Модел. и анализ информ. систем. Т. **17**, № **2** (2010) 99–111

УДК 519.16

О нецелочисленных вершинах релаксаций многогранника задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ

Николаев А. В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: Awern@yandex.ru

получена 11 декабря 2009

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, теория сложности, многогранники, граничные комплексы, задача линейного программирования.

Устанавливаются новые факты, характеризующие множество вершин релаксационного многогранника задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ. В частности, рассмотрен вопрос о сохранении нецелочисленных вершин при переходе к более сильным релаксациям.

Возможность геометрической интерпретации задач дискретной оптимизации (далее ЗДО) была обнаружена около полувека назад [1]. Рассматриваемое в ЗДО множество элементов можно представить в виде множества точек вещественного евклидова пространства R^m. Учитывая, что целевая функция при этом, как правило, является линейной, новая постановка задачи напоминает классическую задачу линейного программирования (ЗЛП). Дальнейшее появление быстродействующих ЭВМ, а также открытие полиномиальных по трудоемкости алгоритмов решения ЗЛП [2] послужили серьезным стимулом для развития этой идеи. Естественно, что для эффективного применения геометрического подхода требуется эффективное (небольшое по объему) линейное описание многогранников, ассоциированных с ЗДО. Оказалось, что для подавляющего большинства известных ЗДО описание фасет их многогранников состоит из экспоненциального по размерности задачи числа линейных ограничений [3,4].

В последние годы появилось большое число работ, в которых устанавливается, что вычислительную сложность задач комбинаторной оптимизации отражают некоторые свойства графов многогранников, порождаемых этими задачами. В частности, заметную роль играет плотность графов многогранников, которая служит нижней границей временной трудоемкости алгоритмов из широкого класса, включающего большинство известных комбинаторных методов. Также показано, что плотность полиномиальна по размерности для полиномиально разрешимых задач и экспоненциальна для труднорешаемых [3].

Таким образом, большой интерес представляет рассматриваемый в данной статье релаксационный многогранник известной NP-полной комбинаторной задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ. Плотность его графа, как мера сложности связанных с ним задач, экспоненциальна. В то же время многогранник задается сравнительно компактным внешним описанием, число его фасет линейно по размерности пространства, что позволяет применять на нем эффективные по трудоемкости алгоритмы линейного программирования.

Рассмотрим многогранник $M_{m,n} \subseteq R^{6mn}$. Описывающие его внешние ограничения имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k,l} x_{i,j}^{k,l} &= 1, && (1)\\
x_{i,j}^{1,1} + x_{i,j}^{2,1} + x_{i,j}^{3,1} &= x_{i,t}^{1,1} + x_{i,t}^{2,1} + x_{i,t}^{3,1}, && (2)\\
x_{i,j}^{k,1} + x_{i,j}^{k,2} &= x_{s,j}^{k,1} + x_{s,j}^{k,2}, && (3)\\
x_{i,j}^{k,l} &\geq 0, && (4)
\end{aligned}
$$

где $k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2$; $i, s = 1, 2 \ldots m$; $j, t = 1, 2 \ldots n$.

Координаты точек многогранника $M_{m,n}$ удобно представлять в виде матрицы из $m \times n$ блоков следующего вида:

$x_{i,j}^{1,1}$	$x_{i,j}^{1,2}$
$x_{i,j}^{2,1}$	$x_{i,j}^{2,2}$
$x_{i,j}^{3,1}$	$x_{i,j}^{3,2}$

Многогранник $M_{m,n}$ является релаксацией задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ в том смысле, что задача 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ полиномиально сводится к задаче целочисленного программирования на $M_{m,n}$.

Впервые этот многогранник был описан в работе [5]. В частности, было показано, что для него задача распознавания целочисленности, т.е. ответа на вопрос: есть ли среди вершин $M_{m,n}$, на которых линейная целевая функция принимает свой максимум, целая, является NP-полной.

1. Нетрудно заметить, что известный и подробно изученный корневой полуметрический многогранник [3-7] изоморфен грани многогранника $M_{m,n}$. В частности, его можно получить проведением $2mn$ гиперплоскостей вида $x_{i,j}^{3,k} = 0$, где $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq 2$.

