Модел. и анализ информ. систем. Т. **17**, № **2** (2010) 17–27

УДК 517.929.8

Мультистабильность в модели лазера с большим запаздыванием

Григорьева Е. В., Кащенко И. С., Кащенко С. А.[1]

Белорусский государственный университет
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

e-mail: grigorieva@tut.by, iliyask@uniyar.ac.ru, kasch@uniyar.ac.ru

получена 25 мая 2010 года

Ключевые слова: запаздывание, сингулярное возмущение, нормальная форма

Исследуется модель динамики генерации лазера, основанная на одномодовых балансных уравнениях с запаздывающим аргументом. Методами локального анализа построены континуальные наборы семейств квазинормальных форм в окрестности бифуркационных значений параметров. Показана возможность сосуществования большого числа установившихся осциллирующих режимов.

1. Постановка задачи. Явления би- и мультистабильности – сосуществования двух или более устойчивых состояний системы при одних и тех же параметрах – находят широкое применение в технике и информационных системах. В последнее время вновь активно обсуждается мультистабильность, индуцированная запаздыванием, см. работы [1]– [3] и ссылки в них. Особенность эффекта состоит в том, что во-первых, устойчивыми являются не стационарные, а осциллирующие с разными частотами режимы, а во-вторых, при увеличении времени запаздывания число таких сосуществующих аттракторов может увеличиваться. Для оптоэлектронных лазерных систем мультистабильность была описана ранее в [4],[5] методами нелокального анализа релаксационных режимов при большом значении одного из параметров лазера. В этой статье на основе локального анализа показана возможность мультистабильности в лазерной системе с большим запаздыванием в оптоэлектронной цепи обратной связи, управляющей внутрирезонаторными потерями. Мультистабильность проявляется как сосуществование осциллирующих с разными частотами и не глубокой модуляцией режимов в областях параметров, где могут также реализоваться и импульсные колебания.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт №2223).

Рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} =& vu(y-1-\gamma u(t-T)),\\ \dot{y} =& q-y-yu, \end{aligned} \tag{1}$$

где переменная u пропорциональна плотности фотонов, y — пропорционально инверсии населённостей, $q>1$ — скорость накачки, v — отношение скорости затухания фотонов в резонаторе к скорости релаксации населенностей, постоянные потери резонатора нормированы к единице. Дополнительные внутрирезонаторные потери вводятся с помощью ячейки Керра, управляемой оптоэлектронной цепью обратной связи, и описываются членом $\gamma u(t-T)$, где T – время распространения в цепи и преобразования оптического сигнала в электрический, γ – коэффициент обратной связи. В лазерных системах имеют смысл значения $0<\gamma<1$. Впервые схема использовалась для стабилизации излучения (подавления пичков) рубинового лазера [6]. Математическая модель (1) справедлива при рассмотрении режимов генерации со временем изменения характеристик излучения, значительно превышающих время прохода излучения по резонатору.

Динамика системы (1) изучалась многими авторами. Отметим, что в работе [4] на основе специально разработанного асимптотического метода исследования нелокальной динамики уравнений с запаздыванием [7] было показано, что при условии, когда параметр v достаточно велик (в реальных системах он имеет порядок 10^3-10^4), в системе (1) наблюдаются разнообразные пичковые колебания большой амплитуды и малой длительности. При условии, когда параметр q достаточно велик, в системе (1) наблюдаются разнообразные импульсные режимы достаточно большой амплитуды с длительностью, сравнимой с временем запаздывания. Доказано сосуществование таких решений при дополнительном малом внешнем воздействии. В работах [8, 9] тоже при условии достаточно большого v исследовалась локальная динамика в малой окрестности состояния равновесия другой системы с запаздывающей модуляцией накачки. Показано, что критический случай в задаче об устойчивости равновесия имеет бесконечную размерность. На основе предложенного в [10]– [13] метода построения квазинормальных форм, построены специальные универсальные нелинейные эволюционные уравнения, нелокальная динамика которых определяет поведение решений в малой окрестности состояний равновесия. В зависимости от величины запаздывания T эти уравнения могут быть как уравнениями с запаздыванием, так и уравнениями параболического типа [8, 9].

