Модел. и анализ информ. систем. Т. **17**, № **3** (2010) 72–90

УДК 510.65

Разрешимость теории $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, \ldots, f_n)$

Снятков А.С.[1]

Тверской государственный университет

e-mail: alekseyss86@mail.ru

получена 18 мая 2010

Ключевые слова: арифметика Семенова, гиперфункция, функция Аккермана

Данная работа посвящена исследованию свойств теорий, образованных из арифметики А.Л. Семенова добавлением функций $f_i, i > 0$, которые в работе названы «гиперфункциями», полученных итерацией, согласованной со сложением функции f_0. Доказано, что такие теории являются модельно полными. Также показано, что при выполнении условия эффективной периодичности гиперфункций теории являются разрешимыми.

1. Введение

Исследование разрешимости теории – одна из главных задач математической логики. Особенно важно исследование теоретико-числовых теорий. В исследовании таких теорий было получено много результатов. Была показана неразрешимость формальной арифметики. В 1929 году М. Пресбургер показал, что арифметика натуральных чисел с одним сложением разрешима (см., например, [1]). А. Тарским было показано, что теория действительных чисел разрешима (см., например, [2]).

В [3] А.Л. Семеновым было введено понятие класса редких предикатов, было получено расширение арифметики Пресбургера такими предикатами и показано, что такая теория является разрешимой.

В работе [4] А.Л. Семеновым было введено понятие функций, согласованных со сложением, было получено расширение арифметики Пресбургера такой функцией, и показано, что такая теория является разрешимой.

В статье [5] рассматривается расширение арифметики Семенова $(\omega, 0, 1, <, +, c^x, \mathfrak{C}^x)$, где $\mathfrak{C}^x$ — гиперэкспонента, и показывается, что теория этой системы является разрешимой ввиду того, что каждая формула эквивалентна экзистенциальной.

В [6] рассматривается обобщение результата, полученного в предыдущей работе, и показывается, что теория $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f(x), F(x))$, где $F(x)$ — гиперфункция от функции $f(x)$, является разрешимой, если f — эффективно согласованная со сложением функция, а F — эффективно периодическая гиперфункция от f.

[1]Работа поддержана РФФИ, проект номер 08-01-00241.

Данная работа посвящена исследованию свойств теорий, образованных из арифметики А.Л. Семенова добавлением функций $f_i, i > 0$, которые в работе названы «гиперфункциями», полученных итерацией, согласованной со сложением функции f_0. Показано, что при выполнении условия эффективной периодичности гиперфункций теории являются разрешимыми. Частным случаем иерархий является функция Аккермана при фиксированном первом аргументе.

2. Определения

Согласованные со сложением функции. Далее всюду строчные готические буквы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, …(возможно, с индексами) будут обозначать целочисленные константы.

Определение 1. *Будем говорить, что функция f является* эффективно периодичной*, если для любого натурального p функция f периодична по модулю p с периодом, который определяется эффективно по p.*

Определение 2 (А.Л. Семенов, см. [4])**.** *Функция f называется* согласованной со сложением*, если она удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *f периодична по модулю n для всех $n \in \omega$, $n \geqslant 2$;*

(2) *для всякой неограниченной конечной суммы*

$$S(x) = \sum_i \mathfrak{o}_i f(x + \mathfrak{b}_i)$$

существует такое $\mathfrak{d} \in \omega$, что либо $S(x + \mathfrak{d}) > f(x)$ для всех $x \in \omega$, либо $S(x + \mathfrak{d}) < -f(x)$ для всех $x \in \omega$;

(3) *f монотонно возрастает.*

Определение 3 (А.Л. Семенов, см. [4])**.** *Функция f называется* эффективно согласованной со сложением*, если константы в пунктах (1) и (2) находятся эффективно.*

Примерами функций, согласованных со сложением, являются c^x, $x!$, где c – натуральное число (константа).

Определение 4 (Иерархия функций f_i)**.** *Пусть в последовательности функций f_i, где $i \in \omega$, функция f_i определена так, что*

$$f_i(x + 1) = f_{i-1}(f_i(x)).$$

Тогда функцию f_i будем называть гиперфункцией *от f_{i-1}.*

Функция Аккермана. Аккерманом был предложен следующий пример не примитивно-рекурсивной функции.

Определение 5 (Аккерман, см. [7]). *Функция Аккермана определяется рекурсивно для неотрицательных целых чисел m и n следующим образом:*

$$A(m,k) = \begin{cases} k+1, & m=0; \\ A(m-1,1), & m>0, k=0; \\ A(m-1, A(m,k-1)), & m>0, k>0. \end{cases}$$

Если мы зафиксируем m, то получим:

(1) $m=0$. $A(0,k)=k+1$.

(2) $m=1$. $A(1,k)=k+2$

(3) $m=2$. $A(2,k)=2k+3$

(4) $m=3$. $A(3,k)=2^{k+3}-3$.

(5) $m>3$. $A(m,k)=f_m(k)$. Покажем, что $f_m(k)$ — гиперфункция от $f_{m-1}(k)$.

