag{17}$$

на траекториях системы

$$\begin{gathered}\dot{\overset{(j)}{\overline{x}}}_0 = \Big(\overset{(j)}{A}_{10}(t) - \overset{(j)}{A}_{20}(t)\overset{(j)}{A}_{40}(t)^{-1}\overset{(j)}{A}_{30}(t)\Big)\overset{(j)}{\overline{x}}_0 + \\ + \Big(\overset{(j)}{B}_{10}(t) - \overset{(j)}{A}_{20}(t)\overset{(j)}{A}_{40}(t)^{-1}\overset{(j)}{B}_{20}(t)\Big)\overset{(j)}{\overline{u}}_0, \quad t_{j-1} \le t \le t_j, \quad j = 1, 2,\end{gathered} \tag{18}$$

при условиях (11).

Необходимое условие оптимальности управления в форме принципа максимума для задачи с разрывными правыми частями вида (17), (18), (11) приводится, например, в [8], с. 60 – 63. Пусть сопряженная переменная для задачи (17), (18), (11) составлена из функций $\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0$, а оптимальная траектория из функций $\overset{(j)}{\overline{x}}_{0*}, j = 1, 2$. Используя обозначения (16) при $\overset{(j)}{\overline{x}}_0 = \overset{(j)}{\overline{x}}_{0*}$, $\overset{(j)}{\overline{u}}_0 = \overset{(j)}{\overline{u}}_{0*}$, $\overset{(j)}{\overline{y}}_0 = \overset{(j)}{\overline{y}}_{0*}, j = 1, 2$, и

$$\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0 = (\overset{(j)}{A}_{40}(t)')^{-1}\Big(\overset{(j)}{W}_{20}(t)'\overset{(j)}{\overline{x}}_{0*} + \overset{(j)}{W}_{30}(t)\overset{(j)}{\overline{y}}_{0*} - \overset{(j)}{A}_{20}(t)'\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0\Big),$$

из [8] получаем необходимое условие оптимальности управления для задачи (9) – (11) в виде (12) – (14).■

Утверждение 3. *Задача* $\overline{P}_0$ *однозначно разрешима.*

Доказательство. В силу Утверждений 1, 2 для доказательства однозначной разрешимости задачи $\overline{P}_0$ достаточно установить однозначную разрешимость при $x^0 = 0$

системы, состоящей из (10) при $\overset{(j)}{\overline{u}}_0 = \overset{(j)}{\overline{u}}_{0*}$, а также из (12), (11), (13), (14). В (13) $\overset{(j)}{\overline{x}}_{0*}$, $\overset{(j)}{\overline{y}}_{0*}$ обозначаем соответственно через $\overset{(j)}{\overline{x}}_0$, $\overset{(j)}{\overline{y}}_0$.

Систему (10) умножаем скалярно на вектор $\begin{pmatrix} \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 \\ \overset{(j)}{\overline{\psi}}_0 \end{pmatrix}$, а (13) – на $\begin{pmatrix} \overset{(j)}{\overline{x}}_0 \\ \overset{(j)}{\overline{y}}_0 \end{pmatrix}$. Сложив результаты, проинтегрируем получившиеся выражения по соответствующим промежуткам $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2$. Складывая найденные выражения, имеем

$$\sum_{j=1}^{2} \left\langle \overset{(j)}{\overline{x}}_0, \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 \right\rangle \Bigg|_{t_{j-1}}^{t_j} = \sum_{j=1}^{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} \overset{(j)}{\overline{x}}_0 \\ \overset{(j)}{\overline{y}}_0 \end{pmatrix}, \overset{(j)}{\mathbb{W}}_0(t) \begin{pmatrix} \overset{(j)}{\overline{x}}_0 \\ \overset{(j)}{\overline{y}}_0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 \\ \overset{(j)}{\overline{\psi}}_0 \end{pmatrix}, \overset{(j)}{\mathbb{S}}_0(t) \begin{pmatrix} \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 \\ \overset{(j)}{\overline{\psi}}_0 \end{pmatrix} \right\rangle \right\} dt,$$

где $\overset{(j)}{\mathbb{S}}_0(t)$ является коэффициентом при ε^0 в разложении по степеням ε матрицы

$$\overset{(j)}{\mathbb{S}}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \overset{(j)}{S}_1(t,\varepsilon) & \overset{(j)}{S}_2(t,\varepsilon) \\ \overset{(j)}{S}_2(t,\varepsilon)' & \overset{(j)}{S}_3(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$\overset{(j)}{S}_1(t,\varepsilon) = \overset{(j)}{B}_1(t,\varepsilon)\overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)^{-1}\overset{(j)}{B}_1(t,\varepsilon)'$, $\overset{(j)}{S}_2(t,\varepsilon) = \overset{(j)}{B}_1(t,\varepsilon)\overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)^{-1}\overset{(j)}{B}_2(t,\varepsilon)'$, $\overset{(j)}{S}_3(t,\varepsilon) = \overset{(j)}{B}_2 (t,\varepsilon)\overset{(j)}{R}(t,\varepsilon)^{-1}\overset{(j)}{B}_2(t,\varepsilon)'$, $j = 1, 2$.

Отсюда, учитывая краевые условия ($\overset{(1)}{\overline{x}}_0(0) = 0$, $\overset{(2)}{\overline{\varphi}}_0(T) = 0$), условия непрерывности (11), (14), положительную определённость $\overset{(j)}{\mathbb{W}}_0(t)$ и неотрицательную определённость $\overset{(j)}{\mathbb{S}}_0(t)$, получаем $\overset{(j)}{\overline{x}}_0 \equiv 0$, $\overset{(j)}{\overline{y}}_0 \equiv 0$, $j = 1, 2$. Тогда из (13), (14) с учётом условия 1^0 следует, что $\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 \equiv 0$, $\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0 \equiv 0$, $j = 1, 2$.■

2.2. Задачи для определения членов нулевого порядка погранслойной части асимптотики. Учитывая экспоненциальный характер функций погранслоя, запишем выражение для J_1 из (5).

$$J_1 = \sum_{j=1}^{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\{ \left\langle \overset{(j)}{\overline{z}}_1, \overset{(j)}{\mathbb{W}}_0 \overset{(j)}{\overline{z}}_0 \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \overset{(j)}{\overline{z}}_0, \overset{(j)}{\mathbb{W}}_1 \overset{(j)}{\overline{z}}_0 \right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{\overline{u}}_1, \overset{(j)}{R}_0 \overset{(j)}{\overline{u}}_0 \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \overset{(j)}{\overline{u}}_0, \overset{(j)}{R}_1 \overset{(j)}{\overline{u}}_0 \right\rangle \right\} dt +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2} \int_0^{+\infty} \left\{ \left\langle \overset{(j)}{\Pi}_0 z, \overset{(j)}{\mathbb{W}}_0(t_{j-1}) \overset{(j)}{\overline{z}}_0(t_{j-1}) \right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{\Pi}_0 u, \overset{(j)}{R}_0(t_{j-1}) \overset{(j)}{\overline{u}}_0(t_{j-1}) \right\rangle \right\} d\tau_{j-1} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2} \int_{-\infty}^{0} \left\{ \left\langle \overset{(j)}{Q}_0 z, \overset{(j)}{\mathbb{W}}_0(t_j) \overset{(j)}{\overline{z}}_0(t_j) \right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{Q}_0 u, \overset{(j)}{R}_0(t_j) \overset{(j)}{\overline{u}}_0(t_j) \right\rangle \right\} d\tau_j +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \int_0^{+\infty} \left\{ \left\langle \overset{(j)}{\Pi}_0 z, \overset{(j)}{\mathbb{W}}_0(t_{j-1}) \overset{(j)}{\Pi}_0 z \right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{\Pi}_0 u, \overset{(j)}{R}_0(t_{j-1}) \overset{(j)}{\Pi}_0 u \right\rangle \right\} d\tau_{j-1} +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \int_{-\infty}^{0} \left\{ \left\langle \overset{(j)}{Q}_0 z, \overset{(j)}{\mathbb{W}}_0(t_j) \overset{(j)}{Q}_0 z \right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{Q}_0 u, \overset{(j)}{R}_0(t_j) \overset{(j)}{Q}_0 u \right\rangle \right\} d\tau_j.$$

Предположим, что задача $\overline{P}_0$ решена. Значит, найдены функции $\overset{(j)}{\overline{u}}_0$, $\overset{(j)}{\overline{z}}_0$, $\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0$, $\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0$, $j = 1, 2$. Преобразуем в подынтегральном выражении для J_1 сумму функций, зависящих от аргумента t. Отбрасывая в ней известные члены, используя (13), (12) (переобозначаем $\overset{(j)}{\overline{z}}_0 = \overset{(j)}{\overline{z}}_{0*}$, $\overset{(j)}{\overline{u}}_0 = \overset{(j)}{\overline{u}}_{0*}$, $j = 1, 2$), формулу интегрирования по частям и равенства

$$\dot{\overset{(j)}{\overline{x}}}_1 = \overset{(j)}{A}_{10}(t)\overset{(j)}{\overline{x}}_1 + \overset{(j)}{A}_{20}(t)\overset{(j)}{\overline{y}}_1 + \overset{(j)}{B}_{10}(t)\overset{(j)}{\overline{u}}_1 + \overset{(j)}{A}_{11}(t)\overset{(j)}{\overline{x}}_0 + \overset{(j)}{A}_{21}(t)\overset{(j)}{\overline{y}}_0 + \overset{(j)}{B}_{11}(t)\overset{(j)}{\overline{u}}_0,$$
$$\dot{\overset{(j)}{\overline{y}}}_0 = \overset{(j)}{A}_{30}(t)\overset{(j)}{\overline{x}}_1 + \overset{(j)}{A}_{40}(t)\overset{(j)}{\overline{y}}_1 + \overset{(j)}{B}_{20}(t)\overset{(j)}{\overline{u}}_1 + \overset{(j)}{A}_{31}(t)\overset{(j)}{\overline{x}}_0 + \overset{(j)}{A}_{41}(t)\overset{(j)}{\overline{y}}_0 + \overset{(j)}{B}_{21}(t)\overset{(j)}{\overline{u}}_0,$$
$$t_{j-1} \le t \le t_j, \quad j = 1, 2,$$