В настоящей работе анализируется локальная динамика системы (1) в малой окрестности состояния равновесия (u_0, v_0)

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{1+\gamma}{2\gamma} + \frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+4\gamma(q-1)}}{2\gamma},\\ y_0 &= \frac{1-\gamma}{2} + \frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+4\gamma(q-1)}}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Основное предположение заключается в том, что время запаздывания T является достаточно большим (значительно больше времени затухания фотонов в резонаторе и времени релаксации инверсии населенностей):

$$\tau \gg 1, \ \text{ т.е. } \varepsilon = \tau^{-1} \ll 1. \tag{3}$$

При этом условии рассмотрим вопрос о поведении всех решений системы (1) с начальными условиями из некоторой достаточно малой (но не зависящей от ε) окрестности состояния равновесия (2). На основе метода квазинормальных форм [10, 11] будут построены специальные континуальные наборы семейств нелинейных эволюционных уравнений, нелокальная динамика которых описывает решения (1) из окрестности (2). Каждый представитель соответствующих семейств будет определять поведение тех или иных установившихся структур, а значит, соответствующая локальная динамика будет настолько богата, что имеет смысл говорить о явлении гипермультистабильности.

В (1) произведем замену. Положим

$$u = u_0 + u_1, \qquad y = y_0 + y_1.$$

В результате, опуская индекс «1», приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{u} = -vu_0\gamma u(t-T) + vu_0 y + v(uy - \gamma uu(t-T)), \\ \dot{y} = -(1+\gamma u_0)u - (1+u_0)y - uy. \end{cases} \tag{4}$$

В дальнейшем предполагаем, что выполнено условие локальности, т.е. в (4) значения u и y достаточно малы.

2. Анализ линеаризованной системы. Важную роль для определения локальной (теперь уже в окрестности нулевого состояния равновесия) динамики (4) играет поведение решений линеаризованной в нуле системы

$$\dot{w} = Aw + \gamma Bw(t-T), \tag{5}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a = 1 + u_0$, $b = vu_0$, $c = 1 + \gamma u_0$.

В свою очередь, поведение решений системы (5) определяется корнями его характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \lambda[a + \gamma b \exp(-\lambda T)] + ab\gamma \exp(-\lambda T) + bc = 0. \tag{6}$$

Учтем, что $T = \varepsilon \ll 1$. В том случае, когда все корни уравнения (6) имеют отрицательные вещественные части и отделены от мнимой оси при $\varepsilon \to 0$, все решения (4) из малой (и не зависящей от ε) окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю при $t \to \infty$. В этом случае локальная динамика тривиальна – стационарное решение устойчиво. Если же у (6) при каждом достаточно малом ε найдется корень с положительной (и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$) вещественной частью, поставленная задача становится нелокальной. Здесь будут рассмотрены критические в задаче об устойчивости $u = y = 0$ случаи, когда у (6) нет корней с положительной (и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$) вещественной частью, и есть корни, находящиеся в малой (при $\varepsilon \to 0$) окрестности мнимой оси на комплексной плоскости. Для определения условия существования таких корней положим в (6) $\lambda = i\omega$. Получим, что

$$-\omega^2 + i\omega[a + \gamma b \exp(-i\omega T)] + ab\gamma \exp(-i\omega T) + bc = 0. \tag{7}$$

Отсюда

$$\exp(i\omega T)[ab\gamma + i\omega b\gamma] = \omega^2 - i\omega a - bc$$

и, как следствие, полагая $z = \omega^2$, получаем

$$(z - bc)^2 + z[a^2 - \gamma^2 b^2] - \gamma^2 a^2 b^2 = 0. \qquad (8)$$

Уравнение (8) заведомо разрешимо, например, $z = \omega^2 = 0$ при $\gamma = -1$.