Итак,

$$f_m(0) = A(m,0) = \mathfrak{c}, f_m(n+1) = A(m,k+1) = \\ = A(m-1, A(m,k)) = f_{m-1}(A(m,k)) = f_{m-1}(f_m(k)).$$

Следствие 1. *Функции, полученные из функции Аккермана фиксированием первого аргумента, образуют иерархию согласованных со сложением функций.*

3. Свойства иерархий функций

Поведение функций f_i. Докажем леммы, которые описывают основные свойства иерархий функций. Первые две леммы показывают, что любая функция из иерархии либо строго возрастает, либо является константой, начиная с некоторого аргумента.

Лемма 1. *Если для $i>0$ существует такое m, что функция $f_i(m)=f_i(m+1)$, то для $x \geqslant m$ функция $f_i(x)$ является константой.*

Доказательство. Докажем индукцией по x, что для каждого $x \geqslant m$ верно $f_i(x) = f_i(x+1)$. Пусть $f_i(m) = \mathfrak{a}$.

Для $x=m$ утверждение следует из условия теоремы.

Теперь пусть $x>m$, причем для всех меньших x утверждение уже доказано, то есть мы знаем, что $f_i(x-1) = f_i(x)$, докажем, что $f_i(x) = f_i(x+1)$. Имеем, $f_i(x) = f_{i-1}(f_i(x-1)) = f_{i-1}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, то есть $f_{i-1}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, тогда мы получаем $f_i(x+1) = f_{i-1}(f_i(x)) = f_{i-1}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$.

Итак, мы получили, что для каждого $x \geqslant m$ будет $f_i(x) = f_i(x+1) = \mathfrak{a}$, тем самым мы показали, что функция $f_i(x)$ является константой для $x \geqslant m$.

$\square$

Лемма 2. *Если для $i \geqslant 0$ функция f_i является монотонно возрастающей, то функция f_{i+1} будет строго возрастающей или будет константа, начиная с некоторого x.*

Доказательство. Мы можем получить следующие ситуации.

(1) $f_{i+1}(1) > f_{i+1}(0)$. Так как $f_{i+1}(x+1) = f_i(f_{i+1}(x))$ и так как функция f_i является монотонно возрастающей, то для всех x имеем $f_{i+1}(x+1) \geqslant f_{i+1}(x)$.

  (1) $f_{i+1}(x+1) > f_{i+1}(x)$, для всех x.
  В этой ситуации функция $f_{i+1}(x)$ является строго возрастающей.

  (2) $f_{i+1}(x+1) = f_{i+1}(x)$, для некоторого x.
  В этой ситуации по лемме 1 функция $f_{i+1}(x)$ является константой.

(2) $f_{i+1}(0) = f_{i+1}(1)$. В этой ситуации по лемме 1 функция $f_{i+1}(x)$ является константой.

(3) $f_{i+1}(1) < f_{i+1}(0)$. Так как $f_{i+1}(x+1) = f_i(f_{i+1}(x))$ и так как функция f_i является монотонно возрастающей, то для всех x имеем $f_{i+1}(x+1) \leqslant f_{i+1}(x)$. Тогда получаем, что существует x, при котором $f_{i+1}(x) = f_{i+1}(x+1)$, тогда по лемме 1 функция $f_{i+1}(x)$ является константой. □

Следующие две леммы показывают, что функция f_0 растет быстрее, чем линейная функция, а также, что любая функция из иерархии растет не медленнее, чем предыдущая.

Лемма 3. *Любая согласованная со сложением функция $f(x)$ растет быстрее, чем любая линейная функция, начиная с некоторого x.*

Доказательство. В статье [4] было показано, что любая функция, согласованная со сложением, растет не медленнее, чем функция экспоненты. Также мы знаем, что функция экспоненты, начиная с некоторого x, растет быстрее, чем любая линейная функция. □

Лемма 4. *Если функция f_0 согласована со сложением, а f_i — гиперфункция от f_{i-1} для $i > 0$, то для $i > 0$ функция $f_i(x)$ растет не медленнее, чем функция $f_{i-1}(x)$, начиная с некоторого x.*

Доказательство. Докажем индукцией по i.

Для $i = 1$ нужно доказать, что функция f_1, начиная с некоторого x, растет не медленнее, чем функция f_0.

Так как $f_1(x) = f_0(f_1(x-1))$, то чтобы показать, что функция f_1, начиная с некоторого x, растет не медленнее, чем функция f_0, нужно показать, что $f_0(f_1(x-1)) \geqslant f_0(x)$, но для этого, так как функция f_i – возрастающая, достаточно показать, что $f_1(x-1) \geqslant x$, начиная с некоторого x.

Так как $f_1(x) = f_0(f_1(x-1))$ и так как f_0 растет не медленнее, чем функция экспоненты, то начиная с некоторой константы d и для некоторой константы c имеем:

$$f_1(d) = f_0(f_1(d-1)) \geqslant c^{f_1(d-1)} = c^{f_0(f_1(d-2))} \geqslant c^{c^{f_1(d-2)}} \geqslant \ldots \geqslant c^{c^{\cdots^{c}}} \geqslant d+1.$$

Тем самым мы показали, что $f_1(x) \geqslant x + 1$, начиная с некоторого x, то есть мы получили, что f_1, начиная с некоторого x, растет не медленнее, чем функция f_0.