получаем

$$\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\left\langle \overset{(j)}{\overline{z}}_1, \overset{(j)}{\mathbb{W}}_0\overset{(j)}{\overline{z}}_0\right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{\overline{u}}_1, \overset{(j)}{R}_0\overset{(j)}{\overline{u}}_0\right\rangle\right\} dt =$$
$$= \sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\left\langle \overset{(j)}{\overline{z}}_1, \begin{pmatrix} \dot{\overset{(j)}{\overline{\varphi}}}_0 + \overset{(j)}{A}{}'_{10}\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 + \overset{(j)}{A}{}'_{30}\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0 \\ \overset{(j)}{A}{}'_{20}\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 + \overset{(j)}{A}{}'_{40}\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0 \end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{\overline{u}}_1, \overset{(j)}{B}{}'_{10}\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0 + \overset{(j)}{B}{}'_{20}\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0\right\rangle\right\} dt =$$
$$= \sum_{j=1}^{2}\left\langle \overset{(j)}{\overline{x}}_1(t), \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0(t)\right\rangle\Bigg|_{t_{j-1}}^{t_j} + a_1,$$

где

$$a_1 = -\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\{\left\langle \overset{(j)}{A}_{11}\overset{(j)}{\overline{x}}_0 + \overset{(j)}{A}_{21}\overset{(j)}{\overline{y}}_0 + \overset{(j)}{B}_{11}\overset{(j)}{\overline{u}}_0, \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0\right\rangle + \right.$$
$$\left. + \left\langle -\dot{\overset{(j)}{\overline{y}}}_0 + \overset{(j)}{A}_{31}\overset{(j)}{\overline{x}}_0 + \overset{(j)}{A}_{41}\overset{(j)}{\overline{y}}_0 + \overset{(j)}{B}_{21}\overset{(j)}{\overline{u}}_0, \overset{(j)}{\overline{\psi}}_0\right\rangle\right\} dt \quad \text{– известная величина.}$$

Преобразуем сумму функций, стоящих во второй строке выражения для J_1. Используя (13), (12) при $t = t_{j-1}$, первое равенство из (8) и

$$\frac{d\overset{(j)}{\Pi}_1 x}{d\tau_{j-1}} = \overset{(j)}{A}_{10}(t_{j-1})\overset{(j)}{\Pi}_0 x + \overset{(j)}{A}_{20}(t_{j-1})\overset{(j)}{\Pi}_0 y + \overset{(j)}{B}_{10}(t_{j-1})\overset{(j)}{\Pi}_0 u,$$
$$\frac{d\overset{(j)}{\Pi}_0 y}{d\tau_{j-1}} = \overset{(j)}{A}_{30}(t_{j-1})\overset{(j)}{\Pi}_0 x + \overset{(j)}{A}_{40}(t_{j-1})\overset{(j)}{\Pi}_0 y + \overset{(j)}{B}_{20}(t_{j-1})\overset{(j)}{\Pi}_0 u,$$

получаем

$$\sum_{j=1}^{2}\int_{0}^{+\infty}\left\{\left\langle \overset{(j)}{\Pi}_0 z, \overset{(j)}{\mathbb{W}}_0(t_{j-1})\overset{(j)}{\overline{z}}_0(t_{j-1})\right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{\Pi}_0 u, \overset{(j)}{R}_0(t_{j-1})\overset{(j)}{\overline{u}}_0(t_{j-1})\right\rangle\right\} d\tau_{j-1} =$$
$$= \sum_{j=1}^{2}\int_{0}^{+\infty}\left\{\left\langle \overset{(j)}{\Pi}_0 z, \begin{pmatrix} \dot{\overset{(j)}{\overline{\varphi}}}_0(t_{j-1}) + \overset{(j)}{A}_{10}(t_{j-1})'\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0(t_{j-1}) + \overset{(j)}{A}_{30}(t_{j-1})'\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0(t_{j-1}) \\ \overset{(j)}{A}_{20}(t_{j-1})'\overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0(t_{j-1}) + \overset{(j)}{A}_{40}(t_{j-1})'\overset{(j)}{\overline{\psi}}_0(t_{j-1}) \end{pmatrix}\right\rangle + \right.$$

$$+\left\langle \overset{(j)}{\Pi}_0 u, \overset{(j)}{B}_{10}(t_{j-1})' \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0(t_{j-1}) + \overset{(j)}{B}_{20}(t_{j-1})' \overset{(j)}{\overline{\psi}}_0(t_{j-1}) \right\rangle \Bigg\} d\tau_{j-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \int_0^{+\infty} \left\{ \left\langle \frac{d\overset{(j)}{\Pi}_1 x}{d\tau_{j-1}}, \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0(t_{j-1}) \right\rangle + \left\langle \frac{d\overset{(j)}{\Pi}_0 y}{d\tau_{j-1}}, \overset{(j)}{\overline{\psi}}_0(t_{j-1}) \right\rangle \right\} d\tau_{j-1} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{2} \left\langle \overset{(j)}{\Pi}_1 x(0), \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0(t_{j-1}) \right\rangle - \sum_{j=1}^{2} \left\langle \overset{(j)}{\Pi}_0 y(0), \overset{(j)}{\overline{\psi}}_0(t_{j-1}) \right\rangle .$$

Аналогичным образом для суммы функций, стоящих в третьей строке выражения для J_1, имеем

$$\sum_{j=1}^{2} \int_{-\infty}^{0} \left\{ \left\langle \overset{(j)}{Q}_0 z, \overset{(j)}{\mathbb{W}}_0(t_j) \overset{(j)}{\overline{z}}_0(t_j) \right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{Q}_0 u, \overset{(j)}{R}_0(t_j) \overset{(j)}{\overline{u}}_0(t_j) \right\rangle \right\} d\tau_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \left(\left\langle \overset{(j)}{Q}_1 x(0), \overset{(j)}{\overline{\varphi}}_0(t_j) \right\rangle + \left\langle \overset{(j)}{Q}_0 y(0), \overset{(j)}{\overline{\psi}}_0(t_j) \right\rangle \right).$$

Отбрасывая известные слагаемые и используя (8), (14) и равенства

$$\overset{(1)}{\overline{x}}_1(0) + \overset{(1)}{\Pi}_1 x(0) = 0,\ \overset{(1)}{\overline{x}}_1(t_1) + \overset{(1)}{Q}_1 x(0) = \overset{(2)}{\overline{x}}_1(t_1) + \overset{(2)}{\Pi}_1 x(0),\ \overset{(1)}{\overline{y}}_0(0) + \overset{(1)}{\Pi}_0 y(0) = y^0,$$

запишем получившееся из J_1 выражение в виде $\Pi 1 J_0 + \Pi 2 J_0 + \Pi 3 J_0$, где

$$\Pi 1 J_0 = \Pi 1 J_0(\overset{(1)}{\Pi}_0 u) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left\{ \left\langle \overset{(1)}{\Pi}_0 y, \overset{(1)}{W}_{30}(0) \overset{(1)}{\Pi}_0 y \right\rangle + \left\langle \overset{(1)}{\Pi}_0 u, \overset{(1)}{R}_0(0) \overset{(1)}{\Pi}_0 u \right\rangle \right\} d\tau_0,$$

$$\Pi 2 J_0 = \Pi 2 J_0(\overset{(1)}{Q}_0 u, \overset{(2)}{\Pi}_0 u) = \left\langle \overset{(1)}{Q}_0 y(0), \overset{(1)}{\overline{\psi}}_0(t_1) \right\rangle - \left\langle \overset{(2)}{\Pi}_0 y(0), \overset{(2)}{\overline{\psi}}_0(t_1) \right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} \left\{ \left\langle \overset{(1)}{Q}_0 y, \overset{(1)}{W}_{30}(t_1) \overset{(1)}{Q}_0 y \right\rangle + \left\langle \overset{(1)}{Q}_0 u, \overset{(1)}{R}_0(t_1) \overset{(1)}{Q}_0 u \right\rangle \right\} d\tau_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left\{ \left\langle \overset{(2)}{\Pi}_0 y, \overset{(2)}{W}_{30}(t_1) \overset{(2)}{\Pi}_0 y \right\rangle + \left\langle \overset{(2)}{\Pi}_0 u, \overset{(2)}{R}_0(t_1) \overset{(2)}{\Pi}_0 u \right\rangle \right\} d\tau_1,$$

$$\Pi 3 J_0 = \Pi 3 J_0(\overset{(2)}{Q}_0 u) = \left\langle \overset{(2)}{Q}_0 y(0), \overset{(2)}{\overline{\psi}}_0(T) \right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} \left\{ \left\langle \overset{(2)}{Q}_0 y, \overset{(2)}{W}_{30}(T) \overset{(2)}{Q}_0 y \right\rangle + \left\langle \overset{(2)}{Q}_0 u, \overset{(2)}{R}_0(T) \overset{(2)}{Q}_0 u \right\rangle \right\} d\tau_2.$$

Уравнения для определения коэффициентов погранслойных рядов в разложении (4) содержат функции погранслоя только одного из четырёх рассматриваемых типов. Поэтому с учётом преобразованного выражения для J_1 коэффициенты погранслойных рядов в приближении нулевого порядка для $y(t,\varepsilon)$, $u(t,\varepsilon)$ могут быть найдены путем решения следующих трёх задач:

$$\Pi 1 P_0 \colon \Pi 1 J_0(\overset{(1)}{\Pi}_0 u) \to \min_{\overset{(1)}{\Pi}_0 u}, \tag{19}$$

$$\frac{d\overset{(1)}{\Pi}_0 y}{d\tau_0} = \overset{(1)}{A}_{40}(0)\overset{(1)}{\Pi}_0 y + \overset{(1)}{B}_{20}(0)\overset{(1)}{\Pi}_0 u, \quad \tau_0 \ge 0, \tag{20}$$

$$\overset{(1)}{\Pi}_0 y(0) = y^0 - \overset{(1)}{\overline{y}}_0(0), \tag{21}$$

$$\Pi 2P_0\colon \Pi 2J_0(\overset{(1)}{Q}_0 u, \overset{(2)}{\Pi}_0 u) \to \min_{(\overset{(1)}{Q}_0 u, \overset{(2)}{\Pi}_0 u)}, \tag{22}$$

$$\begin{gathered} \frac{d\overset{(1)}{Q}_0 y}{d\tau_1} = \overset{(1)}{A}_{40}(t_1)\overset{(1)}{Q}_0 y + \overset{(1)}{B}_{20}(t_1)\overset{(1)}{Q}_0 u, \quad \tau_1 \le 0, \\ \frac{d\overset{(2)}{\Pi}_0 y}{d\tau_1} = \overset{(2)}{A}_{40}(t_1)\overset{(2)}{\Pi}_0 y + \overset{(2)}{B}_{20}(t_1)\overset{(2)}{\Pi}_0 u, \quad \tau_1 \ge 0, \end{gathered} \tag{23}$$

$$\overset{(1)}{Q}_0 y(-\infty) = 0, \ \ \overset{(2)}{\Pi}_0 y(0) = \overset{(1)}{Q}_0 y(0) + \overset{(1)}{\overline{y}}_0(t_1) - \overset{(2)}{\overline{y}}_0(t_1), \tag{24}$$

$$\Pi 3P_0\colon \Pi 3J_0(\overset{(2)}{Q}_0 u) \to \min_{\overset{(2)}{Q}_0 u}, \tag{25}$$

$$\frac{d\overset{(2)}{Q}_0 y}{d\tau_2} = \overset{(2)}{A}_{40}(T)\overset{(2)}{Q}_0 y + \overset{(2)}{B}_{20}(T)\overset{(2)}{Q}_0 u, \quad \tau_2 \le 0, \tag{26}$$

$$\overset{(2)}{Q}_0 y(-\infty) = 0. \tag{27}$$

Утверждение 4. (Достаточное условие оптимальности управления для задачи $\Pi 1P_0$). *Управление $\overset{(1)}{\Pi}_0 u_*(\tau_0)$, задаваемое формулой*

$$\overset{(1)}{\Pi}_0 u_* = \overset{(1)}{R}_0(0)^{-1}\overset{(1)}{B}_{20}(0)'\overset{(1)}{\Pi}_0 \psi, \tag{28}$$