Отметим, далее, что при $\gamma = 0$ система (4) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, и все решения из окрестности нуля ($u = y = 0$) стремятся к нулю при $t \to \infty$, и соответственно все корни (6) имеют отрицательные вещественные части. Нас будет интересовать «первое» положительное значение $\gamma = \gamma_+ < 1$ и первое отрицательное значение при $\gamma = \gamma_- \geq -1$ такие, что при $\gamma = \gamma_\pm$ уравнение (8) разрешимо, а при $\gamma \in [0, \gamma_+)$ и $\gamma \in (\gamma_-, 0)$ уравнение (8) не имеет неотрицательных решений.

Займемся определением γ_+ и γ_-. Уравнение (8) перепишем в виде

$$z^2 - z(2bc - a^2 + \gamma^2 b^2) + b^2(c^2 - \gamma^2 a^2) = 0. \qquad (9)$$

Дискриминант квадратного трехчлена (9) имеет вид

$$d(\gamma) = (a^2 + \gamma^2 b^2)^2 - 4bc(a^2 - \gamma^2 b^2).$$

Обозначим через $\widetilde{\gamma}_\pm$ соответственно наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения

$$d(\gamma) = 0.$$

Положим $\gamma_+ = \min(\widetilde{\gamma}_+, 1)$, $\gamma_- = \max(\widetilde{\gamma}_-, -1)$. Интересно отметить, что при достаточно больших q имеем

$$\gamma_+ = \frac{1}{2V} + O(q^{-1}). \qquad (10)$$

Через $z_\pm = \omega_\pm^2$ обозначим решение уравнения (9) соответственно при $\gamma = \gamma_+$ и $\gamma = \gamma_-$. Из (9) следует, что

$$z_\pm = \omega_\pm^2 = \frac{1}{2}[2bc - a^2 + (\gamma b)^2]. \qquad (11)$$

В дальнейшем через γ_0 будем обозначать либо γ_+, либо γ_- (в зависимости от знака параметра γ), а через ω_0, соответственно, либо ω_+, либо ω_-. Соответственно получим стационарные решения $u_0 = u_0(\gamma_0)$ и обозначения $a_0 = 1 + u_0$, $b_0 = v\gamma_0 u_0$, $c_0 = 1 + \gamma_0 u_0$.

Введем затем ещё несколько обозначений. Пусть $\Theta = \Theta(\varepsilon)$ — значение из промежутка $[0, 2\pi)$, которое дополняет величину $\omega_0 T$ до целого кратного 2π, а выражение $\varkappa \in [0, 2\pi)$ определяется формулой

$$\exp(i\varkappa)[a_0 b_0 \gamma + i\omega\gamma b_0] = \omega^2 - i\omega a - b_0 c_0. \qquad (12)$$

Эти обозначения позволяют в удобной форме выписать некоторую совокупность таких корней характеристического уравнения (6), которые при малых ε находятся в малой окрестности мнимой оси.

Утверждение 1. *При условии*

$$\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^2\gamma_1 \tag{13}$$

характеристическое уравнение (6) *имеет такое множество корней* λ_k (ε) *(*$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$*), для каждого из которых верно асимптотическое представление*

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\omega_0 + i\varepsilon(\Theta + 2k\pi + \varkappa) + \varepsilon^2\lambda_{k_1} + \varepsilon^3\lambda_{k_2} + O(\varepsilon^4), \tag{14}$$

