

УДК 517.929

## Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием в окрестности автомодельного цикла

Глазков Д.В., Кащенко С.А.<sup>1</sup>

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова*

*e-mail: glazkov\_d@mail.ru, kasch@uniyar.ac.ru*

*получена 15 сентября 2010*

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение с запаздыванием, периодическое решение, нормальная форма, малый параметр

Исследуется локальная динамика комплексного дифференциального уравнения с большим запаздыванием в окрестности автомодельного цикла. При анализе задачи используется метод квазинормальных форм.

### 1. Постановка задачи

Объектом изучения является комплексное уравнение

$$z' = (\nu + i\omega)z - Ke^{-i\varphi} [z - z(s-h)] + b|z|^2z, \quad (1)$$

где коэффициент при нелинейном слагаемом имеет вид

$$b = b_1 + ib_2,$$

величины  $K$  и  $\varphi$  трактуются как управляющие параметры. В отсутствие слагаемого с запаздыванием при  $K=0$  нулевое решение задачи (1) является фокусом, устойчивость которого определяется знаком величины  $\nu$ . Отметим, что параметры  $K \geq 0$  и  $-\varphi$  можно рассматривать как модуль и аргумент комплексного коэффициента  $Ke^{-i\varphi}$ . Необходимым условием существования и устойчивости при  $K=0$  периодического решения (1) является выполнение неравенств

$$b_1 < 0, \quad \nu > 0.$$

Уравнение (1) описывает локальную динамику некоторой системы в окрестности состояния равновесия. В [1] в качестве такой исходной задачи рассматривается модель сдвоенного лазера с распределенной оптической обратной связью от внешнего

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (государственные контракты №02.740.11.0197 и П2223 от 11.11.09).

эталоны Фабри–Перо. Параметр  $\varphi$  в этом случае определяет сдвиг по оптической фазе отраженного излучения. Линейная часть квазинормальной формы, полученной в [2] для модели Ланга–Кобаяши, также имеет вид (1) без учета нелинейных слагаемых. Кроме того, комплексное уравнение (1) является обобщением вещественной системы уравнений, изучавшейся в работах [3, 4].

В настоящей работе ставится задача исследования локальной динамики системы (1) в окрестности автомодельного цикла (периодического решения (1) при  $K=0$ ) на основе метода нормальных форм при асимптотически больших значениях параметра  $h$ .

## 2. Простейшие решения и их свойства

Уравнение (1) заменой  $z = \rho e^{i\psi}$  преобразуется к системе из двух вещественных уравнений для амплитуды и фазы

$$\begin{cases} \rho' = \nu\rho + b_1\rho^3 - K[\rho \cos \varphi - \rho(s-h) \cos(\varphi + \psi - \psi(s-h))], \\ \psi' = \omega + b_2\rho^2 + K[\sin \varphi - \frac{\rho(s-h)}{\rho} \sin(\varphi + \psi - \psi(s-h))]. \end{cases} \quad (2)$$

Периодические решения системы (1) вида

$$z_k(s) = \rho_k e^{i\psi_k s},$$

при подстановке в (2) дают следующие соотношения:

$$\begin{cases} 0 = \nu + b_1\rho_k^2 - K[\cos \varphi - \cos(\psi_k h + \varphi)], \\ \psi_k = \omega + b_2\rho_k^2 + K[\sin \varphi - \sin(\psi_k h + \varphi)]. \end{cases} \quad (3)$$

В случае  $K=0$  единственное возможное решение (автомодельный цикл уравнения без запаздывания) удовлетворяет условиям

$$\rho_0 = \sqrt{-\frac{\nu}{b_1}}, \quad \psi_0 = \left( \omega - \frac{\nu b_2}{b_1} \right).$$

Заметим, что

$$b_1\rho_0^2 = -\nu, \quad b_2\rho_0^2 = -\nu\gamma, \quad \text{где} \quad \gamma = b_2/b_1.$$

Тогда в общем случае, умножая первое уравнение системы (3) на  $-\gamma$ , складывая его со вторым и исключая таким образом  $\rho_k$ , получим следующее уравнение для определения величины  $\psi_k$ :

$$\psi_k - \psi_0 = -\text{sign}(b_1)K\sqrt{1+\gamma^2} [\sin(\psi_k h + \varphi + \arctg \gamma) - \sin(\varphi + \arctg \gamma)]. \quad (4)$$