где $\overset{(1)}{\Pi}_0 \psi = \overset{(1)}{\Pi}_0 \psi(\tau_0)$ – решение задачи

$$\frac{d\overset{(1)}{\Pi}_0 \psi}{d\tau_0} = \overset{(1)}{W}_{30}(0)\overset{(1)}{\Pi}_0 y_* - \overset{(1)}{A}_{40}(0)'\overset{(1)}{\Pi}_0 \psi, \ \ \tau_0 \ge 0, \tag{29}$$

$$\overset{(1)}{\Pi}_0 \psi(+\infty) = 0, \tag{30}$$

$\overset{(1)}{\Pi}_0 y_*(\cdot)$ *– траектория системы* (20), (21), *соответствующая* $\overset{(1)}{\Pi}_0 u = \overset{(1)}{\Pi}_0 u_*$, *является оптимальным управлением для задачи* (19) – (21).

Доказательство. Пусть $\overset{(1)}{\Pi}_0 u(\tau_0)$ – произвольное допустимое управление (функция погранслоя экспоненциального типа), $\overset{(1)}{\Pi}_0 y(\tau_0)$ – соответствующая ему траектория –

решение задачи (20), (21). Запишем выражение для приращения функционала $\Pi 1 J_0$ в следующем виде:

$$\Pi 1 J_0(\overset{(1)}{\Pi}_0 u) - \Pi 1 J_0(\overset{(1)}{\Pi}_0 u_*) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left\{ \left\langle \overset{(1)}{\Pi}_0 y - \overset{(1)}{\Pi}_0 y_*, \overset{(1)}{W}_{30}(0)(\overset{(1)}{\Pi}_0 y - \overset{(1)}{\Pi}_0 y_*) \right\rangle + \right.$$
$$\left. + \left\langle \overset{(1)}{\Pi}_0 u - \overset{(1)}{\Pi}_0 u_*, \overset{(1)}{R}_0(0)(\overset{(1)}{\Pi}_0 u - \overset{(1)}{\Pi}_0 u_*) \right\rangle \right\} d\tau_0 \; + \Delta_1, \tag{31}$$

где

$$\Delta_1 = \int_0^{+\infty} \left\{ \left\langle \overset{(1)}{\Pi}_0 y - \overset{(1)}{\Pi}_0 y_*, \overset{(1)}{W}_{30}(0)\overset{(1)}{\Pi}_0 y_* \right\rangle + \left\langle \overset{(1)}{\Pi}_0 u - \overset{(1)}{\Pi}_0 u_*, \overset{(1)}{R}_0(0)\overset{(1)}{\Pi}_0 u_* \right\rangle \right\} d\tau_0.$$

Преобразуем Δ_1. Используя (29), (28), формулу интегрирования по частям, а также (20), (21) и экспоненциальный характер функций погранслоя, получаем, что $\Delta_1 = 0$.

В силу положительной определенности $\overset{(1)}{W}_{30}(0)$ и $\overset{(1)}{R}_0(0)$ из (31) следует, что $\overset{(1)}{\Pi}_0 u_*$ является оптимальным управлением.$\blacksquare$

Утверждение 5. (Необходимое условие оптимальности управления для задачи $\Pi 1 P_0$). *Оптимальное управление для задачи* (19) – (21) - $\overset{(1)}{\Pi}_0 u_*(\cdot)$ *задается формулой* (28), *где* $\overset{(1)}{\Pi}_0 \psi(\cdot)$ *– решение уравнения* (29) *при условии* (30).

Доказательство. Обозначим через $\overset{(1)}{\Pi}_0 y_*(\tau_0)$ оптимальную траекторию для задачи (19) – (21). Пусть $\overset{(1)}{\Pi}_0 u(\tau_0)$ – произвольное допустимое управление для задачи $\Pi 1 P_0$ (функция погранслоя экспоненциального типа), $\overset{(1)}{\Pi}_0 y(\tau_0)$ – соответствующая ему траектория – решение задачи (20), (21). Используя (31), (29), (30), формулу интегрирования по частям, а также (20), (21) и экспоненциальный характер функций погранслоя, получаем

$$\Pi 1 J_0(\overset{(1)}{\Pi}_0 u) - \Pi 1 J_0(\overset{(1)}{\Pi}_0 u_*) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left\{ \left\langle \overset{(1)}{\Pi}_0 y - \overset{(1)}{\Pi}_0 y_*, \overset{(1)}{W}_{30}(0)(\overset{(1)}{\Pi}_0 y - \overset{(1)}{\Pi}_0 y_*) \right\rangle + \right.$$
$$\left. + \left\langle \overset{(1)}{\Pi}_0 u - \overset{(1)}{\Pi}_0 u_*, \overset{(1)}{R}_0(0)(\overset{(1)}{\Pi}_0 u - \overset{(1)}{\Pi}_0 u_*) \right\rangle \right\} d\tau_0 + \tag{32}$$
$$+ \int_0^{+\infty} \left\langle \overset{(1)}{\Pi}_0 u - \overset{(1)}{\Pi}_0 u_*, \overset{(1)}{R}_0(0)\overset{(1)}{\Pi}_0 u_* - \overset{(1)}{B}_{20}(0)'\overset{(1)}{\Pi}_0 \psi \right\rangle d\tau_0.$$

При $\overset{(1)}{\Pi}_0 u(\tau_0)$, достаточно близких к $\overset{(1)}{\Pi}_0 u_*(\tau_0)$, определяющим членом в выражении (32) будет

$$\int_0^{+\infty} \left\langle \overset{(1)}{\Pi}_0 u - \overset{(1)}{\Pi}_0 u_*, \overset{(1)}{R}_0(0)\overset{(1)}{\Pi}_0 u_* - \overset{(1)}{B}_{20}(0)'\overset{(1)}{\Pi}_0 \psi \right\rangle d\tau_0.$$

Так как $\Pi 1 J_0(\overset{(1)}{\Pi}_0 u) - \Pi 1 J_0(\overset{(1)}{\Pi}_0 u_*) \geq 0$ для любого $\overset{(1)}{\Pi}_0 u(\tau_0)$, то должно выполняться равенство

$$\overset{(1)}{R}_0(0)\overset{(1)}{\Pi}_0 u_* - \overset{(1)}{B}_{20}(0)'\overset{(1)}{\Pi}_0 \psi = 0.$$

В силу обратимости $\overset{(1)}{R}_0(0)$ отсюда следует равенство (28).■

Утверждение 6. *Задача* $\Pi 1P_0$ *однозначно разрешима.*

Доказательство. Достаточно доказать, что система

$$\begin{aligned} \frac{d\overset{(1)}{\Pi}_0 y}{d\tau_0} &= \overset{(1)}{A}_{40}(0)\overset{(1)}{\Pi}_0 y + \overset{(1)}{S}_{30}(0)\overset{(1)}{\Pi}_0\psi, \\ \frac{d\overset{(1)}{\Pi}_0\psi}{d\tau_0} &= \overset{(1)}{W}_{30}(0)\overset{(1)}{\Pi}_0 y - \overset{(1)}{A}_{40}(0)'\overset{(1)}{\Pi}_0\psi, \quad \tau_0 \geq 0, \end{aligned} \tag{33}$$

при условиях

$$\overset{(1)}{\Pi}_0 y(0) = 0, \quad \overset{(1)}{\Pi}_0\psi(+\infty) = 0 \tag{34}$$

не имеет нетривиальных решений.

В системе (33) умножим скалярно первое уравнение на $\overset{(1)}{\Pi}_0\psi(\tau_0)$, а второе уравнение – на $\overset{(1)}{\Pi}_0 y(\tau_0)$. Сложив результаты, проинтегрируем получившееся выражение по промежутку $[\,0, +\infty)$. Учитывая равенства (34), получаем

$$0 = \int_0^{+\infty} \left\{ \left\langle \overset{(1)}{S}_{30}(0)\overset{(1)}{\Pi}_0\psi, \overset{(1)}{\Pi}_0\psi \right\rangle + \left\langle \overset{(1)}{\Pi}_0 y, \overset{(1)}{W}_{30}(0)\overset{(1)}{\Pi}_0 y \right\rangle \right\} d\tau_0.$$

В силу неравенств $\overset{(1)}{S}_{30}(0) \geq 0$, $\overset{(1)}{W}_{30}(0) > 0$ из последнего выражения следует, что $\overset{(1)}{S}_{30}(0)\overset{(1)}{\Pi}_0\psi(\tau_0) \equiv 0$ и $\overset{(1)}{\Pi}_0 y(\tau_0) \equiv 0$. Теперь из второго уравнения в (33) в силу (34) и условия 1^0 имеем $\overset{(1)}{\Pi}_0\psi(\tau_0) \equiv 0$. Таким образом, $\overset{(1)}{\Pi}_0\psi(\tau_0) \equiv 0$, $\overset{(1)}{\Pi}_0 y(\tau_0) \equiv 0$ является единственным решением задачи (33), (34).■