где

$$\lambda_{k_1} = -i\Delta[\Theta + 2k\pi + \varkappa], \tag{15}$$

$$\Delta = 2\omega_0(i\omega_0\gamma_0\exp(-i\varkappa) - (a_0 + \gamma_0\exp(-i\varkappa)))^{-1}, \quad \operatorname{Im}\Delta = 0,$$

$$\lambda_{k_2} = -\sigma(\Theta + 2k\pi + \varkappa)^2 + \Delta(\Theta + 2k\pi + \varkappa) + C, \tag{16}$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\Delta^2 - [\gamma_0 b_0\exp(-i\varkappa)\Delta^2 - 1][i\omega_0\gamma_0 b_0 + b_0 c_0\gamma_0]^{-1}\exp(i\varkappa),$$

$$\delta = -[i\omega_0\gamma_0 b_0 + b_0 c_0\gamma_0]^{-1}\exp(i\varkappa)2\omega_0\Delta,$$

$$C = g\Big[i\omega_0\gamma_0 b_0 + b_0 c_0\gamma_0\Big]^{-1}\exp(i\varkappa)\Big\{g[i\omega_0(1 + b + 0\gamma_0\exp(-i\varkappa) + a_0 b_0\exp(-i\varkappa) +$$
$$+ \gamma_0 b_0\exp(-i\varkappa) + vc_0 + b_0\gamma_0)] + i\omega_0 b_0\exp(-i\varkappa) + a_0 b_0\exp(-i\varkappa) + a_0 b_0\Big\},$$

$$g = \frac{1}{2\gamma_0}\Big[\frac{1}{\gamma_0} - \frac{\gamma_0 + 2q - 1}{\sqrt{(1+\gamma_0)^2 + 4\gamma_0(q-1)}}\Big].$$

При условии $\operatorname{Re}\sigma < 0$ задача о динамике решений (4) из малой окрестности нулевого состояния равновесия является нелокальной: существуют корни (6), вещественные части которых положительны и отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$. Ниже дополнительно предполагаем, что

$$\operatorname{Re}\sigma > 0. \tag{17}$$

Обратим внимание, что при больших значениях параметра v неравенство (17) выполнено.

Отметим, что $\lambda_k(\varepsilon)$ разрывны по ε (в силу разрывной зависимости от ε функции $\Theta(\varepsilon)$), неограниченно растут по модулю при уменьшении ε, а главное — асимптотические равенства (14) неравномерны по номеру k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Как оказывается, некоторые совокупности корней (14) можно представить и по-иному. Для того, чтобы показать это, введем ещё несколько обозначений.

Фиксируем произвольно параметр $\alpha \in (0, 1)$ и натуральное n. Выберем произвольно n положительных чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Обозначим через $\Theta_j = \Theta_j(\omega, \varepsilon)$ такое число из полуинтервала $[0, 2\pi)$, что выражение $\omega_j\varepsilon^{-\alpha} + \Theta_j(\omega, \varepsilon)$ является целым кратным 2π. Положим $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$, $K = (k_1, \ldots, k_n)$, где $k_j \in Z$ (Z — множество всех целых чисел на числовой оси, $j = 0, \ldots, n$).

Положим затем

$$\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^{2\alpha}\gamma_1. \tag{18}$$

Непосредственно проверяется, что характеристическое уравнение (6) имеет совокупность корней (вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$) вида

$$\begin{aligned}\lambda_k(\Omega,\varepsilon) =&\omega_0 i + i(\Omega,K)\varepsilon^{1-\alpha} + \varepsilon\Big(i\Theta_0 + i(\Theta,K) + 2\pi K_0 i + \varkappa i\Big) - \\ &- i2\varepsilon^{2-\alpha}\frac{(\Omega,K)}{\sigma} + 2\varepsilon^{3-2\alpha}(\Omega,K)^2\sigma + \varepsilon^{2\alpha}C + o(\varepsilon^{2\alpha},\varepsilon^{2(1-\alpha)}).\end{aligned} \tag{19}$$

В заключение этого пункта отметим, что собственным значениям – корням $\lambda_k(\varepsilon)$ и $\lambda_k(\Omega,\varepsilon)$ характеристического уравнения (6) отвечают собственные решения линейной системы (5) при $\gamma = \gamma_0 + o(1)$ вида

$$w(t,\varepsilon) = [w_0 + o(1)]\exp\Big[i\omega_0\varepsilon^{-1}(1+o(1))t)\Big],$$