Выполняя замену  $\eta_k = \psi_k h + \varphi$  и учитывая, что в нашем случае  $b_1 < 0$ , преобразуем соотношение (4) к виду

$$\eta_k - \varphi - \psi_0 h = Kh\sqrt{1+\gamma^2} [\sin(\eta_k + \arctg \gamma) - \sin(\varphi + \arctg \gamma)]. \quad (5)$$

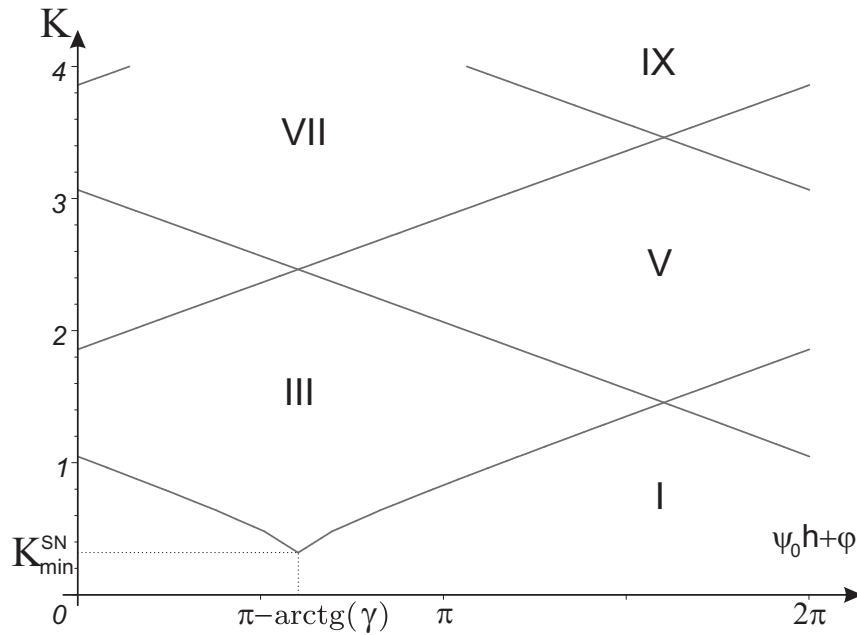


Рис. 1. Области параметров с различным количеством (обозначенным римскими цифрами) простейших периодических решений комплексного уравнения (1) на плоскости  $(\psi_0 h + \varphi, K)$

По структуре алгебраическое уравнение (5) аналогично уравнению, из которого определяются моды внешнего резонатора в модели Ланга–Кобаяши [2]. Задача (5) имеет тем больше решений, чем больше величина  $Kh\sqrt{1+\gamma^2}$ .

Обозначим  $f(\eta)$  левую часть соотношения (5), а  $g(\eta)$  правую. Тогда простейшие периодические решения задачи (5) соответствуют точкам пересечения графиков функций  $f$  и  $g$ . Образование новой пары периодических режимов происходит в результате бифуркации седло-узла, которая имеет место при значениях параметров, удовлетворяющих одновременно уравнениям

$$\begin{cases} f(\eta) = g(\eta), \\ f'(\eta) = g'(\eta). \end{cases}$$

В этом случае происходит касание графиков функций  $f$  и  $g$ . Точнее, эта пара равенств записывается в виде

$$\begin{cases} \eta - \varphi - \psi_0 h = Kh\sqrt{1+\gamma^2} \sin(\eta + \arctg(\gamma)), \\ 1 = Kh\sqrt{1+\gamma^2} \cos(\eta + \arctg(\gamma)). \end{cases} \quad (6)$$

Исключая  $\eta$  и преобразуя (6), можем получить следующее уравнение для бифуркационных поверхностей в пространстве параметров:

$$\psi_0 h + \varphi + \arctg(\gamma) = \pm \left[ -\sqrt{K^2 h^2 (1+\gamma^2) - 1} + \arccos \left( \frac{1}{Kh\sqrt{1+\gamma^2}} \right) \right] + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