Утверждение 7. (Достаточное условие оптимальности управления для задачи $\Pi 2P_0$). *Управление, составленное из функций* $\overset{(1)}{Q}_0 u_*(\tau_1)$, $\overset{(2)}{\Pi}_0 u_*(\tau_1)$, *задаваемых формулами*

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{Q}_0 u_* &= \overset{(1)}{R}_0(t_1)^{-1}\overset{(1)}{B}_{20}(t_1)'\overset{(1)}{Q}_0\psi, \quad \tau_1 \leq 0, \\ \overset{(2)}{\Pi}_0 u_* &= \overset{(2)}{R}_0(t_1)^{-1}\overset{(2)}{B}_{20}(t_1)'\overset{(2)}{\Pi}_0\psi, \quad \tau_1 \geq 0, \end{aligned} \tag{35}$$

где $\overset{(1)}{Q}_0\psi = \overset{(1)}{Q}_0\psi(\tau_1)$, $\overset{(2)}{\Pi}_0\psi = \overset{(2)}{\Pi}_0\psi(\tau_1)$ *– решение задачи*

$$\begin{aligned} \frac{d\overset{(1)}{Q}_0\psi}{d\tau_1} &= \overset{(1)}{W}_{30}(t_1)\overset{(1)}{Q}_0 y_* - \overset{(1)}{A}_{40}(t_1)'\overset{(1)}{Q}_0\psi, \quad \tau_1 \leq 0, \\ \frac{d\overset{(2)}{\Pi}_0\psi}{d\tau_1} &= \overset{(2)}{W}_{30}(t_1)\overset{(2)}{\Pi}_0 y_* - \overset{(2)}{A}_{40}(t_1)'\overset{(2)}{\Pi}_0\psi, \quad \tau_1 \geq 0, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\overset{(2)}{\Pi}_0\psi(+\infty) = 0, \quad \overset{(1)}{Q}_0\psi(0) = \overset{(2)}{\Pi}_0\psi(0) + \overset{(2)}{\overline{\psi}}_0(t_1) - \overset{(1)}{\overline{\psi}}_0(t_1), \tag{37}$$

$\overset{(1)}{Q}_0 y_*(\cdot)$, $\overset{(2)}{\Pi}_0 y_*(\cdot)$ – *траектория системы* (23), (24), *соответствующая* $\overset{(1)}{Q}_0 u = \overset{(1)}{Q}_0 u_*$, $\overset{(2)}{\Pi}_0 u = \overset{(2)}{\Pi}_0 u_*$, *является оптимальным управлением для задачи* (22) – (24).

Доказательство. Пусть $\overset{(1)}{Q}_0 u(\tau_1)$, $\overset{(2)}{\Pi}_0 u(\tau_1)$ – произвольное допустимое управление (функция погранслоя экспоненциального типа), $\overset{(1)}{Q}_0 y(\tau_1)$, $\overset{(2)}{\Pi}_0 y(\tau_1)$ – соответствующая ему траектория – решение задачи (23), (24). Запишем выражение для приращения функционала $\Pi 2 J_0$ в следующем виде:

$$\begin{gathered}\Pi 2 J_0(\overset{(1)}{Q}_0 u, \overset{(2)}{\Pi}_0 u) - \Pi 2 J_0(\overset{(1)}{Q}_0 u_*, \overset{(2)}{\Pi}_0 u_*) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\Big\{\Big\langle \overset{(1)}{Q}_0 y - \overset{(1)}{Q}_0 y_*, \\ \overset{(1)}{W}_{30}(t_1)(\overset{(1)}{Q}_0 y - \overset{(1)}{Q}_0 y_*)\Big\rangle + \Big\langle \overset{(1)}{Q}_0 u - \overset{(1)}{Q}_0 u_*, \overset{(1)}{R}_0(t_1)(\overset{(1)}{Q}_0 u - \overset{(1)}{Q}_0 u_*)\Big\rangle\Big\} d\tau_1 + \\ + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\Big\{\Big\langle \overset{(2)}{\Pi}_0 y - \overset{(2)}{\Pi}_0 y_*, \overset{(2)}{W}_{30}(t_1)(\overset{(2)}{\Pi}_0 y - \overset{(2)}{\Pi}_0 y_*)\Big\rangle + \\ + \Big\langle \overset{(2)}{\Pi}_0 u - \overset{(2)}{\Pi}_0 u_*, \overset{(2)}{R}_0(t_1)(\overset{(2)}{\Pi}_0 u - \overset{(2)}{\Pi}_0 u_*)\Big\rangle\Big\} d\tau_1 + \Delta_2 + \Delta_3,\end{gathered} \tag{38}$$

где

$$\Delta_2 = \Big\langle \overset{(1)}{Q}_0 y(0) - \overset{(1)}{Q}_0 y_*(0), \overset{(1)}{\overline{\psi}}_0(t_1)\Big\rangle - \Big\langle \overset{(2)}{\Pi}_0 y(0) - \overset{(2)}{\Pi}_0 y_*(0), \overset{(2)}{\overline{\psi}}_0(t_1)\Big\rangle,$$

$$\begin{gathered}\Delta_3 = \int_{-\infty}^{0}\Big\{\Big\langle \overset{(1)}{Q}_0 y - \overset{(1)}{Q}_0 y_*, \overset{(1)}{W}_{30}(t_1)\overset{(1)}{Q}_0 y_*\Big\rangle + \Big\langle \overset{(1)}{Q}_0 u - \overset{(1)}{Q}_0 u_*, \overset{(1)}{R}_0(t_1)\overset{(1)}{Q}_0 u_*\Big\rangle\Big\} d\tau_1 + \\ + \int_{0}^{+\infty}\Big\{\Big\langle \overset{(2)}{\Pi}_0 y - \overset{(2)}{\Pi}_0 y_*, \overset{(2)}{W}_{30}(t_1)\overset{(2)}{\Pi}_0 y_*\Big\rangle + \Big\langle \overset{(2)}{\Pi}_0 u - \overset{(2)}{\Pi}_0 u_*, \overset{(2)}{R}_0(t_1)\overset{(2)}{\Pi}_0 u_*\Big\rangle\Big\} d\tau_1.\end{gathered}$$

Преобразуем Δ_3. Используя (36), (35), (23), формулу интегрирования по частям, а также (37), получаем

$$\Delta_3 = \Big\langle \overset{(1)}{Q}_0 y(0) - \overset{(1)}{Q}_0 y_*(0), \overset{(1)}{Q}_0 \psi(0)\Big\rangle - \Big\langle \overset{(2)}{\Pi}_0 y(0) - \overset{(2)}{\Pi}_0 y_*(0), \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(0)\Big\rangle.$$

Учитывая (24) и (37), имеем равенство $\Delta_2 + \Delta_3 = 0$.

В силу положительной определенности $\overset{(1)}{W}_{30}(t_1)$, $\overset{(2)}{W}_{30}(t_1)$, $\overset{(1)}{R}_0(t_1)$, $\overset{(2)}{R}_0(t_1)$ из (38) следует, что управление, составленное из функций $\overset{(1)}{Q}_0 u_*$, $\overset{(2)}{\Pi}_0 u_*$, является оптимальным. ∎

Утверждение 8. (Необходимое условие оптимальности управления для задачи $\Pi 2 P_0$). *Оптимальное управление для задачи* $\Pi 2 P_0$ - $\overset{(1)}{Q}_0 u_*(\cdot)$, $\overset{(2)}{\Pi}_0 u_*(\cdot)$ *задается формулой* (35), *где* $\overset{(1)}{Q}_0 \psi(\cdot)$, $\overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(\cdot)$ – *решение системы* (36) *при условиях* (37).

Доказательство. Обозначим через $\overset{(1)}{Q}_0 y_*(\tau_1)$, $\overset{(2)}{\Pi}_0 y_*(\tau_1)$ оптимальную траекторию для задачи $\Pi 2 P_0$. Пусть $\overset{(1)}{Q}_0 u(\tau_1)$, $\overset{(2)}{\Pi}_0 u(\tau_1)$ – произвольное допустимое управление для задачи $\Pi 2P_0$, функции погранслоя экспоненциального типа $\overset{(1)}{Q}_0 y(\tau_1)$, $\overset{(2)}{\Pi}_0 y(\tau_1)$ – соответствующие ему траектории – решение задачи (23), (24). Используя (36), формулу интегрирования по частям, а также (23), (24), (37) и экспоненциальный характер функций погранслоя, получаем следующее выражение для суммы $\Delta_2+\Delta_3$ из (38):

$$\begin{aligned}\Delta_2+\Delta_3 = \int_{-\infty}^{0} \left\langle \overset{(1)}{Q}_0 u - \overset{(1)}{Q}_0 u_*, \overset{(1)}{R}_0(t_1)\overset{(1)}{Q}_0 u_* - \overset{(1)}{B}_{20}(t_1)'\overset{(1)}{Q}_0 \psi \right\rangle d\tau_1 + \\ + \int_{0}^{+\infty} \left\langle \overset{(2)}{\Pi}_0 u - \overset{(2)}{\Pi}_0 u_*, \overset{(2)}{R}_0(t_1)\overset{(2)}{\Pi}_0 u_* - \overset{(2)}{B}_{20}(t_1)'\overset{(2)}{\Pi}_0 \psi \right\rangle d\tau_1.\end{aligned} \tag{39}$$

При $\overset{(1)}{Q}_0 u$, достаточно близких к $\overset{(1)}{Q}_0 u_*$, и $\overset{(2)}{\Pi}_0 u$, достаточно близких к $\overset{(2)}{\Pi}_0 u_*$, определяющим членом в выражении (38) будет (39).