Теперь пусть $i > 1$, нужно доказать, что функция f_i, начиная с некоторого x, растет не медленнее, чем функция f_{i-1}, причем для всех меньших i утверждение уже доказано. Так как $f_i(x) = f_{i-1}(f_i(x-1))$, то чтобы показать, что функция f_i, начиная с некоторого x, растет не медленнее, чем функция f_{i-1}, нужно показать, что $f_{i-1}(f_i(x-1)) \geqslant f_{i-1}(x)$, но для этого, так как функция f_i — возрастающая, достаточно показать, что $f_i(x-1) \geqslant x$, начиная с некоторого x.

Так как $f_i(x) = f_{i-1}(f_i(x-1))$ и так как f_{i-1} по индукционному предположению растет не медленнее, чем функция f_0, которая в свою очередь растет не медленнее, чем функция экспоненты, то начиная с некоторой константы d и для некоторой константы c имеем:

$$f_i(d) = f_{i-1}(f_i(d-1)) \geqslant c^{f_i(d-1)} = c^{f_{i-1}(f_i(d-2))} \geqslant c^{c^{f_i(d-2)}} \geqslant \ldots \geqslant c^{c^{\cdots^{c}}} \geqslant d+1.$$

Тем самым мы показали, что $f_i(x) \geqslant x + 1$, начиная с некоторого x, то есть мы получили, что f_i, начиная с некоторого x, растет не медленнее, чем функция f_{i-1}.

$\square$

Теперь установим важные для нас свойства обратных функций.

Лемма 5. *Если f_0 — функция, согласованная со сложением, то для любой константы $\mathfrak{a}$ существует константа $\mathfrak{d}_a$, такая что*

$$f_0^{-1}(x \times \mathfrak{a}) \leqslant f_0^{-1}(x) + \mathfrak{d}_a.$$

Доказательство. Итак, $f_0(u-1) \leqslant x \leqslant f_0(u)$ для некоторого u. Тогда

$$f_0^{-1}(f_0(u-1)) \leqslant f_0^{-1}(x),$$

т. е. $u \leqslant f_0^{-1}(x) + 1$. В статье [4] было показано, что для любой константы $\mathfrak{a}$ существует константа $\mathfrak{d}$, такая что $f_0(u+\mathfrak{d}) \geqslant \mathfrak{a} \times f_0(u)$. Тогда

$$f_0^{-1}(f_0(u+\mathfrak{d})) \geqslant f_0^{-1}(\mathfrak{a} \times f_0(u)),$$

т. е. $u + \mathfrak{d} \geqslant f_0^{-1}(\mathfrak{a} \times f_0(u))$. Но тогда, положив $\mathfrak{d}_a = \mathfrak{d} + 1$, получаем

$$f_0^{-1}(x \times \mathfrak{a}) \leqslant f_0^{-1}(f_0(u) \times \mathfrak{a}) \leqslant u + \mathfrak{d} \leqslant f_0^{-1}(x) + 1 + \mathfrak{d} = f_0^{-1}(x) + \mathfrak{d}_a. \qquad \square$$

Лемма 6. *Если функция f_0 согласована со сложением, а f_i — гиперфункция от f_{i-1} для i>0, то для $i > 0$, для любой константы $\mathfrak{a}$ существует константа $\mathfrak{d}_a$, такая что $f_i^{-1}(x + \mathfrak{a}) \leqslant f_i^{-1}(x) + \mathfrak{d}_a$.*

Доказательство. Итак, $f_i(u-1) \leqslant x \leqslant f_i(u)$ для некоторого u. Тогда

$$f_i^{-1}(f_i(u-1)) \leqslant f_i^{-1}(x),$$

т. е. $u \leqslant f_i^{-1}(x) + 1$.

Пользуясь леммами 3 и 4, получаем, что при $i > 0$, начиная с некоторого u, $f_i(u+1) = f_{i-1}(f_i(u)) \geqslant f_i(u) + \mathfrak{a}$.

Тогда, положив $\mathfrak{d}_a = 2$, получаем

$$f_i^{-1}(x + \mathfrak{a}) \leqslant f_i^{-1}(f_i(u) + \mathfrak{a}) \leqslant f_i^{-1}(f_i(u+1)) = \\ = u + 1 \leqslant f_i^{-1}(x) + 2 = f_i^{-1}(x) + \mathfrak{d}_a. \quad \square$$

Термы t_{ji}. Мы определим термы, с которыми будем в дальнейшем работать, и докажем для них ряд важных для нас свойств. Мы будем рассматривать термы следующего вида:

$$t_{ji}(v, \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{a}_j) = f_i(f_{i+1}(\ldots(f_{j-1}(f_j(v + \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j-1})\ldots) + \mathfrak{a}_{i+1}) + \mathfrak{a}_i),$$

где $i \leqslant j$, все $\mathfrak{a}_k$ — константы. Например, $t_{32}(v, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = f_2(f_3(v + \mathfrak{a}_3) + \mathfrak{a}_2)$.

Сначала покажем, что значение терма $3 \times t_{j0}(x, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j)$ не превосходит значение терма $t_{j0}(x + 1, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j)$.

Лемма 7. *Если функция f_0 согласована со сложением, а f_j — гиперфункция от f_{j-1} для $j > 0$, то для каждого $j > 0$ и любых $\mathfrak{a}_k$ верно неравенство*

$$t_{j0}(x + 1, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \geqslant 3 \times t_{j0}(x, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j),$$

начиная с некоторого x.