Известно [3,4], что координаты нецелых вершин корневого полуметрического многогранника (изоморфного грани $M_{m,n}$) принимают значения только из множества $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Ситуация для $M_{m,n}$ оказывается принципиально иной. Именно, справедлива

Теорема 1. Выполняется неравенство:

$$\delta(m, n) \geq 2^{\left[\frac{\min(m,n)}{2}\right]},$$

где $\delta(m, n)$ равно максимальному значению знаменателей координат вершин многогранника $M_{m,n}$.

Доказательство. Для нахождения некоторой вершины многогранника достаточно превратить несколько неравенств системы (1)-(4) в равенства (т.е. обнулить координаты) так, чтобы полученная система имела единственное решение, которое и будет являться вершиной.

Рассмотрим ситуацию, когда в одном блоке (i,j): $x_{i,j}^{1,1} > 0$ и $x_{i,j}^{2,2} > 0$, остальные координаты i,j равны 0. Если наложить дополнительно условие равенства на $x_{i,j}^{1,1}$ и $x_{i,j}^{2,2}$, то можно получить их значения. Пример (*), приведенный ниже, позволяет осуществить вышесказанное.

Пример (*).

$$
\begin{array}{||c|c||c|c||}
\hline
x_{i,j}^{1,1} & 0 & x_{i,l}^{1,1} & 0 \\
\hline
0 & x_{i,j}^{2,2} & 0 & x_{i,l}^{2,2} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\hline
0 & x_{k,j}^{1,2} & x_{k,l}^{1,1} & 0 \\
\hline
x_{k,j}^{2,1} & 0 & 0 & x_{k,l}^{2,2} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{||c|c||c|c||}
\hline
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\hline
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Здесь $x_{i,j}^{1,1} = x_{i,l}^{1,1} = x_{k,l}^{1,1} = x_{k,j}^{2,1} = x_{i,j}^{2,2}$ и $x_{i,j}^{1,1} + x_{i,j}^{2,2} = 1$, а, следовательно, $x_{i,j}^{1,1} = x_{i,j}^{2,2} = \frac{1}{2}$.

В данном примере сумма задействованных координат равнялась 1. Но, если в блоке объявить еще одну ненулевую координату, равную c, то на сумму двух других координат останется только $1-c$, приравняв же значения, получим, что каждая из координат равняется $\frac{1-c}{2}$.

Этот подход дает возможность построения вершин с итерационно увеличивающимися знаменателями координат.

Алгоритм.

Шаг 1. Найдем такую нецелую вершину u многогранника $M_{m,n}$, что для любых i,j:

$$x_{i,j}^{1,1} + x_{i,j}^{1,2} \geq \frac{1}{2} \text{ и } x_{i,j}^{1,1} + x_{i,j}^{2,1} + x_{i,j}^{3,1} \geq \frac{1}{2}.$$

В частности, вершина из примера (*) удовлетворяет этим условиям.

Шаг 2. Теперь построим точку $v \in M_{m+2,n+2}$, такую, что ее координаты для всех $i \leq m$ и $j \leq n$ равны соответствующим координатам вершины u. В один из дополнительных столбцов из блоков (без ограничения общности положим, что это столбец $n+1$) записываем блок следующего вида:

$x_{q,n+1}^{1,1}$	0
0	$x_{q,n+1}^{2,2}$
0	$x_{q,n+1}^{3,2}$

Строку из блоков q выбираем так, чтобы:

$$x^{1,1}_{q,n+1} = \sum_{k=1,2,3} x^{k,1}_{q,1} = \max_{i=1..m}(\sum_{k=1,2,3} x^{k,1}_{i,1}).$$

Значение $x^{1,1}_{q,j}$ можно найти, используя уже найденные координаты.

Шаг 3. Дополнительные строки из блоков используем для наложения ограничения равенства на $x^{2,2}_{q,n+1}$ и $x^{3,2}_{q,n+1}$, подобно примеру (*).