где $w_0 = (a_0 - i\omega_0, c_0)$, а вектор-функции $w_0\exp(i\omega_0 t)$ и $\overline{w}_0\exp(-i\omega_0 t)$ являются решениями линейной системы

$$\dot{w} = Cw, \tag{20}$$

в которой

$$C = A_0 + \gamma_0\exp(-i\varkappa)B_0.$$

3. **Построение квазинормальной формы** при условии (13)

$$\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^2\gamma_1.$$

Напомним, что при этом условии вещественные части бесконечного множества корней характеристического квазиполинома (6) стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Это, в частности, означает, что в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия системы (4) реализуется критический случай бесконечной размерности. Стандартные методы исследования, базирующиеся на использовании методов локальных инвариантных интегральных многообразий и нормальных форм, непосредственно неприменимы, однако формализм этих методов существенно используется. Соответствующие построения детально разработаны в [10]–[13]. Согласно этим результатам, сначала введем в рассмотрение формальный ряд

$$\begin{aligned}U(t,\varepsilon) =&\varepsilon\Big[w(\tau,\tau_1)\exp[i\omega_0 t]w_0 + \overline{w}(\tau,\tau_1)\exp(-i\omega t)\overline{w}_0\Big] + \\ &+ \varepsilon^2 U_2(t,\tau,\tau_1) + \varepsilon^3 U_3(t,\tau,\tau_1) + \ldots,\end{aligned} \tag{21}$$

в котором $\tau = \varepsilon^3 t$, $\tau_1 = \varepsilon(1+\varepsilon\Delta)t$,

$$w(\tau,\tau_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_k(\tau)\exp\Big(i[\Theta + 2k\pi + \varkappa]\tau_1\Big),$$

а $U_j(t,\tau,\tau_1)$ являются $\frac{2\pi}{\omega_0}$-периодическими функциями по первому аргументу.

Систему (4) удобно записать в векторной форме относительно $U = (u_1, u_2)$, ($u_1 = u$, $u_2 = y$):

$$\dot{u} = AU + \gamma BU(t-\tau) + u_1u_2\begin{pmatrix} v \\ -1\end{pmatrix} - \gamma V u_1 u_1(t-\tau)\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix} \qquad \left(V = \begin{pmatrix} v \\ -1\end{pmatrix}\right). \tag{22}$$

Подставим (21) в (22) и будем, учитывая (13), собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. При первой степени ε соответствующее тождество выполнено, а на втором шаге (собирая коэффициенты при ε^2) приходим к системе уравнений для определения $U_2 = U_{21}\exp(i\omega_0 t) + \overline{U}_{21}\exp(-i\omega_0 t) + U_{22}\exp(2i\omega_0 t) + \overline{U}_{22}\exp(-2i\omega_0 t)$.

На третьем шаге соберем коэффициенты при ε^3. В результате приходим к линейной неоднородной системе уравнений относительно $U_3(t,\tau,\tau_1)$, причем неоднородность содержит гармоники по первому аргументу $\exp(in\omega_0 t)$ с номерами $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3$. Тем самым решение $U_3(t,\tau,\tau_1)$ тоже содержит эти же гармоники. Соответствующие коэффициенты обозначим через $U_{3n}(\tau,\tau_1)$. Для $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3$ вектор-функции $U_{3n}(\tau,\tau_1)$ легко определяются, а для $U_{31}(\tau,\tau_1)$ (и для $U_{3-1}(\tau,\tau_1) = \overline{U}_{31}(\tau,\tau_1)$) получаем систему уравнений вида $CU_{31} = \Gamma$.

Условие разрешимости системы $CU_{31} = \Gamma$ состоит в выполнении равенства $(\Gamma, z_0) = 0$, где $z_0 = (a_0 - i\omega_0, b_0)$. В итоге получаем систему уравнений относительно $w(\tau,\tau_1)$.