Так как $\Pi 2J_0(\overset{(1)}{Q}_0 u, \overset{(2)}{\Pi}_0 u) - \Pi 2J_0(\overset{(1)}{Q}_0 u_*, \overset{(2)}{\Pi}_0 u_*) \geq 0$ для любых $\overset{(1)}{Q}_0 u(\tau_1)$ и $\overset{(2)}{\Pi}_0 u(\tau_1)$, то должны выполняться равенства

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{R}_0(t_1)\overset{(1)}{Q}_0 u_* - \overset{(1)}{B}_{20}(t_1)'\overset{(1)}{Q}_0 \psi = 0,\\ \overset{(2)}{R}_0(t_1)\overset{(2)}{\Pi}_0 u_* - \overset{(2)}{B}_{20}(t_1)'\overset{(2)}{\Pi}_0 \psi = 0.\end{aligned}$$

В силу обратимости $\overset{(1)}{R}_0(t_1)$, $\overset{(2)}{R}_0(t_1)$ отсюда следуют равенства (35).■

Утверждение 9. *Задача* $\Pi 2P_0$ *однозначно разрешима.*

Доказательство Достаточно доказать, что система

$$\begin{aligned}\frac{d\overset{(1)}{Q}_0 y}{d\tau_1} &= \overset{(1)}{A}_{40}(t_1)\overset{(1)}{Q}_0 y + \overset{(1)}{S}_{30}(t_1)\overset{(1)}{Q}_0 \psi,\\ \frac{d\overset{(1)}{Q}_0 \psi}{d\tau_1} &= \overset{(1)}{W}_{30}(t_1)\overset{(1)}{Q}_0 y - \overset{(1)}{A}_{40}(t_1)'\overset{(1)}{Q}_0 \psi, \ \ \tau_1 \leq 0,\\ \frac{d\overset{(2)}{\Pi}_0 y}{d\tau_1} &= \overset{(2)}{A}_{40}(t_1)\overset{(2)}{\Pi}_0 y + \overset{(2)}{S}_{30}(t_1)\overset{(2)}{\Pi}_0 \psi,\\ \frac{d\overset{(2)}{\Pi}_0 \psi}{d\tau_1} &= \overset{(2)}{W}_{30}(t_1)\overset{(2)}{\Pi}_0 y - \overset{(2)}{A}_{40}(t_1)'\overset{(2)}{\Pi}_0 \psi, \ \ \tau_1 \geq 0,\end{aligned} \tag{40}$$

при условиях

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{Q}_0 y(0) - \overset{(2)}{\Pi}_0 y(0) = 0, \quad \overset{(1)}{Q}_0 \psi(0) - \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(0) = 0,\\ \overset{(1)}{Q}_0 y(-\infty) = 0, \ \ \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(+\infty) = 0\end{aligned} \tag{41}$$

не имеет нетривиальных решений.

В системе (40) умножим скалярно первое уравнение на $\overset{(1)}{Q}_0 \psi(\tau_1)$, а второе уравнение – на $\overset{(1)}{Q}_0 y(\tau_1)$. Сложив результаты, проинтегрируем получившееся выражение по промежутку $(-\infty, 0]$. Далее умножим скалярно третье уравнение из (40) на

$\overset{(2)}{\Pi}_0\psi(\tau_1)$, а четвертое уравнение – на $\overset{(2)}{\Pi}_0 y(\tau_1)$. Сложив результаты, проинтегрируем получившееся выражение по промежутку $[0,+\infty)$. Складывая получившиеся при интегрировании результаты, с учётом (41) имеем

$$0 = \int_{-\infty}^{0} \left\{ \left\langle \overset{(1)}{S}_{30}(t_1)\overset{(1)}{Q}_0\psi, \overset{(1)}{Q}_0\psi \right\rangle + \left\langle \overset{(1)}{W}_{30}(t_1)\overset{(1)}{Q}_0 y, \overset{(1)}{Q}_0 y \right\rangle \right\} d\tau_1 +$$
$$+ \int_{0}^{+\infty} \left\{ \left\langle \overset{(2)}{S}_{30}(t_1)\overset{(2)}{\Pi}_0\psi, \overset{(2)}{\Pi}_0\psi \right\rangle + \left\langle \overset{(2)}{W}_{30}(t_1)\overset{(2)}{\Pi}_0 y, \overset{(2)}{\Pi}_0 y \right\rangle \right\} d\tau_1.$$

В силу неравенств $\overset{(j)}{S}_{30}(t_1) \geq 0$, $\overset{(j)}{W}_{30}(t_1) > 0$, $j = 1, 2$, из последнего выражения следует, что $\overset{(1)}{Q}_0 y(\tau_1) \equiv 0$, $\overset{(1)}{S}_{30}(t_1)\overset{(1)}{Q}_0\psi(\tau_1) \equiv 0$ при $\tau_1 \in (-\infty, 0]$ и $\overset{(2)}{\Pi}_0 y(\tau_1) \equiv 0$, $\overset{(2)}{S}_{30}(t_1)\overset{(2)}{\Pi}_0\psi(\tau_1) \equiv 0$ при $\tau_1 \in [0,+\infty)$.

Тогда из (40), (41) получаем систему

$$\frac{d\overset{(1)}{Q}_0\psi}{d\tau_1} = -\overset{(1)}{A}_{40}(t_1)'\overset{(1)}{Q}_0\psi, \quad \tau_1 \leq 0,$$
$$\frac{d\overset{(2)}{\Pi}_0\psi}{d\tau_1} = -\overset{(2)}{A}_{40}(t_1)'\overset{(2)}{\Pi}_0\psi, \quad \tau_1 \geq 0,$$
$$\overset{(2)}{\Pi}_0\psi(+\infty) = 0, \quad \overset{(1)}{Q}_0\psi(0) = \overset{(2)}{\Pi}_0\psi(0).$$

В силу условия 1^0 отсюда следует, что $\overset{(2)}{\Pi}_0\psi(\tau_1) \equiv 0$ при $\tau_1 \geq 0$ и, значит, $\overset{(1)}{Q}_0\psi(\tau_1) \equiv 0$ при $\tau_1 \leq 0$.■

Утверждение 10. (Достаточное условие оптимальности управления для задачи ПЗP_0). *Управление* $\overset{(2)}{Q}_0 u_*(\tau_2)$, *задаваемое формулой*

$$\overset{(2)}{Q}_0 u_* = \overset{(2)}{R}_0(T)^{-1}\overset{(2)}{B}_{20}(T)'\overset{(2)}{Q}_0\psi, \tag{42}$$

где $\overset{(2)}{Q}_0\psi = \overset{(2)}{Q}_0\psi(\tau_2)$ *– решение задачи*

$$\frac{d\overset{(2)}{Q}_0\psi}{d\tau_2} = \overset{(2)}{W}_{30}(T)\overset{(2)}{Q}_0 y_* - \overset{(2)}{A}_{40}(T)'\overset{(2)}{Q}_0\psi, \quad \tau_2 \leq 0, \tag{43}$$

$$\overset{(2)}{Q}_0\psi(0) = -\overset{(2)}{\overline{\psi}}_0(T), \tag{44}$$

$\overset{(2)}{Q}_0 y_*(\cdot)$ *– траектория системы* (26), *соответствующая* $\overset{(2)}{Q}_0 u = \overset{(2)}{Q}_0 u_*$, *является оптимальным управлением для задачи* ПЗP_0.

Доказательство. Пусть $\overset{(2)}{Q}_0 u(\tau_2)$ – произвольное допустимое управление, функция погранслоя экспоненциального типа $\overset{(2)}{Q}_0 y(\tau_2)$ – соответствующая ему траектория – решение задачи (26). Запишем выражение для приращения функционала П3J_0 в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\text{П3}J_0(\overset{(2)}{Q}_0 u) - \text{П3}J_0(\overset{(2)}{Q}_0 u_*) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \left\{ \left\langle \overset{(2)}{Q}_0 y - \overset{(2)}{Q}_0 y_*, \overset{(2)}{W}_{30}(T)(\overset{(2)}{Q}_0 y - \overset{(2)}{Q}_0 y_*) \right\rangle + \right. \\
\left. + \left\langle \overset{(2)}{Q}_0 u - \overset{(2)}{Q}_0 u_*, \overset{(2)}{R}_0(T)(\overset{(2)}{Q}_0 u - \overset{(2)}{Q}_0 u_*) \right\rangle \right\} d\tau_2 + \Delta_4 + \Delta_5,
\end{gathered} \tag{45}$$

где

$$\Delta_4 = \left\langle \overset{(2)}{Q}_0 y(0) - \overset{(2)}{Q}_0 y_*(0), \overset{(2)}{\overline{\psi}}_0(T) \right\rangle,$$

$$\Delta_5 = \int_{-\infty}^{0} \left\{ \left\langle \overset{(2)}{Q}_0 y - \overset{(2)}{Q}_0 y_*, \overset{(2)}{W}_{30}(T)\overset{(2)}{Q}_0 y_* \right\rangle + \left\langle \overset{(2)}{Q}_0 u - \overset{(2)}{Q}_0 u_*, \overset{(2)}{R}_0(T)\overset{(2)}{Q}_0 u_* \right\rangle \right\} d\tau_2.$$

Преобразуем Δ_5. Используя (43), (42), формулу интегрирования по частям, а также (26), (27), получаем

$$\Delta_5 = \left\langle \overset{(2)}{Q}_0 y(0) - \overset{(2)}{Q}_0 y_*(0), \overset{(2)}{Q}_0 \psi(0) \right\rangle.$$

Учитывая (44), имеем $\Delta_4 + \Delta_5 = 0$.

В силу положительной определенности $\overset{(2)}{W}_{30}(T)$ и $\overset{(2)}{R}_0(T)$ из (45) следует, что $\overset{(2)}{Q}_0 u_*$ является оптимальным управлением для задачи П3P_0.■

Утверждение 11. (Необходимое условие оптимальности управления для задачи П3P_0) *Оптимальное управление для задачи* П3P_0 – $\overset{(2)}{Q}_0 u_*(\cdot)$ *задается формулой* (42), *где* $\overset{(2)}{Q}_0 \psi(\cdot)$ – *решение уравнения* (43) *при условии* (44).

Доказательство. Обозначим через $\overset{(2)}{Q}_0 y_*(\tau_2)$ оптимальную траекторию для задачи (25) – (27). Пусть $\overset{(2)}{Q}_0 u(\tau_2)$ – произвольное допустимое управление для задачи П3P_0, функция погранслоя экспоненциального типа $\overset{(2)}{Q}_0 y(\tau_2)$ – соответствующая ему траектория – решение задачи (26), (27).