$x^{1,1}_{m+1,n+1}$	0	$x^{1,1}_{m+1,n+2}$	0
0	$x^{2,2}_{m+1,n+1}$	0	$x^{2,2}_{m+1,n+2}$
$x^{3,1}_{m+1,n+1}$	0	$x^{3,2}_{m+1,n+2}$	0
$x^{1,1}_{m+2,n+1}$	0	$x^{1,1}_{m+2,n+2}$	0
$x^{2,1}_{m+2,n+1}$	0	0	$x^{2,2}_{m+2,n+2}$
0	$x^{3,2}_{m+2,n+1}$	$x^{3,1}_{m+2,n+2}$	0

При этом:

$$\sum_{k=1,2,3} x^{k,2}_{m+1,n+1} = x^{2,2}_{m+1,n+1} = x^{2,2}_{q,n+1} = x^{3,2}_{q,n+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1,2,3} x^{k,2}_{q,n+1}.$$

Соответственно, в добавленных строках $m+1$ и $m+2$ сумма координат по второму столбцу всех блоков будет в 2 раза меньше, чем в блоках строки q. За счет этого и происходит итерационный рост знаменателей координат вершин.

Шаг 4. В еще не заполненные блоки запишем 4 ненулевые координаты:

$x^{1,1}$	$x^{1,2}$
$x^{2,1}$	0
$x^{3,1}$	0

Шаг 5. Повторяем шаги 2-3-4 итерационно, увеличивая на каждом шаге размерность. Получаем последовательность точек $v_k \in M_{m+2k,n+2k}$, где k – число полных проходов алгоритма.

Отметим, что построенные данным образом точки v_k являются вершинами многогранников $M_{m+2k,n+2k}$. Для этого достаточно рассмотреть точку $v \in M_{m+2,n+2}$, показав, что она удовлетворяет системе (1)–(4) и все ее координаты определены единственным образом.

Блоки i, j, такие, что $i \leq m$, $j \leq n$ позаимствованы у вершины u многогранника $M_{m,n}$ и, очевидно, соответствуют этим требованиям.

Нетрудно проверить, что блоки, заполненные на шагах 2 и 3, также удовлетворяют системе (1)-(4), и их координаты в точности определены координатами вершины u.

Заметим, что после выполнения третьего шага алгоритма точка v в каждой строке и в каждом столбце из блоков имеет хотя бы один блок с уже определенными координатами.

Таким образом, для доказательства совместности системы на всех шагах алгоритма достаточно рассмотреть блоки, заполняемые на шаге 4. Они содержат 4 ненулевые координаты. Обозначим условия сумм по строкам и столбцам в одном из таких блоков (и в соответствующих строке и столбце из блоков, уравнения (2)-(3)) следующим образом: d – сумма по первой строке, e – по второй, f – сумма по первому столбцу.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x^{1,1} & x^{1,2} \\ \hline x^{2,1} & 0 \\ \hline x^{3,1} & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline d+f-1 & 1-f \\ \hline e & 0 \\ \hline 1-d-e & 0 \\ \hline \end{array}$$

Следовательно, условием совместности системы для данного блока становится неравенство:

$$0 \leq d+f-1 \leq 1.$$

Но d и f меньше 1 (т.к. сумма координат внутри блока равна 1). Двойное неравенство превращается в одинарное:

$$1 \leq d+f.$$

По условию, это неравенство выполняется на шаге 1 алгоритма, в дальнейшем же оба значения только увеличиваются за счет роста $x^{1,1}_{m+2k,n+2k}$.

Из алгоритма следует, что с ростом n и m на 2 (что соответствует росту размерности пространства на $12m+12n+24$), $\delta(m,n)$ увеличивается в два раза. Следовательно, получаем нижнюю оценку для $\delta(m,n)$:

$$\delta(m,n) \geq 2^{\left[\frac{\min(m,n)}{2}\right]}.$$

Теорема доказана.

Ниже приводится пример вершины многогранника $M_{m,n} (n = m = 5)$, построенной с помощью алгоритма, описанного в теореме, максимальный знаменатель координат которой равен 8. В этом примере первому шагу алгоритма соответствуют 9 блоков: (1,1) - (3,3), шаг 5 не выполняется.