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \sigma\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2\sigma(\Theta+\varkappa)\frac{\partial W}{\partial x} + [\sigma(\Theta+\varkappa)^2 + c]W + \rho|W|^2 W \tag{23}$$

с периодическими краевыми условиями

$$W(\tau, x+1) \equiv W(\tau, x). \tag{24}$$

Из-за громоздкости формул явное выражение для величины ρ здесь не приводим.

Коэффициенты (23) зависят от Θ, а значит, от малого параметра ε. При $\varepsilon \to 0$ функция $\Theta(\varepsilon)$ бесконечно много раз принимает каждое значение из полуинтервала $[0, 2\pi)$. Отсюда, в частности, вытекает, что динамика (4) весьма чувствительна к изменению малого параметра ε: при $\varepsilon \to 0$ может наблюдаться неограниченный процесс рождения и гибели тех или иных установившихся режимов. Ниже через $\varepsilon_n(\Theta_0)$ обозначим такую последовательность, что $\varepsilon_n(\Theta_0) \to 0$ и $\Theta(\varepsilon_n(\Theta_0)) = \Theta_0$.

Сформулируем основной результат.

Утверждение 2. *Пусть при некотором* $\Theta = \Theta_0 \in [0, 2\pi)$ *краевая задача* (23), (24) *имеет ограниченное решение* $u^*(\tau, x)$. *Тогда система* (4) *при* $\varepsilon = \varepsilon_n(\Theta_0)$ *имеет асимптотическое по невязке при* $n \to \infty$ *решение* $x(t,\varepsilon)$ *такое, что*

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) =& \varepsilon u^*\left(\varepsilon^3, \varepsilon\left(1+\varepsilon\Delta+\Theta(\varepsilon^2)\right)t\right)\exp\left[i\left(\frac{\omega_0}{\varepsilon}+\Theta_0+\varkappa+\Theta(\varepsilon)\right)\right] + \\ &+ \overline{u}^*\left(\varepsilon^3 t, \varepsilon\left(1+\varepsilon\Delta+\Theta(\varepsilon^2)\right)t\right)\exp\left[-i\left(\frac{\omega_0}{\varepsilon}+\Theta_0+\varkappa+\Theta(\varepsilon)\right)\right] + O(\varepsilon). \end{aligned} \tag{25}$$

В простейших ситуациях, когда, например, $u^*(\tau, x)$ — в определенном смысле – грубое периодическое решение, можно показать, что формула (25) доставляет в качестве решения (4) тор той же, что $u^*(\tau, x)$, устойчивости.

В заключение этого пункта заметим, что краевая задача (24), (25) является уравнением Гинзбурга–Ландау. Известно (см., например, [14]), что она может обладать достаточно богатой динамикой. Из приведенных выше построений следует, что тот же вывод справедлив и для локальной динамики системы (4).

4. Построение семейства квазинормальных форм при условии

$$\gamma = \gamma_0 + \varepsilon^{2\alpha}\gamma_1, \quad \gamma \in (0,1). \tag{26}$$

Здесь параметр γ сильнее отличается от γ_0, по сравнению с предыдущим пунктом (формула (13)), т.е. будем рассматривать решения в более широкой окрестности точки бифуркации (11).

Положим в (22)