Доказательство. Так как f_0 — функция, согласованная со сложением, то существует такое $\mathfrak{d}$, что для любого v, $f_0(v + \mathfrak{d}) \geqslant 3 \times f_0(v)$ (см. [4]), а также пользуясь леммой 3, получаем, что для этого $\mathfrak{d}$ выполняется неравенство $f_0(f_1(v)) \geqslant f_1(v) + \mathfrak{d}$. Пользуясь леммой 4, получаем, что начиная с некоторого v, при $j > 0$ выполняется неравенство $f_j(f_{j+1}(v)) \geqslant f_{j+1}(v) + 1$. То есть при $j > 0$ получаем

$$\begin{aligned} t_{j0}(x + 1, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) &= f_0(f_1(\ldots(f_{j-1}(f_j(x + \mathfrak{a}_j + 1) + \mathfrak{a}_{j-1})\ldots) + \mathfrak{a}_1) + \mathfrak{a}_0) = \\ &= f_0(f_1(\ldots(f_{j-1}(f_{j-1}(f_j(x + \mathfrak{a}_j)) + \mathfrak{a}_{j-1})\ldots) + \mathfrak{a}_1) + \mathfrak{a}_0) \geqslant \\ &\geqslant f_0(f_1(\ldots(f_{j-1}(f_j(x + \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j-1} + 1)\ldots) + \mathfrak{a}_1) + \mathfrak{a}_0) \geqslant \\ &\qquad \ldots \\ &\geqslant f_0(f_1(\ldots(f_{j-1}(f_j(x + \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j-1})\ldots) + \mathfrak{a}_1 + 1) + \mathfrak{a}_0) = \\ &= f_0(f_0(f_1(\ldots(f_{j-1}(f_j(x + \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j-1})\ldots) + \mathfrak{a}_1)) + \mathfrak{a}_0) \geqslant \\ &\geqslant f_0(f_1(\ldots(f_{j-1}(f_j(x + \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j-1})\ldots) + \mathfrak{a}_1) + \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}) \geqslant \\ &\geqslant 3 \times f_0(f_1(\ldots(f_{j-1}(f_j(x + \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j-1})\ldots) + \mathfrak{a}_1) + \mathfrak{a}_0) = \\ &= 3 \times t_{j0}(x, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j). \quad \square \end{aligned}$$

Теперь установим, как зависит значение терма от значения аргумента.

Лемма 8. *Если функция f_0 согласована со сложением, а f_i — гиперфункция от f_{i-1} для $i > 0$, а также $u_1 + \mathfrak{a}_{j_{u_1}} > u_2 + \mathfrak{a}_{j_{u_2}}$ и*

$$t_{j0}(u_1, \mathfrak{a}_{0_{u_1}}, \mathfrak{a}_{1_{u_1}}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_1}}) < \mathfrak{c} t_{j0}(u_2, \mathfrak{a}_{0_{u_2}}, \mathfrak{a}_{1_{u_2}}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_2}})$$

для $j > 0$, и некоторых констант $\mathfrak{c}$,$\mathfrak{a}_k$, то u_2 не превосходит некоторой константы, зависящей от $\mathfrak{c}$,$\mathfrak{a}_k$, и j.

Доказательство. Так как

$$t_{j0}(u_1, \mathfrak{a}_{0_{u_1}}, \mathfrak{a}_{1_{u_1}}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_1}}) < \mathfrak{c} t_{j0}(u_2, \mathfrak{a}_{0_{u_2}}, \mathfrak{a}_{1_{u_2}}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_2}}),$$

то

$$f_0^{-1}(t_{j0}(u_1, \mathfrak{a}_{0u_1}, \mathfrak{a}_{1u_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_1}})) \leqslant f_0^{-1}(\mathfrak{c}t_{j0}(u_2, \mathfrak{a}_{0u_2}, \mathfrak{a}_{1u_2}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_2}})).$$

Пользуясь леммой 5, получаем

$$t_{j1}(u_1, \mathfrak{a}_{1u_1}, \mathfrak{a}_{2u_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_1}}) + \mathfrak{a}_{0u_1} = f_0^{-1}(t_{j0}(u_1, \mathfrak{a}_{0u_1}, \mathfrak{a}_{1u_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_1}})) \leqslant$$
$$\leqslant f_0^{-1}(\mathfrak{c}t_{j0}(u_2, \mathfrak{a}_{0u_2}, \mathfrak{a}_{1u_2}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_2}})) \leqslant t_{j1}(u_2, \mathfrak{a}_{1u_2}, \mathfrak{a}_{2u_2}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_2}}) + \mathfrak{a}_{0u_2} + \mathfrak{d}_\mathfrak{c},$$

где $\mathfrak{d}_\mathfrak{c}$ — константа из леммы 5. Далее получаем

$$t_{j1}(u_1, \mathfrak{a}_{1u_1}, \mathfrak{a}_{2u_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_1}}) \leqslant t_{j1}(u_2, \mathfrak{a}_{1u_2}, \mathfrak{a}_{2u_2}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_2}}) + \mathfrak{d}_1,$$

где $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}_{0u_2} + \mathfrak{d}_\mathfrak{c} - \mathfrak{a}_{0u_1}$.