$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	x	x	x	x
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	x	0	x	0
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	x	0	x	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	x	0	x	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	x	0	x
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	x	0	x
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	x	0	x	0
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	x	0	x
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	x	0	x
x	x	x	x	x	x	x	0	x	0
x	0	x	0	x	0	0	x	0	x
x	0	x	0	x	0	x	0	x	0
x	x	x	x	x	x	x	0	x	0
x	0	x	0	x	0	x	0	0	x
x	0	x	0	x	0	0	x	x	0

$\Rightarrow$

$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0

Следствием теоремы является принципиальная трудность построения полного описания множества нецелочисленных вершин многогранника $M_{m,n}$, в то время как для корневого полуметрического многогранника и для целых вершин $M_{m,n}$ эта задача была успешно решена [3, 8]. Ограничимся рассмотрением необходимого условия для нецелочисленных вершин.

Теорема 2. *Если точка является нецелочисленной вершиной многогранника $M_{m,n}$, то найдутся такие i, j, k, l, для которых:*

$$1 \le j \le n, 1 \le l \le n, 1 \le i \le m, 1 \le k \le m \ (i \ne k,\ j \ne l),$$

$$\exists q, r, s, t \in \{1, 2, 3\} \ (q \ne r, s \ne t) :$$

$$x_{i,j}^{q,1} > 0,\ x_{i,j}^{r,2} > 0,\ x_{i,j}^{q,2} + x_{i,j}^{r,1} = 0,\ x_{k,j}^{q,1} + x_{k,j}^{r,2} = 0,$$

$$x_{i,l}^{s,1} > 0,\ x_{i,l}^{t,2} > 0,\ x_{i,l}^{s,2} + x_{i,l}^{t,1} = 0,\ x_{k,l}^{s,2} + x_{k,l}^{t,1} = 0,$$

$$x_{i,j}^{6-q-r,1} \cdot x_{i,j}^{6-q-r,2} = 0,\ x_{k,l}^{6-s-t,1} \cdot x_{k,l}^{6-s-t,2} = 0.$$

Иначе говоря, найдутся четыре блока следующего вида:

$x^{q,1}_{i,j}$	0	$x^{s,1}_{i,l}$	0
0	$x^{r,2}_{i,j}$	0	$x^{t,2}_{i,l}$
-	-	-	-
0	$x^{q,2}_{k,j}$	$x^{s,1}_{k,l}$	0
$x^{r,1}_{k,j}$	0	0	$x^{t,2}_{k,l}$
-	-	-	-

Доказательство. Предположим противное, существует нецелочисленная вершина u многогранника $M_{m,n}$, для которой не выполнено условие теоремы.

Напомним важный факт из теории выпуклого анализа. Крайняя точка выпуклого множества A принадлежит A, но не является внутренней ни для одного отрезка из A.

Построим точку $v \in M_{m,n}$ по вершине u, прибавив к первому столбцу каждого блока i-той строки из блоков ϵ, а ко второму, соответственно, $-\epsilon$. Рассмотрим строку из блоков i более подробно.

1. Все блоки i-той строки из блоков имеют нулевой столбец. Если подобный вид имеют все строки из блоков, то, очевидным образом, u не является нецелочисленной вершиной. Без ограничения общности будем считать, что i-тая строка из блоков не удовлетворяет этому условию.

2. Все блоки i-той строки из блоков имеют две ненулевые координаты в одной строке. Операция выполняется элементарным образом, без изменения сумм по строкам в блоке.

3. Найдется такой столбец из блоков j, для которого:

$$\exists q, r \in \{1,2,3\} : x^{q,1}_{i,j} > 0,\ x^{r,2}_{i,j} > 0,\ x^{q,2}_{i,j} + x^{r1}_{i,j} = 0,\ x^{6-q-r,1}_{i,j} \cdot x^{6-q-r,2}_{i,j} = 0.$$

Увеличиваем $x^{q,1}_{i,j}$ на ϵ, $x^{r,2}_{i,j}$ уменьшаем на ϵ. При этом сумма координат по строке q увеличивается, по строке r уменьшается.

В варианте 3 мы изменили столбец из блоков j. Рассмотрим возможные варианты.

3.1. Все строки из блоков k ($k \neq i$) имеют следующий вид: $x^{q,1}_{k,j} > 0, x^{r,1}_{k,j} > 0$ или $x^{q,2}_{k,j} > 0, x^{r,2}_{k,j} > 0$. Изменение сумм по строкам q и r не приводит к изменению сумм координат по столбцам в блоках k-той строки из блоков. Операция корректна.