$$\begin{aligned} U =&\varepsilon^{\alpha}\Big[\exp\left(i\left[\omega_0 + \varepsilon(\Theta + \varkappa)\right]t\right)\sum_k \xi_k(\tau)\exp(i(K,T_1))W_0 + \\ &+ \exp\left(-i\left[\omega_0 + \varepsilon(\Theta + \varkappa)\right]t\right)\sum_k \overline{\xi}_k(\tau)\exp(-i(K,T_1))\overline{W}_0\Big] + \varepsilon^{2\alpha}U_2 + \varepsilon^{3\alpha}U_3 + \ldots. \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь использованы обозначения из п. 2, $\varepsilon = \varepsilon^{2\gamma+1}t$, $T_1 = (t_1, \ldots, t_n)$, $t_j = \Big(\omega_0\varepsilon^{1-\gamma}$ $+\varepsilon\Theta_j + \varepsilon^{\gamma+1}\omega_j\Delta\Big)t$. Суммирование в (27) происходит по всевозможным целочисленным наборам $K = (k_1, \ldots, k_n)$, а вектор-функции $U_j = U_j(t, t_1, \ldots, t_n)$ периодичны с периодом 2π по каждому из последних n аргументов. Подставляя формальный ряд (27) в (22) и последовательно приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем, что квазинормальные формы в рассматриваемом случае имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 W + cW + \rho|W|^2W \tag{28}$$

с периодическими краевыми условиями по каждой пространственной переменной

$$w(\tau, x_1, \ldots, x_j + \frac{2\pi}{\omega_j}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \equiv w(\tau, x_1, \ldots, x_n) \quad (j = 1, \ldots, n\; x_{n+1} = x_1). \tag{29}$$

Утверждение 3. *Пусть при некоторых n и $\omega_1, \ldots, \omega_n$ краевая задача* (28), (29) *имеет ограниченное решение $w^*(\tau, x_1, \ldots, x_n)$. Тогда система уравнений* (22) *имеет асимптотическое по невязке решение*

$$U(t,\varepsilon) = \varepsilon^{\gamma}\exp\left(i\left[\omega_0 + \varepsilon(\Theta_0 + \varkappa)\right]t\right)w^*(\varepsilon^{1+2\gamma}t, t_1, \ldots, t_n) + O(\varepsilon^{2\gamma}),$$

где $t_j = (\omega_j\varepsilon^{\gamma} + \varepsilon\Theta(\omega_j, \varepsilon) + o(\varepsilon))t$.

Краевая задача (28), (29) является вырожденной параболической краевой задачей. Известно, что её динамика может быть весьма сложной. Кроме этого, уравнение (28) и краевые условия (29) содержат произвольный числовой параметр n ($n = 2, 3, 4, \ldots$) и n континуальных параметров $\omega_0, \ldots, \omega_n$. Для каждых из них решению (28), (29) соответствует асимптотическое по невязке решение (22). Поэтому можно говорить о явлении гипермультистабильности. В этом убеждают и результаты приведенного в [15],[16] численного анализа.

Отметим ещё, что, несмотря на кажущуюся сложность краевых задач (28), (29), они позволяют существенно упростить изучение локальной динамики (22). Как показано выше, решения (22) включают в себя как решения (28), (29), так и относительно быстроосциллирующие функции.

Ещё один важный вывод, подтверждающий возможность гипермультистабильности, связан с численным определением параметров в (1). Суть вопроса состоит в том, что параметры γ_1 и α, фигурирующие в (26), определяются в довольно широком диапазоне. В силу того, что γ существенно влияет на динамику краевой задачи (28), (29), а значит, и на локальную динамику системы (1), заключаем, что в конкретных задачах необходимо рассматривать этот параметр во всем его диапазоне изменения. Поскольку при различных γ динамика, вообще говоря, различна, то получаем и здесь явное указание на возможность явления гипермультистабильности.

Проиллюстрируем это на примерах. Рассмотрим три случая: $\varepsilon = 10^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ и $\varepsilon = 10^{-3}$. Будем полагать, что эти значения «достаточно малы». Отклонение параметра γ от «критического» значения γ_0 обозначим через μ. Пусть этот параметр принимает одно из двух значений: $\mu = 10^{-1}$ и $\mu = 10^{-2}$. Положим $\mu = \varepsilon^{2\gamma}\gamma_1$. Пусть параметр γ $(0 < \gamma < 1)$ лежит в диапазоне $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Тогда в случае