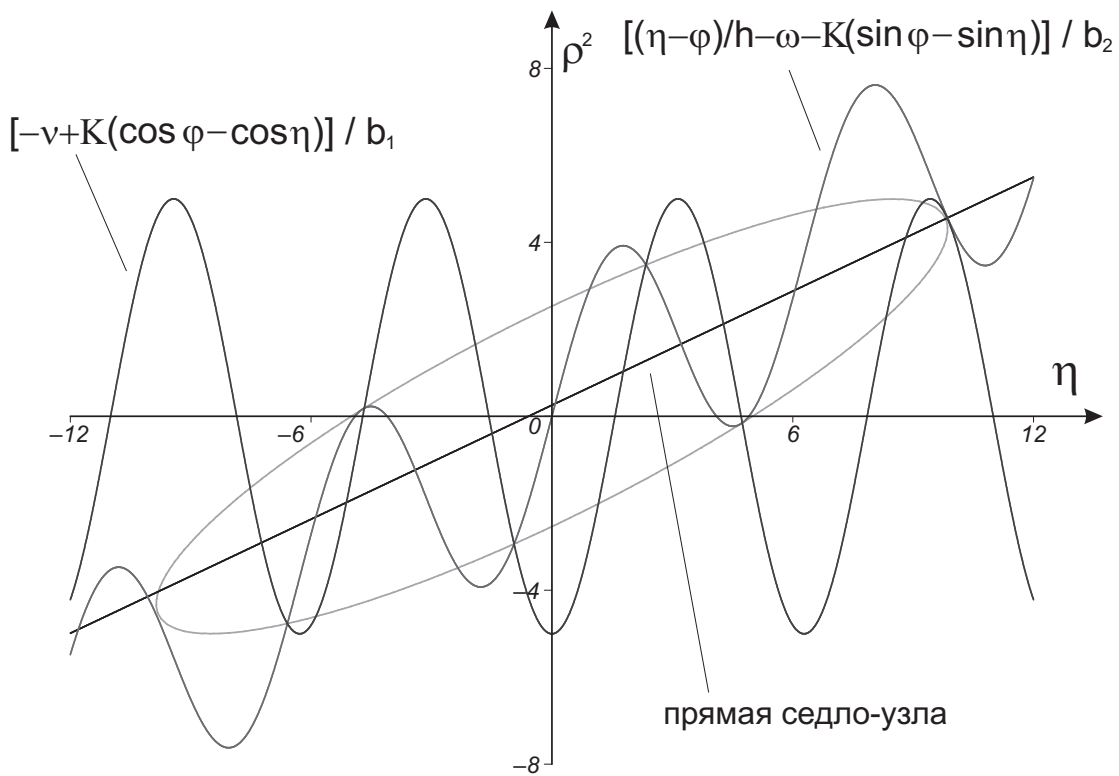


Рис. 2. Точки пересечения кривых (7) и (8) лежат на эллипсе (9) и соответствуют характеристикам  $(\psi_k, \rho_k^2)$  простейших периодических решений комплексного уравнения (1). Выбраны следующие значения параметров:  $b_1 = -1$ ;  $b_2 = 1,7$ ;  $K = 5$ ;  $h = 1$ ;  $\nu = K \cos \varphi$ ;  $\omega = -K \sin \varphi + \varphi / h$

или в другой форме

$$\cos(\psi_0 h \mp \sqrt{K^2 h^2 (1 + \gamma^2) - 1} + \varphi + \arctg(\gamma)) = \frac{1}{\gamma h \sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Отметим, что это соотношение не зависит от параметров  $\nu$  или  $\omega$  и  $2\pi$ -периодично по  $\psi_0 h$  или  $\varphi$  (или по  $\eta_0 = \psi_0 h + \varphi$ ).

Минимальной величиной  $K$ , при которой может произойти бифуркация седло-узла с рождением новой пары периодических решений задачи (5), является значение

$$K_{min}^{SN} = \frac{1}{h \sqrt{1 + \gamma^2}},$$

которое достигается в точке излома (см. рис. 1) при

$$\psi_0 h + \varphi + \arctg(\gamma) = \pi + 2\pi m.$$

Из системы (3) можем получить пару уравнений для определения простейших периодических решений

$$\rho_k^2 = -\frac{\nu}{b_1} + \frac{K}{b_1} [\cos \varphi - \cos \eta_k], \quad (7)$$

$$\rho_k^2 = \frac{\eta_k - \varphi}{hb_2} - \frac{\omega}{b_2} - \frac{K}{b_2} [\sin \varphi - \sin \eta_k]. \quad (8)$$

Отметим, что точки пересечения соответствующих кривых на плоскости  $(\eta, \rho^2)$  лежат на эллипсе, изображенном на рис. 2. Аналитически он задается уравнением

$$(\nu + b_1 \rho^2 - K \cos \varphi)^2 + (\omega + b_2 \rho^2 + K \sin \varphi - \eta h^{-1} + \varphi h^{-1})^2 = K^2. \quad (9)$$

Выражая из (7), (8) синусы и косинусы через  $\rho^2$ , из второго уравнения (6) получаем соотношение вида

$$\rho^2 = [b_1 K \cos \varphi - b_2 K \sin \varphi - b_1 \nu - b_2 \omega - (\eta - \varphi - 1/Kh \sqrt{1 + \gamma^2})/h] / |b|^2, \quad (10)$$

задающее на плоскости  $(\eta, \rho^2)$  прямую, которую по аналогии с обозначениями модели Ланга–Кобаяши [2] будем называть седло-узловой прямой.