3.2. Найдется такая строка из блоков k ($k \neq i$), для которой: $x^{q,1}_{k,j} > 0, x^{r,2}_{k,j} > 0, x^{q,2}_{k,j} + x^{r,1}_{k,j} = 0$ (координаты $x^{6-q-r,1}_{k,j}$ и $x^{6-q-r,2}_{k,j}$ могут принимать любые значения). Увеличение на ϵ координаты $x^{q,1}_{k,j}$ приводит к увеличению суммы по первому столбцу блока.

3.3. Найдется такая строка из блоков k ($k \neq i$), для которой: $x_{k,j}^{q,2} > 0, x_{k,j}^{r,1} > 0, x_{k,j}^{q,1} + x_{k,j}^{r,2} = 0$ (координаты $x_{k,j}^{6-q-r,1}$ и $x_{k,j}^{6-q-r,2}$ могут принимать любые значения). Увеличение на ϵ координаты $x_{k,j}^{q,2}$ приводит к увеличению суммы по второму столбцу блока.

В вариантах 3.2 и 3.3 требуется модификация k-той строки из блоков. Рассмотрим строку k для варианта 3.2.

3.2.1. Все блоки k-той строки из блоков (возможно, кроме j-того) имеют две ненулевые координаты в одной строке. Операция корректна и не изменяет сумм координат по строкам в блоках.

3.2.2. Найдется такой столбец из блоков l ($l \neq j$), для которого:

$$\exists s, t \in \{1,2,3\} : x_{k,l}^{s,1} > 0,\ x_{k,l}^{t,2} > 0,\ x_{k,l}^{s,2} + x_{k,l}^{t1} = 0,\ x_{k,l}^{6-s-t,1} \cdot x_{k,l}^{6-s-t,2} = 0.$$

Увеличиваем $x_{k,l}^{s,1}$ на ϵ, $x_{k,l}^{t,2}$ уменьшаем на ϵ. При этом сумма по строке блока s увеличивается, по строке t уменьшается.

В случае варианта 3.2.2, принципиальным является вид блока i, l.

3.2.2.1. $x_{i,l}^{s,1} > 0, x_{i,l}^{t,2} > 0, x_{i,l}^{s,2} + x_{i,l}^{t,1} = 0$. Увеличение на ϵ строки s приводит к увеличению суммы координат по первому столбцу, как и требовалось для i-той строки из блоков. Операция корректна.

3.2.2.2. $x_{i,l}^{s,2} > 0, x_{i,l}^{t,1} > 0, x_{i,l}^{s,1} + x_{i,l}^{t2} = 0$. Этот вариант соответствует „необходимому условию“ теоремы и противоречит нашему предположению.

3.2.2.3. $x_{i,l}^{s,1} > 0, x_{i,l}^{t,1} > 0$ или $x_{i,l}^{s,2} > 0, x_{i,l}^{t,2} > 0$. Изменение сумм по строкам s и t не изменяет сумм координат по столбцам в i-той строке из блоков. Операция корректна.

Вариант 3.3 рассматривается аналогично варианту 3.2.

Кроме того, в варианте 3.2.2 мы поменяли суммы координат по строкам s и t. Его следует рассмотреть подобно варианту 3, взяв блок k, l вместо i, j.

Отметим, что при построении точки v каждая строка и столбец из блоков могут быть модифицированы лишь один раз (возможность повторной модификации рассмотрена в вариантах 3.2.2.1 - 3.2.2.3), и, в силу конечной размерности многогранника $M_{m,n}$, операция корректна и будет выполнена. Точка v существует и принадлежит $M_{m,n}$.

Аналогично строится точка $w \in M_{m,n}$, но увеличивается второй столбец i-той строки из блоков. При этом $u = \frac{1}{2}(v + w), (v \neq w)$, u – середина отрезка, соединяющего v и w ($v, w \in M_{m,n}$). Противоречие, u не является вершиной $M_{m,n}$.

Теорема доказана.

2. Теперь обратимся к вопросу о том, как меняется множество нецелых вершин при переходе к более сильным релаксациям.