Используя (45), (43), формулу интегрирования по частям, а также (44), (26) и (27), получаем

$$\begin{gathered}
\text{П3}J_0(\overset{(2)}{Q}_0 u) - \text{П3}J_0(\overset{(2)}{Q}_0 u_*) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \left\{ \left\langle \overset{(2)}{Q}_0 y - \overset{(2)}{Q}_0 y_*, \overset{(2)}{W}_{30}(T)(\overset{(2)}{Q}_0 y - \overset{(2)}{Q}_0 y_*) \right\rangle + \right. \\
\left. + \left\langle \overset{(2)}{Q}_0 u - \overset{(2)}{Q}_0 u_*, \overset{(2)}{R}_0(T)(\overset{(2)}{Q}_0 u - \overset{(2)}{Q}_0 u_*) \right\rangle \right\} d\tau_2 + \\
+ \int_{-\infty}^{0} \left\langle \overset{(2)}{Q}_0 u - \overset{(2)}{Q}_0 u_*, \overset{(2)}{R}_0(T)\overset{(2)}{Q}_0 u_* - \overset{(2)}{B}_{20}(T)'\overset{(2)}{Q}_0 \psi \right\rangle d\tau_2.
\end{gathered} \tag{46}$$

При $\overset{(2)}{Q}_0 u(\tau_2)$, достаточно близких к $\overset{(2)}{Q}_0 u_*(\tau_2)$, определяющим членом в выражении (46) будет

$$\int_{-\infty}^{0} \left\langle \overset{(2)}{Q}_0 u - \overset{(2)}{Q}_0 u_*, \overset{(2)}{R}_0(T)\overset{(2)}{Q}_0 u_* - \overset{(2)}{B}_{20}(T)'\overset{(2)}{Q}_0 \psi \right\rangle d\tau_2.$$

Так как $\Pi 3 J_0(\overset{(2)}{Q}_0 u) - \Pi 3 J_0(\overset{(2)}{Q}_0 u_*) \geq 0$ для любого $\overset{(2)}{Q}_0 u(\tau_2)$, то должно выполняться равенство

$$\overset{(2)}{R}_0(T)\overset{(2)}{Q}_0 u_* - \overset{(2)}{B}_{20}(T)'\overset{(2)}{Q}_0 \psi = 0.$$

В силу обратимости $\overset{(2)}{R}_0(T)$ отсюда следует равенство (42).

Утверждение 12. *Задача* $\Pi 3 P_0$ *однозначно разрешима.*

Доказательство. Достаточно доказать, что система

$$\begin{aligned} \frac{d\overset{(2)}{Q}_0 y}{d\tau_2} &= \overset{(2)}{A}_{40}(T)\overset{(2)}{Q}_0 y + \overset{(2)}{S}_{30}(T)\overset{(2)}{Q}_0 \psi, \\ \frac{d\overset{(2)}{Q}_0 \psi}{d\tau_2} &= \overset{(2)}{W}_{30}(T)\overset{(2)}{Q}_0 y - \overset{(2)}{A}_{40}(T)'\overset{(2)}{Q}_0 \psi, \quad \tau_2 \leq 0, \end{aligned} \tag{47}$$

при условиях

$$\overset{(2)}{Q}_0 y(-\infty) = 0, \quad \overset{(2)}{Q}_0 \psi(0) = 0 \tag{48}$$

не имеет нетривиальных решений.

В системе (47) умножим скалярно первое уравнение на $\overset{(2)}{Q}_0 \psi(\tau_2)$, а второе уравнение – на $\overset{(2)}{Q}_0 y(\tau_2)$. Сложив результаты, проинтегрируем получившееся выражение по промежутку $(-\infty, 0]$. Учитывая равенство (48), получаем

$$0 = \int_{-\infty}^{0} \left\{ \left\langle \overset{(2)}{S}_{30}(T)\overset{(2)}{Q}_0 \psi, \overset{(2)}{Q}_0 \psi \right\rangle + \left\langle \overset{(2)}{Q}_0 y, \overset{(2)}{W}_{30}(T)\overset{(2)}{Q}_0 y \right\rangle \right\} d\tau_2.$$

В силу неравенств $\overset{(2)}{S}_{30}(T) \geq 0$, $\overset{(2)}{W}_{30}(T) > 0$ из последнего выражения следует, что $\overset{(2)}{Q}_0 y(\tau_2) \equiv 0$ и $\overset{(2)}{S}_{30}(T)\overset{(2)}{Q}_0 \psi(\tau_2) \equiv 0$. Тогда из второго уравнения в (47) и (48) следует, что $\overset{(2)}{Q}_0 \psi(\tau_2) \equiv 0$.■

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. В разложении (5) коэффициент J_0 зависит только от решения однозначно разрешимой задачи $\overline{P}_0$. Если в J_1 отбросить слагаемые, известные после решения задачи $\overline{P}_0$, то преобразованное выражение для J_1 представляет собой сумму критериев качества для однозначно разрешимых задач $\Pi 1 P_0$, $\Pi 2 P_0$, $\Pi 3 P_0$.

3.Численный эксперимент. Рассмотрим задачу P_ε, состоящую в минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left((\overset{(1)}{x})^2 + 2\overset{(1)}{x}\overset{(1)}{y} + 3(\overset{(1)}{y})^2 + (\overset{(1)}{u})^2 \right) dt + \frac{1}{2}\int_1^2 \left((\overset{(2)}{x})^2 + (\overset{(2)}{y})^2 + \frac{1}{3}(\overset{(2)}{u})^2 \right) dt \tag{49}$$

на траекториях системы

$$\begin{aligned} &\dot{\overset{(1)}{x}} = (1+\varepsilon)\overset{(1)}{x}, \qquad && \varepsilon \dot{\overset{(1)}{y}} = -\overset{(1)}{y} + \overset{(1)}{u}, \\ &\dot{\overset{(2)}{x}} = \varepsilon \overset{(2)}{x}, && \varepsilon \dot{\overset{(2)}{y}} = \overset{(2)}{x} - \overset{(2)}{y} + \overset{(2)}{u}, \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{x}(0,\varepsilon) = 1, &\quad \overset{(1)}{y}(0,\varepsilon) = 1, \\ \overset{(2)}{x}(1,\varepsilon) = \overset{(1)}{x}(1,\varepsilon), &\quad \overset{(2)}{y}(1,\varepsilon) = \overset{(1)}{y}(1,\varepsilon). \end{aligned} \tag{51}$$

Из условия оптимальности управления для задачи P_ε (см., например, [8]) получаем на отрезке $[0,1]$ систему

$$\begin{gathered} \dot{\overset{(1)}{\varphi}} = \overset{(1)}{x} + \overset{(1)}{y} - (1+\varepsilon)\overset{(1)}{\varphi}, \\ \varepsilon \dot{\overset{(1)}{\psi}} = \overset{(1)}{x} + 3\overset{(1)}{y} + \overset{(1)}{\psi}, \\ \overset{(1)}{u} = \overset{(1)}{\psi}, \end{gathered} \tag{52}$$

а на отрезке $[1,2]$ – систему

$$\begin{gathered} \dot{\overset{(2)}{\varphi}} = \overset{(2)}{x} - \varepsilon\overset{(2)}{\varphi} - \overset{(2)}{\psi}, \\ \varepsilon \dot{\overset{(2)}{\psi}} = \overset{(2)}{y} + \overset{(2)}{\psi}, \\ \overset{(2)}{u} = 3\overset{(2)}{\psi}. \end{gathered} \tag{53}$$

При этом должны выполняться условия

$$\overset{(2)}{\varphi}(2,\varepsilon) = 0, \quad \overset{(2)}{\psi}(2,\varepsilon) = 0, \quad \overset{(2)}{\varphi}(1,\varepsilon) = \overset{(1)}{\varphi}(1,\varepsilon), \quad \overset{(2)}{\psi}(1,\varepsilon) = \overset{(1)}{\psi}(1,\varepsilon). \tag{54}$$

Из (50), (52) получаем

$$\begin{gathered} \overset{(1)}{x}(t,\varepsilon) = C_1 e^{(1+\varepsilon)t}, \\ \overset{(1)}{y}(t,\varepsilon) = C_2 e^{\frac{2t}{\varepsilon}} + C_3 e^{-\frac{2t}{\varepsilon}} - \frac{C_1}{4-\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2} e^{(1+\varepsilon)t}, \\ \overset{(1)}{u}(t,\varepsilon) = \overset{(1)}{\psi}(t,\varepsilon) = 3C_2 e^{\frac{2t}{\varepsilon}} - C_3 e^{-\frac{2t}{\varepsilon}} - \frac{(1+\varepsilon(1+\varepsilon))C_1}{4-\varepsilon^2(1+\varepsilon)^2} e^{(1+\varepsilon)t}. \end{gathered} \tag{55}$$

Из (50), (53) находим

$$\begin{gathered} \overset{(2)}{x}(t,\varepsilon) = C_4 e^{\varepsilon t}, \\ \overset{(2)}{y}(t,\varepsilon) = C_5 e^{\frac{2t}{\varepsilon}} - 3C_6 e^{-\frac{2t}{\varepsilon}} + \frac{(1-\varepsilon^2)C_4}{4-\varepsilon^4} e^{\varepsilon t}, \\ \frac{1}{3}\overset{(2)}{u}(t,\varepsilon) = \overset{(2)}{\psi}(t,\varepsilon) = C_5 e^{\frac{2t}{\varepsilon}} + C_6 e^{-\frac{2t}{\varepsilon}} - \frac{C_4}{4-\varepsilon^4} e^{\varepsilon t}. \end{gathered} \tag{56}$$

Учитывая (55), (56), из условий (51), (54) получаем

$$C_1 = 1,\;\; C_2 = \frac{4 + e^{-\frac{4}{\varepsilon}} - 5e^{\frac{4}{\varepsilon}}}{1 - e^{\frac{4}{\varepsilon}}} b_1 - \left(3 + e^{-\frac{4}{\varepsilon}}\right) b_2 + \frac{5 - \varepsilon^2(1+\varepsilon)^2}{4 - \varepsilon^2(1+\varepsilon)^2},$$

$$C_3 = -\frac{4 + e^{-\frac{4}{\varepsilon}} - 5e^{\frac{4}{\varepsilon}}}{1 - e^{\frac{4}{\varepsilon}}} b_1 + \left(3 + e^{-\frac{4}{\varepsilon}}\right) b_2,\;\; C_4 = e,$$

$$C_5 = -\left(2e^{-\frac{4}{\varepsilon}} b_1 + \left(1 - e^{-\frac{4}{\varepsilon}}\right) b_2 - \frac{e^{1+2\varepsilon}}{4 - \varepsilon^4}\right) e^{-\frac{4}{\varepsilon}},\;\; C_6 = 2b_1 - \left(1 - e^{\frac{4}{\varepsilon}}\right) b_2,$$

где

$$b_1 = \frac{e^{1+\varepsilon}}{e^{-\frac{6}{\varepsilon}} + 2e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 5e^{\frac{2}{\varepsilon}}} \left(\frac{e^{\varepsilon - \frac{2}{\varepsilon}} + 1 - \varepsilon^2}{4 - \varepsilon^4} + \frac{1}{4 - \varepsilon^2(1+\varepsilon)^2} - \frac{5 - \varepsilon^2(1+\varepsilon)^2}{4 - \varepsilon^2(1+\varepsilon)^2} e^{-1-\varepsilon+\frac{2}{\varepsilon}}\right),$$

$$b_2 = \frac{e^{1+\varepsilon}}{2(e^{-\frac{6}{\varepsilon}} + 2e^{-\frac{2}{\varepsilon}} + 5e^{\frac{2}{\varepsilon}})} \left(\frac{2e^{\varepsilon - \frac{2}{\varepsilon}} + 4 - 3\varepsilon^2}{4 - \varepsilon^4} + \frac{2 - \varepsilon(1+\varepsilon)}{4 - \varepsilon^2(1+\varepsilon)^2}\right).$$

Найдём приближение нулевого порядка в асимптотическом разложении вида (4) для решения задачи (49) - (51).