### 3. Динамика в окрестности автомодельного цикла

Далее рассмотрим ситуацию, когда запаздывание асимптотически велико, а величина обратной связи мала так, что

$$h = 1/\varepsilon, \quad K = \varepsilon K_*. \quad (11)$$

В этом случае может быть использована методика исследования локальной динамики системы с запаздыванием в окрестности ее предельного цикла  $z_0(s)$ .

Рассмотрим модельное дифференциальное уравнение с запаздыванием вида

$$x' = F(x) + \varepsilon \cdot \Phi(x, x(s - h\varepsilon^{-1})). \quad (12)$$

Общая методика исследования его динамики была разработана в [5]. В соответствии с алгоритмом, представленным в этой статье, в малой окрестности некоторого периодического решения системы «нулевого приближения»  $x'=F(x)$  строится нормализующая замена, позволяющая получить асимптотику решения возмущенной системы (12). Эта замена имеет следующий вид:

$$V(s, \varepsilon) = V_0(\tau) + \varepsilon V_1(t, \tau) + \varepsilon^2 V_2(t, \tau) + \dots, \quad (13)$$

$$\frac{d\tau}{ds} = 1 + \varepsilon \varphi_1(t) + \varepsilon^2 \varphi_2(t) + \dots \quad (14)$$

Здесь  $V_j(t, \tau)$  являются  $T$ -периодичными по  $\tau$ , причем  $V_0(s)$  есть периодическое решение системы ОДУ  $x'=F(x)$ ,  $\varphi_1(t)$  — скалярная почти периодическая функция, а «медленное» время  $t$  связано со временем системы (12) равенством  $t = \varepsilon s$ .

Отметим, что из (14) при дополнительном условии  $\tau(s_0)=0$  имеем

$$\tau(s) = s - s_0 + \varepsilon \int_{s_0}^s [\varphi_1(\varepsilon r) + \dots] dr \quad \text{и} \quad \tau(s - h\varepsilon^{-1}) = \tau(s) - h\varepsilon^{-1} - \int_{t-h}^t [\varphi_1(r) + \dots] dr,$$

и с точностью до слагаемых более высокого порядка малости получаем, что

$$\tau(s - h\varepsilon^{-1}) \approx \tau(s) - y, \quad \text{где} \quad y = h\varepsilon^{-1} + \int_{-h}^0 \varphi_1(t+r) dr. \quad (15)$$

Стандартная линеаризация  $x'=F(x)$  на  $V_0(s)$  приводит к системе

$$u' = A(s)u, \quad (16)$$

где

$$A(s) = \frac{DF}{Dx}(V_0(s))$$

есть  $2\pi/\omega$ -периодическая матрица. Обозначим через  $H_j(s)$  линейно независимые периодические решения сопряженной к (16) системы

$$w' = -A^*(s)w.$$

Подставляя ряды (13), (14) в (12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим цепочку уравнений вида

$$\frac{dV_j}{d\tau} = A(\tau)V_j + f_j, \quad j \in N, \quad (17)$$

где через  $f_j$  обозначена неоднородность дифференциального уравнения. На первом шаге получим следующие условия разрешимости уравнения (17) относительно  $V_1$  в классе периодических по  $\tau$  функций:

$$\langle f_1, H_j \rangle = 0, \quad (18)$$

где угловыми скобками  $\langle \rangle$  обозначено скалярное произведение

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (X(\tau), Y(\tau)) d\tau.$$

Используя (18), приходим к уравнениям, которые играют роль нормальной формы в задаче о локальной динамике уравнения (12) в некоторой окрестности решения  $V_0(s)$  системы «нулевого приближения»  $x' = F(x)$ . Отыскав решение  $V_1$  системы (17) в указанном классе функций, можно, действуя аналогичным образом, последовательно найти любое число элементов рядов (13), (14).

Система (2) при условии (11) является частным случаем векторного уравнения (12).