Далее, пользуясь леммой 6, получаем

$$f_1^{-1}(t_{j1}(u_1, \mathfrak{a}_{1u_1}, \mathfrak{a}_{2u_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_1}})) \leqslant f_1^{-1}(t_{j1}(u_2, \mathfrak{a}_{1u_2}, \mathfrak{a}_{2u_2}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_2}}) + \mathfrak{d}_1),$$

$$t_{j2}(u_1, \mathfrak{a}_{2u_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_1}})) + \mathfrak{a}_{1u_1} \leqslant f_1^{-1}(t_{j1}(u_2, \mathfrak{a}_{1u_2}, \mathfrak{a}_{2u_2}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_2}})) + \mathfrak{d}',$$

где $\mathfrak{d}'$ — константа из леммы 6. Далее получаем

$$t_{j2}(u_1, \mathfrak{a}_{2u_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_1}}) + \mathfrak{a}_{1u_1} \leqslant t_{j2}(u_2, \mathfrak{a}_{2u_2}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_2}})) + \mathfrak{d}' + \mathfrak{a}_{1u_2},$$

$$t_{j2}(u_1, \mathfrak{a}_{2u_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_1}}) \leqslant t_{j2}(u_2, \mathfrak{a}_{2u_2}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_{u_2}})) + \mathfrak{d}'',$$

где $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}_{1u_2} + \mathfrak{d}' - \mathfrak{a}_{1u_1}$.

Затем, последовательно пользуясь леммой 6, получаем

$$t_{jj}(u_1, \mathfrak{a}_{j_{u_1}}) + \mathfrak{a}_{j-1_{u_1}} \leqslant t_{jj}(u_2, \mathfrak{a}_{j_{u_2}}) + \mathfrak{a}_{j-1_{u_2}} + \mathfrak{d},$$

где $\mathfrak{d}$ — некоторая константа. Получаем, что

$$f_j(u_1 + \mathfrak{a}_{j_{u_1}}) \leqslant f_j(u_2 + \mathfrak{a}_{j_{u_2}}) + \mathfrak{d}_j,$$

где $\mathfrak{d}_j = \mathfrak{a}_{j-1_{u_2}} + \mathfrak{d} - \mathfrak{a}_{j-1_{u_1}}$.

Итак, $f_j(u_1 + \mathfrak{a}_{j_{u_1}}) > f_j(u_2 + \mathfrak{a}_{j_{u_2}})$, значит,

$$f_j(u_1 + \mathfrak{a}_{j_{u_1}}) \geqslant f_j(u_2 + \mathfrak{a}_{j_{u_2}} + 1) = f_{j-1}(f_j(u_2 + \mathfrak{a}_{j_{u_2}})).$$

Далее получаем

$$f_{j-1}(f_j(u_2 + \mathfrak{a}_{j_{u_2}})) \leqslant f_j(u_2 + \mathfrak{a}_{j_{u_2}}) + \mathfrak{d}_j.$$

Пользуясь леммами 3 и 4, получаем, что $f_j(u_2 + \mathfrak{a}_{j_{u_2}})$ ограничено некоторой константой, следовательно, u_2 не превосходит некоторой константы. $\square$

Лемма 9. *Если f_0 — функция, согласованная со сложением, а f_i — гиперфункция от f_{i-1} для $i>0$, и существует такое v, что*

$$\frac{1}{2} \times \mathfrak{a}t_{i0}(v-1, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i) < \mathfrak{k} \leqslant \frac{1}{2} \times \mathfrak{a}t_{i0}(v, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i),$$

где $\mathfrak{a}_{kj}, \mathfrak{k}$ — константы, то v единственно.

Лемма 10. *Если для всех $i > 0$ функция f_i строго возрастает, то для любого $\mathfrak{d}_1 \in \omega$ выполняются неравенства:*

$$t_{j0}(x + \mathfrak{d}_1, \mathfrak{a}_0, \dots, \mathfrak{a}_j) \geqslant t_{j0}(x, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_1, \dots, \mathfrak{a}_j)$$

и

$$t_{j0}(x - \mathfrak{d}_1, \mathfrak{a}_0, \dots, \mathfrak{a}_j) \leqslant t_{j0}(x, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_1, \dots, \mathfrak{a}_j).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} t_{j0}(x + \mathfrak{d}_1, \mathfrak{a}_0, \dots, \mathfrak{a}_j) &= f_0(\dots(f_{j-1}(f_j(x + \mathfrak{d}_1 + \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j-1})\dots) + \mathfrak{a}_0) \geqslant \\ &\geqslant f_0(\dots(f_{j-1}(f_j(x + \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j-1} + \mathfrak{d}_1)\dots) + \mathfrak{a}_0) \geqslant \dots \geqslant \\ &\geqslant f_0(\dots(f_{j-1}(f_j(x + \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j-1})\dots) + \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_1) = t_{j0}(x, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_1, \dots, \mathfrak{a}_j). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{j0}(x - \mathfrak{d}_1, \mathfrak{a}_0, \dots, \mathfrak{a}_j) &= f_0(\dots(f_{j-1}(f_j(x - \mathfrak{d}_1 + \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j-1})\dots) + \mathfrak{a}_0) \leqslant \\ &\leqslant f_0(\dots(f_{j-1}(f_j(x + \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j-1} - \mathfrak{d}_1)\dots) + \mathfrak{a}_0) \leqslant \dots \leqslant \\ &\leqslant f_0(\dots(f_{j-1}(f_j(x + \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j-1})\dots) + \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_1) = t_{j0}(x, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_1, \dots, \mathfrak{a}_j). \quad \square \end{aligned}$$