Выберем произвольно s строк и t столбцов из блоков. На их пересечении получим грань многогранника $M_{m,n}$, лежащую в R^{6st}. Для нее построим выпуклую оболочку множества целых вершин и обозначим $M^Z_{s,t}$. Пусть Θ – число неравенств, задающих внешнее описание $M^Z_{s,t}$. Повторив эту операцию для всех вариантов выбора s строк и t столбцов из блоков, получим систему из $\Theta \cdot C^s_m \cdot C^t_n$ неравенств и дополним ею систему (1)–(4). Обозначим новый многогранник как $M^{s,t}_{m,n} \subseteq M_{m,n}$.

Нетрудно заметить, что многогранники $M_{1,1}$, $M_{1,2}$ и $M_{2,1}$ не имеют нецелых вершин и совпадают с $M^Z_{1,1}$, $M^Z_{1,2}$ и $M^Z_{2,1}$ соответственно, а значит, и релаксации $M^{1,1}_{m,n}$, $M^{1,2}_{m,n}$ и $M^{2,1}_{m,n}$ будут совпадать с самим многогранником $M_{m,n}$. Таким образом, $M^{2,2}_{m,n}$ – это первая отличная от $M_{m,n}$ релаксация.

Теорема 3. *Многогранник $M^{2,2}_{m,n}$ задается системой (1)–(4) и дополнительными неравенствами следующего вида:*

$$\forall i,j,k,l:\ 1 \le i,k \le m,\ 1 \le j,l \le n,$$

$$\forall a \in \{1,2\},\ \forall b,c,d,e \in \{1,2,3\}\ (b \ne c, d \ne e):$$

$$x^{b,a}_{i,j} + x^{c,a}_{i,j} + x^{g,f}_{i,j} + x^{d,f}_{i,l} + x^{e,f}_{i,l} + x^{h,a}_{i,l} + x^{b,a}_{k,j} + x^{c,a}_{k,j} + x^{g,f}_{k,j} + x^{d,a}_{k,l} + x^{e,a}_{k,l} + x^{h,f}_{k,l} \le 3, \qquad (5)$$

где $f = 3 - a,\ g = 6 - b - c,\ h = 6 - d - e$.

Доказательство. Пусть $n = m = 2$, число дополнительных неравенств (5) при этом равно 72. Нахождение всех вершин многогранника, заданного системой (1)–(5), становится чисто вычислительной задачей. В частности, с помощью программного продукта PORTA [9] можно убедиться, что система (1)–(5) задает в точности выпуклую оболочку множества целых вершин $M_{2,2}$.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Множества целых вершин многогранников $M^{2,2}_{m,n}$ и $M_{m,n}$ равны.*

Доказательство. Из вложенности $M^{2,2}_{m,n}$ в многогранник $M_{m,n}$ следует, что все его целые вершины также принадлежат $M_{m,n}$. В то же время, все целые вершины $M_{m,n}$ удовлетворяют ограничениям (1)–(5), так как те описывают выпуклую оболочку целых вершин.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Многогранники $M^{2,2}_{m,n}$ и $M_{m,n}$ не имеют общих нецелочисленных вершин.*

Доказательство. Предположим противное, пусть точка u является нецелой вершиной обоих многогранников. Тогда для нее выполняется необходимое условие для нецелочисленных вершин.

Для некоторых i, j, k, l соответствующие блоки имеют вид:

$x_{i,j}^{q,1}$	0	$x_{i,l}^{s,1}$	0
0	$x_{i,j}^{r,2}$	0	$x_{i,l}^{t,2}$
$x_{i,j}^{6-q-r,1}$	$x_{i,j}^{6-q-r,2}$	$x_{i,l}^{6-s-t,1}$	$x_{i,l}^{6-s-t,2}$
0	$x_{k,j}^{q,2}$	$x_{k,l}^{s,1}$	0
$x_{k,j}^{r,1}$	0	0	$x_{k,l}^{t,2}$
$x_{k,j}^{6-q-r,1}$	$x_{k,j}^{6-q-r,2}$	$x_{k,l}^{6-s-t,1}$	$x_{k,l}^{6-s-t,2}$

При этом
$$x_{i,j}^{6-q-r,1} \cdot x_{i,j}^{6-q-r,2} = 0 = x_{k,l}^{6-s-t,1} \cdot x_{k,l}^{6-s-t,2}.$$

Ограничимся рассмотрением ситуации, когда $x_{i,j}^{6-q-r,1} = x_{k,l}^{6-s-t,1} = 0$. Доказательство для трех других вариантов полностью повторяет приведенное ниже.