Отметим, что периодическое решение системы «нулевого приближения» в случае (1) имеет вид

$$z_0(s) = \rho_0 e^{i\psi_0 s} = \sqrt{-\frac{\nu}{b_1}} e^{i(\omega - \nu b_2/b_1)s},$$

или в вещественной форме

$$V_0(s) = \rho_0 \cdot (\cos(\psi_0 s), \sin(\psi_0 s))^T.$$

Матрица линеаризованной на  $V_0$  системы имеет следующий вид:

$$A(s) = \begin{pmatrix} -2\nu \cos^2(\psi_0 s) + \nu\gamma \sin(2\psi_0 s) & -\psi_0 + 2\nu\gamma \sin^2(\psi_0 s) - \nu \sin(2\psi_0 s) \\ \psi_0 - 2\nu\gamma \cos^2(\psi_0 s) - \nu \sin(2\psi_0 s) & -2\nu \sin^2(\psi_0 s) - \nu\gamma \sin(2\psi_0 s) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в случае (2) решение  $V_0$  получим в форме

$$\rho_0(s) = \rho_0 = \sqrt{-\frac{\nu}{b_1}}, \quad \psi_0(s) = \psi_0 s = \left( \omega - \frac{\nu b_2}{b_1} \right) s.$$

При этом линеаризованная на  $V_0$  система имеет постоянную матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2\nu & 0 \\ 2b_2\rho_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения  $\tilde{A}$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2\nu,$$

связаны с мультипликаторами системы (16) соотношением  $\mu_j = \exp(\lambda_j)$ . Учитывая, что  $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$ , имеем  $|\mu_2| < 1$ .

Отметим, что в случае (1) линейная система (16) и сопряженная к ней имеют по одному периодическому решению и ему соответствующему единичному мультипликатору.

Выберем периодические решения системы (16) и сопряженной к ней следующим образом:

$$B_0(s) = \rho_0 \psi_0 \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\psi_0 s) \\ \cos(\psi_0 s) \end{pmatrix}, \quad H_0(s) = -\frac{1}{\rho_0 \psi_0} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\psi_0 s) + \gamma \cos(\psi_0 s) \\ -\cos(\psi_0 s) + \gamma \sin(\psi_0 s) \end{pmatrix},$$

так, чтобы выполнялось условие  $\langle B_0, H_0 \rangle = 1$ .

Выполняя замены (13), (14) и собирая коэффициенты при первой степени  $\varepsilon$ , приходим к системе

$$\varphi_1(t)V_0'(\tau) + \frac{dV_1}{d\tau} = A(\tau)V_1 + \Phi(V_0(\tau), V_0(\tau-y)). \quad (19)$$

Выполняя замену  $\phi = \psi_0 \varphi_1$ , из условий периодичности функции  $V_1$  по  $\tau$  получим следующее уравнение:

$$\phi(t) = K_* \sqrt{1+\gamma^2} \left[ \sin \left( \Omega + \int_{-1}^0 \phi(t+r) dr + \varphi + \arctg \gamma \right) - \sin(\varphi + \arctg \gamma) \right], \quad (20)$$

где величина  $\Omega$ , удовлетворяющая неравенствам  $0 \leq \Omega < 2\pi$ , определяется соотношением

$$\Omega = \psi_0 h \bmod 2\pi = \psi_0 / \varepsilon \bmod 2\pi.$$

Будем называть интегральное уравнение (20) квазинормальной формой системы (1) при условии (11).

Задача отыскания состояний равновесия уравнения (20) сводится к решению следующего трансцендентного уравнения:

$$\phi_k = K_* \sqrt{1+\gamma^2} \left[ \sin(\Omega + \phi_k + \varphi + \arctg \gamma) - \sin(\varphi + \arctg \gamma) \right]. \quad (21)$$

Соотношение (21) сводится к (5) заменой  $\phi_k = (\psi_k - \psi_0) / \varepsilon$ .

Вводя в рассмотрение функцию  $\theta(t)$  такую, что  $\theta'(t) = \varphi_1(t)$ , преобразуем (20) к стандартной форме дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\theta'(t) = K_* \sqrt{1+\gamma^2} \left[ \sin(\Omega + \theta(t) - \theta(t-1) + \varphi + \arctg \gamma) - \sin(\varphi + \arctg \gamma) \right]. \quad (22)$$

Заметим, что фазовое уравнение вида (22) с неоднородной добавкой рассматривалось в [6]. Задача изучения динамики такого уравнения в присутствии гауссового белого шума ставилась в [7].