В силу (8) имеем

$$\overset{(1)}{\Pi}_0 x(\tau_0) = \overset{(1)}{Q}_0 x(\tau_1) = \overset{(2)}{\Pi}_0 x(\tau_1) = \overset{(2)}{Q}_0 x(\tau_2) \equiv 0.$$

Для нахождения $\overset{(j)}{\overline{u}}_0(t)$, $\overset{(j)}{\overline{x}}_0(t)$, $\overset{(j)}{\overline{y}}_0(t)$ решаем задачу

$$\overline{P}_0\colon\; \overline{J}_0(\overline{u}_0) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left((\overset{(1)}{\overline{x}}_0)^2 + 2\overset{(1)}{\overline{x}}_0\overset{(1)}{\overline{y}}_0 + 3(\overset{(1)}{\overline{y}}_0)^2 + (\overset{(1)}{\overline{u}}_0)^2\right) dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int_1^2 \left((\overset{(2)}{\overline{x}}_0)^2 + (\overset{(2)}{\overline{y}}_0)^2 + \frac{1}{3}(\overset{(2)}{\overline{u}}_0)^2\right) dt \to \min_{\overline{u}_0}, \tag{57}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\overset{(1)}{\overline{x}}}_0 = \overset{(1)}{\overline{x}}_0, \quad 0 = -\overset{(1)}{\overline{y}}_0 + \overset{(1)}{\overline{u}}_0, \\ &\dot{\overset{(2)}{\overline{x}}}_0 = 0, \quad 0 = \overset{(2)}{\overline{x}}_0 - \overset{(2)}{\overline{y}}_0 + \overset{(2)}{\overline{u}}_0, \end{aligned} \tag{58}$$

$$\overset{(1)}{\overline{x}}_0(0) = 1, \quad \overset{(2)}{\overline{x}}_0(1) = \overset{(1)}{\overline{x}}_0(1). \tag{59}$$

В силу Утверждений 1 – 3 решение задачи (57) – (59) можно найти из системы, состоящей из (58), (59) и равенств

$$\begin{cases} \dot{\overset{(1)}{\overline{\varphi}}}_0 = \overset{(1)}{\overline{x}}_0 + \overset{(1)}{\overline{y}}_0 - \overset{(1)}{\overline{\varphi}}_0, \\ 0 = \overset{(1)}{\overline{x}}_0 + 3\overset{(1)}{\overline{y}}_0 + \overset{(1)}{\overline{\psi}}_0, \\ \overset{(1)}{\overline{u}}_0 = \overset{(1)}{\overline{\psi}}_0, \quad 0 \le t \le 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\overset{(2)}{\overline{\varphi}}}_0 = \overset{(2)}{\overline{x}}_0 - \overset{(2)}{\overline{\psi}}_0, \\ 0 = \overset{(2)}{\overline{y}}_0 + \overset{(2)}{\overline{\psi}}_0, \\ \overset{(2)}{\overline{u}}_0 = 3\overset{(2)}{\overline{\psi}}_0, \quad 1 \le t \le 2, \end{cases} \tag{60}$$
$$\overset{(2)}{\overline{\varphi}}_0(2) = 0, \quad \overset{(1)}{\overline{\varphi}}_0(1) = \overset{(2)}{\overline{\varphi}}_0(1).$$

Найдём решение этой системы:

$$\overset{(1)}{\overline{x}}_0(t) = e^t,\;\; \overset{(1)}{\overline{y}}_0(t) = \overset{(1)}{\overline{u}}_0(t) = \overset{(1)}{\overline{\psi}}_0(t) = -\frac{1}{4}e^t,\;\; \overset{(1)}{\overline{\varphi}}_0(t) = \frac{1}{8}\left(3e^t - 13e^{2-t}\right),\; 0 \le t \le 1,$$

$$\overset{(2)}{\overline{x}}_0(t) = e,\;\; \overset{(2)}{\overline{y}}_0(t) = \frac{1}{4}e,\;\; \overset{(2)}{\overline{u}}_0(t) = -\frac{3}{4}e,\;\; \overset{(2)}{\overline{\psi}}_0(t) = -\frac{1}{4}e,\;\; \overset{(2)}{\overline{\varphi}}_0(t) = \frac{5}{4}e(t-2),\; 1 \le t \le 2.$$

Задачи для определения погранслойных функций нулевого порядка в асимптотическом разложении для функций $y(t,\varepsilon)$ и $u(t,\varepsilon)$ имеют следующий вид:

$$\Pi 1P_0\colon \Pi 1J_0(\overset{(1)}{\Pi}_0 u) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left\{3(\overset{(1)}{\Pi}_0 y)^2 + (\overset{(1)}{\Pi}_0 u)^2\right\}d\tau_0 \to \min_{\overset{(1)}{\Pi}_0 u}, \tag{61}$$

$$\frac{d\overset{(1)}{\Pi}_0 y}{d\tau_0} = -\overset{(1)}{\Pi}_0 y + \overset{(1)}{\Pi}_0 u,\;\; \tau_0 \ge 0, \tag{62}$$

$$\overset{(1)}{\Pi}_0 y(0) = \frac{5}{4}, \tag{63}$$

$$\begin{aligned}\Pi 2P_0\colon \Pi 2J_0(\overset{(1)}{Q}_0 u, \overset{(2)}{\Pi}_0 u) = -\frac{e}{4}\left(\overset{(1)}{Q}_0 y(0) - \overset{(2)}{\Pi}_0 y(0)\right) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \Big\{3(\overset{(1)}{Q}_0 y)^2 + \\ + (\overset{(1)}{Q}_0 u)^2\Big\}d\tau_1 + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left\{(\overset{(2)}{\Pi}_0 y)^2 + \frac{1}{3}(\overset{(2)}{\Pi}_0 u)^2\right\}d\tau_1 \to \min_{\left(\overset{(1)}{Q}_0 u, \overset{(2)}{\Pi}_0 u\right)},\end{aligned} \tag{64}$$

$$\frac{d\overset{(1)}{Q}_0 y}{d\tau_1} = -\overset{(1)}{Q}_0 y + \overset{(1)}{Q}_0 u,\; \tau_1 \le 0, \quad \frac{d\overset{(2)}{\Pi}_0 y}{d\tau_1} = -\overset{(2)}{\Pi}_0 y + \overset{(2)}{\Pi}_0 u,\; \tau_1 \ge 0, \tag{65}$$

$$\overset{(1)}{Q}_0 y(-\infty) = 0,\;\; \overset{(1)}{Q}_0 y(0) - \overset{(2)}{\Pi}_0 y(0) = \frac{1}{2}e. \tag{66}$$

$$\Pi 3P_0\colon \Pi 3J_0(Q_{20}u) = -\frac{1}{4}e\overset{(2)}{Q}_0 y(0) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0\left\{(\overset{(2)}{Q}_0 y)^2 + \frac{1}{3}(\overset{(2)}{Q}_0 u)^2\right\}d\tau_2 \to \min_{\overset{(2)}{Q}_0 u}, \tag{67}$$

$$\frac{d\overset{(2)}{Q}_0 y}{d\tau_2} = -\overset{(2)}{Q}_0 y + \overset{(2)}{Q}_0 u,\;\; \tau_2 \le 0, \tag{68}$$

$$\overset{(2)}{Q}_0 y(-\infty) = 0. \tag{69}$$

В силу Утверждений 4 – 6 решение задачи (61) – (63) можно найти из системы, состоящей из (62), (63) и равенств

$$\frac{d\overset{(1)}{\Pi}_0\psi}{d\tau_0} = 3\overset{(1)}{\Pi}_0 y + \overset{(1)}{\Pi}_0\psi,\;\; \overset{(1)}{\Pi}_0 u = \overset{(1)}{\Pi}_0\psi,\;\; \tau_0 \ge 0,$$

$$\overset{(1)}{\Pi}_0\psi(+\infty) = 0.$$

Найдём решение этой системы:

$$\overset{(1)}{\Pi}_0 y(\tau_0) = \frac{5}{4}e^{-2\tau_0}, \quad \overset{(1)}{\Pi}_0 u(\tau_0) = \overset{(1)}{\Pi}_0 \psi(\tau_0) = -\frac{5}{4}e^{-2\tau_0}, \quad \tau_0 \geq 0.$$

В силу Утверждений 7 – 9 решение задачи (64) – (66) можно найти из системы, состоящей из (65), (66) и равенств

$$\frac{d\overset{(1)}{Q}_0 \psi}{d\tau_1} = 3\overset{(1)}{Q}_0 y + \overset{(1)}{Q}_0 \psi, \quad \overset{(1)}{Q}_0 u = \overset{(1)}{Q}_0 \psi, \quad \tau_1 \leq 0,$$

$$\frac{d\overset{(2)}{\Pi}_0 \psi}{d\tau_1} = \overset{(2)}{\Pi}_0 y + \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi, \quad \overset{(2)}{\Pi}_0 u = 3\overset{(2)}{\Pi}_0 \psi, \quad \tau_1 \geq 0,$$

$$\overset{(1)}{Q}_0 \psi(0) - \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(0) = 0, \quad \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(+\infty) = 0.$$

Найдём решение этой системы:

$$\overset{(1)}{Q}_0 y(\tau_1) = \frac{1}{20}e^{1+2\tau_1}, \quad \overset{(1)}{Q}_0 u(\tau_1) = \overset{(1)}{Q}_0 \psi(\tau_1) = \frac{3}{20}e^{1+2\tau_1}, \quad \tau_1 \leq 0,$$

$$\overset{(2)}{\Pi}_0 y(\tau_1) = -\frac{9}{20}e^{1-2\tau_1}, \quad \overset{(2)}{\Pi}_0 u(\tau_1) = 3\overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(\tau_1) = \frac{9}{20}e^{1-2\tau_1}, \quad \tau_1 \geq 0.$$