Заметим также, что можно положить $x_{i,j}^{6-q-r,2} \leq x_{i,j}^{r,2}$. В противном случае при доказательстве теоремы 2 эти строки можно поменять местами и получить требуемое утверждение. Аналогично, $x_{k,l}^{6-s-t,2} \leq x_{k,l}^{t,2}$.

Обозначим величину из ограничения (5) через Δ и оценим ее:

$$\Delta = x_{i,j}^{q,1} + x_{i,j}^{r,2} + x_{i,j}^{6-q-r,2} + x_{k,j}^{q,2} + x_{k,j}^{r,1} + x_{k,j}^{6-q-r,1} + x_{i,l}^{s,1} + x_{i,l}^{t,2} + x_{i,l}^{6-s-t,2} + x_{k,l}^{s,1} + x_{k,l}^{t,2} + x_{k,l}^{6-s-t,2},$$

$$x_{i,j}^{q,1} + x_{i,j}^{r,2} + x_{i,j}^{6-q-r,2} = 1, \ x_{k,l}^{s,1} + x_{k,l}^{t,2} + x_{k,l}^{6-s-t,2} = 1,$$

$$\Delta = 2 + x_{k,j}^{q,2} + x_{k,j}^{r,1} + x_{k,j}^{6-q-r,1} + x_{i,l}^{s,1} + x_{i,l}^{t,2} + x_{i,l}^{6-s-t,2},$$

$$x_{k,j}^{q,2} + x_{k,j}^{r,1} + x_{k,j}^{6-q-r,1} = 1 - x_{k,j}^{6-q-r,2}, \ x_{i,l}^{s,1} + x_{i,l}^{t,2} + x_{i,l}^{6-s-t,2} = 1 - x_{i,l}^{6-s-t,1},$$

$$\Delta = 4 - x_{k,j}^{6-q-r,2} - x_{i,l}^{6-s-t,1}.$$

Оценим $x_{k,j}^{6-q-r,2}$:

$$x_{k,j}^{6-q-r,2} + x_{k,j}^{6-q-r,1} = x_{i,j}^{6-q-r,2} \leq x_{i,j}^{r,2},$$

$$x_{i,j}^{6-q-r,2} = 1 - x_{i,j}^{q,1} - x_{i,j}^{r,2},$$

$$x_{i,j}^{6-q-r,2} \leq 1 - x_{i,j}^{q,1} - x_{i,j}^{6-q-r,2},$$

$$x_{i,j}^{6-q-r,2} \leq \frac{1 - x_{i,j}^{q,1}}{2}, \ x_{i,j}^{q,1} > 0,$$

$$x_{i,j}^{6-q-r,2} < \frac{1}{2},$$

$$x_{k,j}^{6-q-r,2} \leq x_{i,j}^{6-q-r,2} < \frac{1}{2}.$$

Аналогично доказывается, что $x_{i,l}^{6-s-t,1} < \frac{1}{2}$. Следовательно, $\Delta > 3$, что противоречит системе неравенств (5). Таким образом, точка u не является вершиной многогранника $M_{m,n}^{2,2}$, а значит, ни одна нецелая вершина $M_{m,n}$ не принадлежит многограннику $M_{m,n}^{2,2}$.

Теорема доказана.

3. Теперь вернемся к общему многограннику $M^{s,t}_{m,n}$.

Заметим, что $M^{1,1}_{m,n} (= M_{m,n})$, $M^{2,2}_{m,n}$ и $M^{m,n}_{m,n} (= M^{Z}_{m,n})$ не имеют общих нецелочисленных вершин. Однако остается вопрос о существовании подобных вершин у промежуточных многогранников $M^{s,t}_{m,n}$. Так, приведенные ниже точки из R^{54} являются общими вершинами для $M^{2,2}_{3,3}$, $M^{2,3}_{3,3}$ и $M^{3,2}_{3,3}$ (здесь и далее все вычисления проведены с помощью программы PORTA [9]).