4. Теория $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, f_1, \dots, f_n)$

Элиминация кванторов в теории $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, f_1, \dots, f_n)$**.** Пусть теория $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +)$ — арифметика Пресбургера. Добавим в сигнатуру этой теории $n+1$ новый одноместный функциональный символ $f_0, f_1, \dots, f_n$, где функции f_i образуют иерархию.

Заметим, что в теории $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, f_1, \dots, f_n)$ определимы (см. [1, 5]) следующие символы: все натуральные числа, предикаты делимости $Q_i(x)$, умножение на константу и целочисленное деление на константу. Мы будем использовать также вычитание, когда оно имеет смысл для натуральных чисел.

Также для всех i определимы обратные функции:

$$f_i^{-1}(x) = b \iff f_i(b) \leqslant x \wedge f_i(b+1) > x.$$

Если $f_i(0) = m > 0$, то будем считать $f_i^{-1}(n) = 0$, где $n < m$.

Добавление к теории определимых символов не увеличивает выразительных возможностей, поэтому в дальнейшем мы будем включать все эти символы в состав сигнатуры.

Мы продемонстрируем, что если теорию

$$\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, f_1, \dots, f_n),$$

где f_0 — эффективно согласованная со сложением функция, а $f_1, \dots, f_n$ эффективно периодичны, обогатить предикатами делимости и обратными функциями для функций $f_0, f_1, \dots, f_n$, то каждая формула будет эквивалентна бескванторной. Эта бескванторная формула строится по исходной эффективно, если согласование эффективно.

Далее, по любому атомному предложению мы можем вычислить его истинностное значение, и, следовательно, мы можем то же самое проделать для любого бескванторного предложения.

Из лемм 1 и 2 и из того, что f_0 — монотонно возрастающая функция, видно, что все функции f_i являются возрастающими или являются константами, начиная с некоторого аргумента. Причем, если f_i является константой, то f_{i+1} также является константой. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только возрастающие f_i. Докажем, что если все гиперфункции являются периодическими по любому натуральному модулю, то любая формула в теории $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, f_1, \ldots, f_n)$ эквивалентна экзистенциальной.

Теорема 1. *Если f_0 согласована со сложением и все f_i периодичны по модулю p для любого натурального p, то в теории $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, f_1, \ldots, f_n)$ любая формула эквивалентна экзистенциальной формуле, матрица которой является булевой комбинацией предикатов делимости и сравнений сумм вида*

$$\mathfrak{d} + \sum_v (\mathfrak{b}_{0v} \times t_{00}(v, \mathfrak{a}_0) + \cdots + \mathfrak{b}_{iv} \times t_{i0}(v, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i) + \mathfrak{c}_v v) \tag{1}$$

где все $\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ — константы, v — переменные из формулы.

Доказательство. Наша задача — продемонстрировать, что формула

$$\neg(\exists x_1, \ldots, x_l)\phi \tag{2}$$

эквивалентна экзистенциальной, если ϕ — бескванторная формула, причем при этом преобразовании матрица формулы не теряет нужного нам вида. Будем делать это индукцией по количеству кванторов, стоящих после знака отрицания. Изначально будем считать, что ϕ является конъюнкцией предикатов делимости и сравнений сумм вида (1). Также считаем, что под предикатом делимости стоят только термы вида:

$$x + \mathfrak{b}, \quad t_{00}(x, \mathfrak{a}_0) + \mathfrak{c}, \ldots, t_{i0}(x, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i) + \mathfrak{d}$$

Этого легко добиться (см. [1]).

Прежде отметим, что делимость числа $t_{i0}(u, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i)$ для любых i зависит от делимости u, то есть $Q_j(t_{i0}(u, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i)) + \mathfrak{a})$ эквивалентна булевой комбинации формул вида $Q_k(u + \mathfrak{b})$ для некоторых k и $\mathfrak{b}$ и некоторых линейных неравенств для u.(см. [6])

Еще несколько тривиальных замечаний:

(1) Если $x \leqslant y$ и $t_{i0}(y, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i) < \mathfrak{a}x$ для некоторой константы $\mathfrak{a}$, то x не превосходит некоторой константы $\mathfrak{b}$.

(2) Если $j < i$, $x \leqslant y$ и $t_{i0}(y, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i) \leqslant \mathfrak{a}t_{j0}(x, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j)$, то x не может превосходить некоторой константы $\mathfrak{b}$.

Последнее замечание справедливо благодаря лемме 4.

Теперь у нас любая формула является булевой комбинацией предикатов делимости вида $Q_i(u + \mathfrak{a})$ и сравнений сумм вида (1).

Также следует отметить почему можно ограничиться рассмотрением термов вида $\mathfrak{b}t_{i0}(v, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i)$ и $\mathfrak{c}v$.