В свою очередь уравнение (22) заменой  $\xi(t) = \theta(t) - \theta(t-1)$  допускает приведение к следующему виду:

$$\xi'(t) = K_* \sqrt{1+\gamma^2} \left[ \sin(\Omega + \xi(t) + \varphi + \arctg \gamma) - \sin(\Omega + \xi(t-1) + \varphi + \arctg \gamma) \right]. \quad (23)$$

Стационарному решению  $\phi_k$  уравнения (20) будет соответствовать решение вида  $\phi_k t$  уравнения (22), а разность  $\theta(t) - \theta(t-1) = \xi(t) = \phi_k$  также будет константой.

Отметим, что форма (23) наиболее удобна для численного анализа.

Устойчивость стационарных решений уравнения (20) определяется из анализа линеаризованной системы относительно малого возмущения  $\vartheta$  вида

$$\vartheta'(t) = K_* \sqrt{1+\gamma^2} \cos(\Omega + \phi_k + \varphi + \arctg \gamma) [\vartheta(t) - \vartheta(t-1)].$$



Уравнение такого типа изучалось в работе [8]. Расположение на комплексной плоскости корней характеристического уравнения

$$\lambda = K_* \sqrt{1+\gamma^2} \cos(\Omega + \phi_k + \varphi + \arctg \gamma) (1 - e^{-\lambda})$$

определяет устойчивость состояний равновесия уравнения (20). Если выполнено неравенство

$$K_* \sqrt{1+\gamma^2} \cos(\Omega + \phi_k + \varphi + \arctg \gamma) > 1,$$

то у выписанного уравнения существует корень с положительной вещественной частью, иначе все корни уравнения, кроме неподвижного нулевого (отвечающего единичному мультипликатору исследуемого автомодельного цикла), расположены в левой комплексной полуплоскости. Стандартным образом грубым устойчивым режимам (20) (состояниям равновесия) соответствуют грубые устойчивые режимы (1) (предельные циклы).

#### 4. Заключение

В заключение отметим некоторые особенности динамики исследуемой задачи. Численно решения уравнений (20) и (23) стремятся к некоторой константе, при любом выборе параметров. Соответственно можно сделать вывод, что в исходной системе (1) в данном случае множество устойчивых режимов исчерпывается простейшими периодическими решениями вида  $z_k = \rho_k e^{i\psi_k s}$ . Заметим, что таких решений тем больше, чем больше величина  $K_* \sqrt{1+\gamma^2}$ . Асимптотические формулы, полученные в работе, позволяют без труда получать характеристики близких к предельному циклу локальных режимов исходной задачи, а также определять области параметров и начальных условий, в которых возможно возникновение заданного режима. В этом случае можно говорить о возможности мультистабильности, когда в исходной системе оказывается возможно реализовать один из нескольких доступных аттракторов за счет выбора начальных условий. Такого рода возможности особенно интересны для лазерных систем, где выбор различных режимов излучения имеет широкие перспективы в различных приложениях.

## Список литературы

1. Schikora S. et al. All-Optical Noninvasive Control of Unstable Steady States in a Semiconductor Laser // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97, 213902. P. 1–4.
2. Глазков Д.В. Особенности динамики модели Ланга-Кобаяши в одном критическом случае // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, №2. С. 36–45.
3. Hövel P., Schöll E. Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72, 046203. P. 1–7.
4. Yanchuk S. et al. Control of unstable steady states by long delay feedback // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74, 026201. P. 1–7.

5. *Кащенко С.А.* Бифуркации цикла в сингулярно возмущенных нелинейных автономных системах // Известия РАН. Серия МММИУ. 1998. Т. 2, №4. С. 5–53.
6. *Van Tartwijk G.H.M., Lenstra D.* Nonlocal potential for class-B lasers with external optical feedback // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 50, №4. P. 2837–2840.
7. *Masoller C.* Noise-Induced Resonance in Delayed Feedback Systems // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 88, №3. 034102. P. 1–4.
8. *Глазков Д.В.* Нормализация одного уравнения запаздыванием и бифуркация, приводящая к циклу асимптотически большого периода // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, №2. С. 47–52.

## Local dynamics of DDE with large delay in the vicinity of the self-similar cycle

Glazkov D.V., Kaschenko S.A.

**Keywords:** delay differential equation, periodic solution, normal form, small parameter

We research the local dynamics of a complex differential equation with large delay in the vicinity of the self-similar cycle. The quasinormal forms method is used for a problem analysis.

### Сведения об авторах:

**Глазков Дмитрий Владимирович,**  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель;

**Кащенко Сергей Александрович,**  
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой математического моделирования