0	0	0	0	0	0
0	1/3	0	1/3	0	2/3
1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	0
0	0	0	0	0	0
0	1/3	1/3	0	1/3	1/3
2/3	0	1/3	1/3	1/3	0
0	0	0	0	0	0
0	1/3	0	1/3	1/3	1/3
1/3	1/3	1/3	1/3	0	1/3

1/4	0	1/4	0	1/4	0
0	1/4	0	1/4	1/4	1/2
1/4	1/4	1/4	1/4	0	0
1/4	0	0	1/4	1/4	0
0	1/4	1/4	0	1/4	1/2
1/4	1/4	1/4	1/4	0	0
0	1/4	1/4	0	1/4	0
1/4	0	0	1/4	1/4	1/2
1/4	1/4	1/4	1/4	0	0

Но, если зафиксировать $n = 2$, ситуация оказывается иной, и многогранники $M^{2,2}_{m,2}$ и $M^{3,2}_{m,2}$ не имеют общих нецелых вершин по меньшей мере для всех $m \leq 5$.

Опираясь на это и теорему 5, можно было бы предположить, что многогранники $M^{s,2}_{m,2}$ и $M^{s+1,2}_{m,2}$ не имеют совместных нецелочисленных вершин, однако это не так. Приведенные ниже точки являются одновременно вершинами $M^{3,2}_{5,2}$ и $M^{4,2}_{5,2}$, а, значит, ситуация с нецелыми вершинами $M^{s,t}_{m,n}$ является более сложной и требует дальнейшего изучения.

0	0	0	0
0	1/13	4/13	3/13
9/13	3/13	5/13	1/13
0	0	0	0
0	1/13	4/13	3/13
9/13	3/13	5/13	1/13
0	0	0	0
0	1/13	7/13	0
7/13	5/13	0	6/13
0	0	0	0
0	1/13	0	7/13
0	12/13	0	6/13
0	0	0	0
1/13	0	7/13	0
12/13	0	6/13	0

2/5	0	0	0
0	0	1/5	1/5
2/5	1/5	3/5	0
1/5	1/5	0	0
0	0	1/5	1/5
3/5	0	3/5	0
2/5	0	0	0
0	0	2/5	0
1/5	2/5	1/5	2/5
1/5	1/5	0	0
0	0	1/5	1/5
0	3/5	0	3/5
2/5	0	0	0
0	0	2/5	0
3/5	0	3/5	0

Список литературы

1. Dantzig G. B., Fulkerson R., Johnson S. M. ‘Solution of a large-scale traveling salesman problem // Operations Research. 1954. 2. P. 393–410.

2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.

3. Бондаренко В.А., Максименко А.Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. М.: ЛКИ, 2008. 184 с.

4. Деза М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик. М.: МЦНМО, 2001. 736 с.

5. Бондаренко В.А., Урываев Б.В. Об одной задаче целочисленной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2007. №6. С. 18–23.

6. Бондаренко В.А. Об одном комбинаторном многограннике // Моделирование и анализ вычислительных систем: Сб. науч. тр. Ярославль: Яросл. гос. ун-т., 1987. С. 133–134.

7. Padberg M.V. The Boolean quadratic polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical Program. 1989. V. 45. P. 139–172.

8. Дунаева О.А., Николаев А.В. Некоторые свойства релаксационного многогранника задачи 3-выполнимость // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Самара: СамГТУ, 2008. С. 37–43.

9. PORTA: POlyhedron Representation Transformation Algorithm 1.4.0. Thomas Christof, Andreas Loebel. The Konrad-Zuse-Zentrum fur Informationstechnik Berlin, http://www.zib.de/Optimization/Software/Porta/

On nonintegral vertices of 3-SAT problem relaxation polytope

Nikolaev A. V.

Keywords: combinatorial optimization, computational complexity theory, polytopes, face lattice, linear programming.

New facts characterizing the vertex set of 3-SAT problem relaxation polytope are established. In particular, the question of preservation of nonintegral vertices under additional linear constraints of stronger relaxations is examined.

Сведения об авторе:
Николаев Андрей Валерьевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант.
Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, профессор
Бондаренко Владимир Александрович.