Утверждение 1. *Можно ограничиться рассмотрением термов вида* $\mathfrak{b}\mathfrak{t}_{i0}(v, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i)$ *и* $\mathfrak{c}v$.

Доказательство. Каждую формулу, путем добавления кванторов существования, можно привести к виду, что в ней каждый терм будет иметь вид $\mathfrak{b}f_i(v)$ или $\mathfrak{c}v$. Затем каждый терм вида $f_i(v)$ преобразуем следующим образом:

$$\mathfrak{b}f_i(v) = \mathfrak{b}f_{i-1}(f_i(v-1)) = \mathfrak{b}f_{i-2}(f_{i-1}(f_i(v-1)-1)) = \cdots = \mathfrak{b}t_{i0}(v, -1, \ldots, -1). \quad \square$$

Если для какого-то x_i из формулы (2) члены видов $t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j)$ не встречаются в неравенствах из ϕ, то квантор для этого x_i удаляется точно так же, как в арифметике Пресбургера, причем при этом преобразовании матрица формулы не теряет нужного нам вида (см., например, [1]).

Теперь мы можем считать, что для всех x_i имеется член $t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j)$. Этого можно добиться с помощью рассмотрения различных случаев и объединения их с помощью дизъюнкции. Такая операция не увеличит количества кванторов перед каждой из вновь полученных формул.

Приведем каждое неравенство из ϕ к виду

$$r_k \leqslant s_k \leqslant w_k, \tag{3}$$

где суммы s_k содержат только слагаемые с переменными x_i, а суммы r_k и w_k таких слагаемых не содержат. Ограничивающий член r_k, можно считать, есть всегда, в качестве него всегда можно взять 0. Верхняя граница w_k может отсутствовать.

Далее следует отметить (см. [4]), что если f — функция согласованная со сложением, то для любой константы $c \in \omega$ существует $\mathfrak{d}_c \in \omega$, что для всех $x \in \omega$ выполнено $f(x + \mathfrak{d}_c) \geqslant cf(x) + cx$. В связи с этим мы имеем, что для всякой неограниченной конечной суммы $S(x) = \sum_q \mathfrak{o}_q f(x + \mathfrak{b}_q)$ существует такое $\mathfrak{d}_S \in \omega$, что либо $f(x - \mathfrak{d}_S) < S(x) < f(x + \mathfrak{d}_S)$ для всех $x \in \omega$, либо $-f(x + \mathfrak{d}_S) < S(x) < -f(x - \mathfrak{d}_S)$ для всех $x \in \omega$.

Поэтому, если в s_k для какого-то x_i имеется

$$S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) = \sum_q \mathfrak{o}_q t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_q, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) = \\ = \sum_q \mathfrak{o}_q f_0(t_{j1}(x_i, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{b}_q + \mathfrak{a}_0),$$

то мы получаем, что существует такое $\mathfrak{d}_{S_j} \in \omega$, что либо

$$f_0(t_{j1}(x_i, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}) < S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < \\ < f_0(t_{j1}(x_i, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j})$$

для всех $x \in \omega$, либо

$$- f_0(t_{j1}(x_i, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}) < S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < \\ < -f_0(t_{j1}(x_i, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j})$$

для всех $x \in \omega$.

Без ограничения общности рассмотрим только первый случай. Итак, для всех x_i и j мы имеем:

$$t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j).$$

Сгруппируем термы по каждой переменной в такие суммы. Выберем среди всех s_k максимальное по величине S_j. Это возможно сделать с помощью рассмотрения различных случаев и объединения их с помощью дизъюнкции. Обозначим максимальную сумму через σ. Если есть несколько одинаковых максимальных, то возьмем любое из них. Следует отметить, что если слагаемое σ имеет вид $\mathfrak{a}x_i$, $i = 1, \ldots, l$, то, ввиду того, что для всех x_i имеется член $t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j)$, мы получаем: $\mathfrak{a}x_i \geqslant t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j)$. В этом случае, согласно сделанному в начале доказательства замечанию (1), x_i не превосходит некоторую константу.

Пусть s'_k — остаток суммы s_k (без σ). Возможны две ситуации:

(1) σ по модулю превосходит каждое s'_k не менее чем в два раза,

(2) σ по модулю меньше $2s'_k$ для некоторого k.

1 случай: $|\sigma| \geqslant 2|s'_k|$ для всех k.
Тогда для каждого s_k имеем оценку

$$\frac{1}{2}t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < \frac{1}{2}\sigma \leqslant s_k \leqslant \frac{3}{2}\sigma < t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j).$$

Выберем r_p — максимальный из всех r_k, и w_q — минимальный из всех w_k.

Мы знаем, что, если f_0 — функция, согласованная со сложением, то существует такое $\mathfrak{d}$, что $f_0(x + \mathfrak{d}) \geqslant 3 \times f_0(x)$, то есть $t_{00}(x + \mathfrak{d}, 0) \geqslant 3 \times t_{00}(x, 0)$ (см. [4]).

По лемме 7 для каждого $j > 0$ верно неравенство

$$t_{j0}(x + 1, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \geqslant 3 \times t_{j0}(x, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j),$$

начиная с некоторого x, то есть мы показали, что для $j \geqslant 0$ существует такое $\mathfrak{d}$, что

$$t_{j0}(x + \mathfrak{d}, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \geqslant 3 \times t_{j0}(x, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j),$$

начиная с некоторого x.