1. $\varepsilon = 10^{-1}$
   (а) $\mu = 10^{-1}$ имеем $\gamma_1 \in \left[\frac{1}{\sqrt{10}}, 1\right]$
   (б) $\mu = 10^{-2}$ имеем $\gamma_1 \in \left[\frac{1}{10^{3/2}}, \frac{1}{10}\right]$
2. $\varepsilon = 10^{-2}$
   (а) $\mu = 10^{-1}$ имеем $\gamma_1 \in [1, 10]$
   (б) $\mu = 10^{-2}$ имеем $\gamma_1 \in \left[\frac{1}{10}, 1\right]$
3. $\varepsilon = 10^{-3}$
   (а) $\mu = 10^{-1}$ имеем $\gamma_1 \in \left[\sqrt{10}, 10^2\right]$
   (б) $\mu = 10^{-2}$ имеем $\gamma_1 \in \left[\frac{1}{\sqrt{10}}, 10\right]$.

Список литературы

1. Yanchuk S., Perlikowski P. Delay and periodicity // Phys. Rev. 2009. E 79. 046221.
2. Loose A., Goswami B. K., Wunsche H.-J.,Henneberger F. Tristability of a semiconductor laser due to time-delayed optical feedback // Phys. Rev. 2009. E 79. 036211.
3. Erneux T., Grasman J. Limit-cycle oscillators subject to a delayed feedback // Phys. Rev. 2008. E 78. 026209.
4. Grigorieva E.V., Kaschenko S.A., Loiko N.A., Samson A.M. Nonlinear dynamics in a laser with a negative delayed feedback // Physica D. 1992. Vol. 59. P. 297–319.
5. Grigorieva E.V., Kaschenko S.A. Regular and chaotic pulsations in lazer diode with delayed feedback // Bifurcations and chaos. 1993. Vol. 6. P. 1515–1528.

6. Statz H., De Mars G.A., Wilson D.T., Tang C.L. Problem of spike elimination in lasers // J. Appl. Phys. 1965. V. 36. P. 1515–1516.

7. Кащенко С.А Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующих задачу хищник-жертва // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, N 4. С. 792–795.

8. Grigorieva E.V., Haken H., Kaschenko S.A. Theory of quasiperiodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // Optics Commun. 1999. V. 165. P. 279–292.

9. Bestehorn M., Grigorieva E.V., Haken H., Kaschenko S.A. Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback // Physica D. 2000. Vol. 145. P. 111–129.

10. Кащенко С.А. Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, N 8.

11. Кащенко С.А. О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // ДАН СССР. 1988. Т. 299, N 5. С. 1049–1053.

12. Кащенко С.А. О коротковолновых бифуркациях в системах с малой диффузией // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307, N 2. С. 269–273.

13. Кащенко С.А. Уравнения Гинзбурга-Ландау — нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. N3. С. 457–465.

14. Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие / Российская академия наук; Отв. ред. серии акад. И.М. Макаров; Отв. реда. издания проф. Г.. Г. Малинецкий и член-кор. РАН С.П. Курдюмов. М.: Наука, 2002. 478 с.

15. Кащенко И.С. Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. 2008. Т. 48. №12. С. 2141–2150.

16. Wolfrum M., Yanchuk S. Eckhaus Instability in Systems with Large Delay // Phys. Rev. Letters. 2006. Vol. 96, 220201 .

Multistability in a laser model with large delay

Grigorieva E. V., Kaschenko I. S., Kaschenko S. A.

Keywords: delay, singular perturbation, normal form

A dynamical model of laser generation based on monomode balance equations with delay is studied. Methods of a local analysis are used to build sets of quasinormal forms in the neighborhood of parameters bifurcation values. The possibility of the coexistence of a large number of steady oscillating states is shown.

Сведения об авторах:
Григорьева Елена Викторовна,
Белорусский государственный университет
доктор физ.-мат. наук, профессор.
Кащенко Илья Сергеевич,
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
канд.-физ. мат. наук, доцент;
Кащенко Сергей Александрович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физ.-мат. наук, профессор,
зав. кафедрой математического моделирования.