В силу Утверждений 10 – 12 решение задачи (67) – (69) можно найти из системы, состоящей из (68), (69) и равенств

$$\frac{d\overset{(2)}{Q}_0 \psi}{d\tau_2} = \overset{(2)}{Q}_0 y + \overset{(2)}{Q}_0 \psi, \quad \overset{(2)}{Q}_0 u = 3\overset{(2)}{Q}_0 \psi, \quad \tau_2 \leq 0,$$

$$\overset{(2)}{Q}_0 \psi(0) = \frac{1}{4}e.$$

Найдём решение этой системы:

$$\overset{(2)}{Q}_0 y(\tau_2) = \frac{1}{4}e^{1+2\tau_2}, \quad \overset{(2)}{Q}_0 u(\tau_2) = 3\overset{(2)}{Q}_0 \psi(\tau_2) = \frac{3}{4}e^{1+2\tau_2}, \quad \tau_2 \leq 0.$$

Итак, имеем следующее приближение нулевого порядка для решения задачи P_ε:

$$\overset{(1)}{\widetilde{x}}_0(t,\varepsilon) = e^t, \quad \overset{(1)}{\widetilde{y}}_0(t,\varepsilon) = -\frac{1}{20}\Big(5e^t - 25e^{-2\frac{t}{\varepsilon}} - e^{1+2\frac{t-1}{\varepsilon}}\Big),$$

$$\overset{(1)}{\widetilde{u}}_0(t,\varepsilon) = -\frac{1}{20}\Big(5e^t + 25e^{-2\frac{t}{\varepsilon}} - 3e^{1+2\frac{t-1}{\varepsilon}}\Big),$$

$$\overset{(2)}{\widetilde{x}}_0(t,\varepsilon) = e, \quad \overset{(2)}{\widetilde{y}}_0(t,\varepsilon) = \frac{1}{20}e\Big(5 - 9e^{-2\frac{t-1}{\varepsilon}} + 5e^{2\frac{t-2}{\varepsilon}}\Big),$$

$$\overset{(2)}{\widetilde{u}}_0(t,\varepsilon) = -\frac{3}{20}e\Big(5 - 3e^{-2\frac{t-1}{\varepsilon}} - 5e^{2\frac{t-2}{\varepsilon}}\Big).$$

На рис. 1 – 2 изображены графики функций $u(t,\varepsilon)$, $\overline{u}_0(t)$, $\widetilde{u}_0(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0,5$ и $\varepsilon = 0,1$ соответственно. На рис. 3 – 4 изображены графики функций $x(t,\varepsilon)$, $\overline{x}_0(t) =$

$\widetilde{x}_0(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0,5$ и $\varepsilon = 0,1$ соответственно. На рис. 5 – 6 изображены графики функций $y(t,\varepsilon)$, $\overline{y}_0(t)$, $\widetilde{y}_0(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0,5$ и $\varepsilon = 0,1$ соответственно. При этом сплошной линией обозначается точное решение, линией, состоящей из кружков, – вырожденное решение, а линией, состоящей из ромбиков, – приближение нулевого порядка.

В табл. 1 приведено минимальное значение функционала (49) и значения этого функционала, соответствующие $u = \overline{u}_0$ и $u = \widetilde{u}_0$, при значениях параметра $\varepsilon = 0,5$ и $\varepsilon = 0,1$.

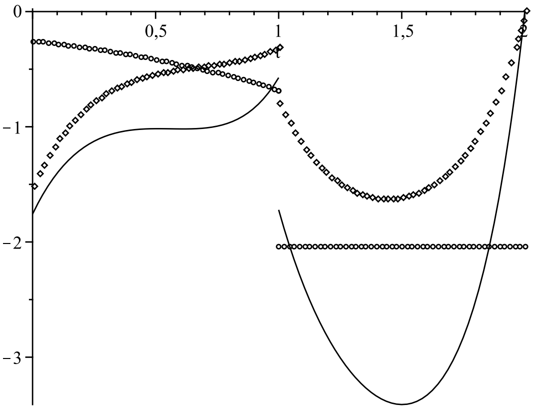

Рис. 1.

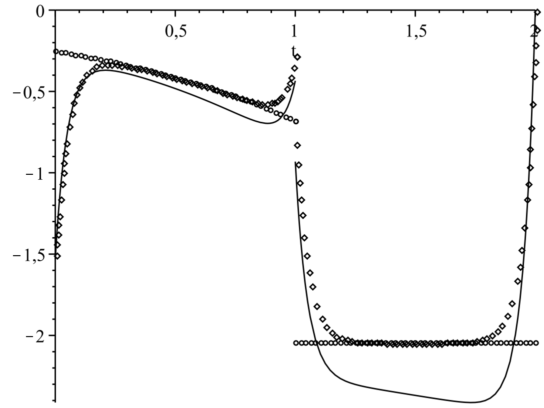

Рис. 2.

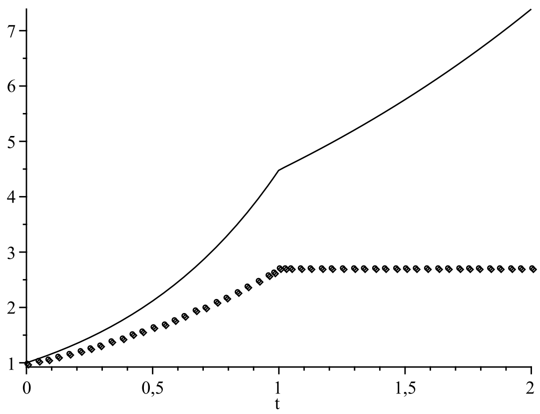

Рис. 3.

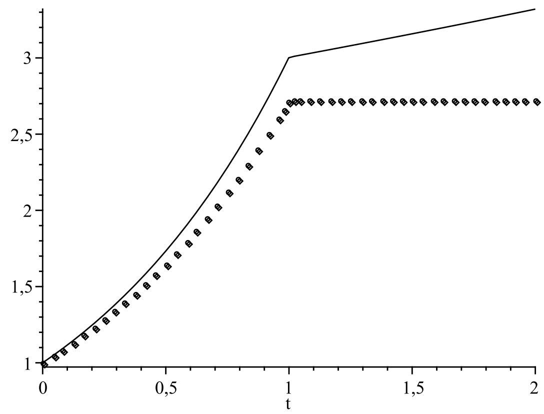

Рис. 4.

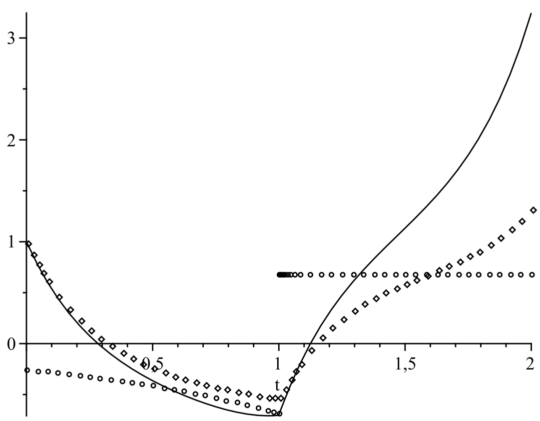

Рис. 5.

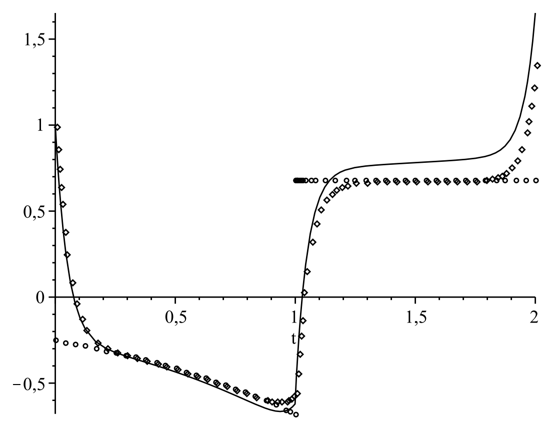

Рис. 6.

ε	0.5	0.1
$J_\varepsilon(\overline{u}_0)$	23.926	7.7496
$J_\varepsilon(\widetilde{u}_0)$	24.1107	7.7015
$J_\varepsilon(u)$	22.9581	7.6325

Табл. 1.

В заключение выражаем глубокую благодарность Е.В. Смирновой за полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Belokopytov S. V., Dmitriev M. G. Direct scheme in optimal control problems with fast and slow motions // Systems and Control Letters. 1986. V. 8, № 2. P. 129 - 135.*

2. *Белокопытов С. В., Дмитриев М. Г. Решение классических задач оптимального управления с погранслоем // Автоматика и телемеханика. 1989. № 7. С. 71 - 82.*

3. *Дмитриев М. Г., Курина Г. А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3 - 51.*

4. *Ащепков Л. Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск: Наука, 1987.*

5. *Покорная И. Ю. Метод коллокации решения сингулярно возмущенных краевых задач с помощью кубических сплайнов минимального дефекта: Автореферат дис. ... канд. физ. - мат. наук. Воронеж, 1996.*

6. *Мельник Т. А. Асимптотика решений разрывных сингулярно возмущённых краевых задач // Украинский математический журнал. 1999. Т. 51. № 6. С. 861 - 864.*

7. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.*

8. *Леллеп Я. Основы математической теории оптимального управления. Тарту: Тартуский государственный университет, 1981.*

On a zero order approximation of an asymptotic solution for a singularly perturbed linear-quadratic control problem with discontinuous coefficients

Kurina G.A., Nguyen T.H.

Keywords: linear-quadratic optimal control problem, singular perturbations, discontinuous coefficients, asymptotic expansion

The paper deals with a formalism of constructing a zero order approximation of an asymptotic solution for a singularly perturbed linear-quadratic optimal control problem with discontinuous coefficients. This formalism is based on immediate substituting a postulated asymptotic expansion of boundary layer type for the solution into the problem condition and on defining four optimal control problems for finding asymptotics terms. The unique solvability of the problems, the solutions of which form the zero order approximation for the asymptotic solution, is proven. An illustrative example is given.

Сведения об авторах:
Курина Галина Алексеевна,
Воронежская государственная лесотехническая академия,
профессор, доктор физ.- мат. наук;
Нгуен Тхи Хоай,
Воронежская государственная лесотехническая академия, аспирант.