Если истинно

$$(\exists u)\left(r_p \leqslant \frac{1}{2} \times t_{j0}(u, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \wedge \frac{3}{2} \times t_{j0}(u + 1, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \leqslant w_q\right),$$

то, положив $x_i = u$, будем иметь

$$r_k \leqslant r_p \leqslant \frac{1}{2} \times t_{j0}(u, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < \frac{1}{2} \times S_j(u, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) = \frac{1}{2}\sigma \leqslant s_k$$

и

$$w_k \geqslant w_q \geqslant \frac{3}{2} \times t_{j0}(u + 1, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) > \frac{3}{2} \times S_j(u, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) = \frac{3}{2}\sigma \geqslant s_k.$$

Получили, что (3) выполнено для всех k. Следовательно, после замены x_i на u истинность формулы (2) не изменится.

Если же такого u нет, то

$$(\forall u)\left(r_p \leqslant \frac{1}{2} \times t_{j0}(u, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \to w_q < \frac{3}{2} \times t_{j0}(u+1, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j)\right).$$

Далее возможны две ситуации:

(a) $\frac{1}{2} \times t_{j0}(0, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < r_p$.

Покажем, что формула (2) эквивалентна такой:

$$(\exists u)\Bigg(\frac{1}{2} \times t_{j0}(u-1, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < r_p \leqslant \frac{1}{2} \times t_{j0}(u, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \wedge \\ \wedge \neg(\exists x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \bigvee_{x_i \in \{u - \mathfrak{d} - 2\mathfrak{d}_{S_j}, \ldots, u + \mathfrak{d} + 2\mathfrak{d}_{S_j}\}} \phi\Bigg).$$

По лемме 9 такое u только одно. Далее, пользуясь леммой 10, при $x_i \leqslant u - \mathfrak{d} - 2\mathfrak{d}_{S_j} - 1$ имеем

$$s_k \leqslant \frac{3}{2} \times t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \leqslant \frac{3}{2} \times t_{j0}(u - \mathfrak{d} - 2\mathfrak{d}_{S_j} - 1, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2} \times t_{j0}(u - 2\mathfrak{d}_{S_j} - 1, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \leqslant \frac{1}{2} \times t_{j0}(u-1, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < r_p.$$

При $x_i \geqslant u + \mathfrak{d} + 1 + 2\mathfrak{d}_{S_j}$ имеем

$$s_k \geqslant \frac{1}{2} \times t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \geqslant \frac{1}{2} \times t_{j0}(u + \mathfrak{d} + 1 + 2\mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \geqslant \\ \geqslant \frac{3}{2} \times t_{j0}(u + 1 + 2\mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \geqslant \frac{3}{2} \times t_{j0}(u+1, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) > w_q.$$

Таким образом, и в том, и в другом случае формула ϕ ложна.

(b) $\frac{1}{2} \times t_{j0}(0, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \geqslant r_p$.

Покажем, что формула (2) эквивалентна такой:

$$\neg(\exists x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \bigvee_{x_i \in \{0, \ldots, \mathfrak{d} + 2\mathfrak{d}_{S_j}\}} \phi.$$

Далее, пользуясь леммой 10 при $x_i \geqslant \mathfrak{d} + 2\mathfrak{d}_{S_j} + 1$ имеем

$$s_k \geqslant \frac{1}{2} \times t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \geqslant \frac{1}{2} \times t_{j0}(\mathfrak{d} + 2\mathfrak{d}_{S_j} + 1, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \geqslant \\ \frac{3}{2} \times t_{j0}(2\mathfrak{d}_{S_j} + 1, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \geqslant \frac{3}{2} \times t_{j0}(1, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) > w_q,$$

то есть в этом случае формула ϕ ложна.

2 случай: $|\sigma| < 2|s'_k|$ для некоторого k.
Выберем в s_k среди всех S_j вторую по величине сумму. Если максимальных сумм было несколько, то берем другую максимальную. Выбранную сумму обозначим τ_k. Пусть $\mathfrak{c}$ — удвоенная сумма модулей всех коэффициентов из s'_k, то есть некоторая константа. Тогда получаем $\sigma < \mathfrak{c}\tau_k$.

Слагаемое τ_k может иметь один из видов: $S_j(x_k, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j)$ или $\mathfrak{b}x_k$, $k = 1, \ldots, l$, $j = 0, \ldots, n$ где $\mathfrak{b} \geqslant 1$. Рассмотрим различные случаи и покажем, как в каждом из них можно уменьшить количество кванторов в формуле (2).

(1) $\sigma = S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j), \tau_k = \mathfrak{b}x_p, p \geqslant 1$. Имеем

$$\mathfrak{b}x_p \leqslant S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < \mathfrak{c}\mathfrak{b}x_p,$$

Так как в начале нашего доказательства мы сказали, что для всех x_p имеется член $t_{q0}(x_p, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_q)$, то в каком-то s_l ($l \neq k$) содержится член $t_{q0}(x_p, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_q)$. Тогда получаем

$$t_{q0}(x_p, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S_q}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_q) < S_q(x_p, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_q) \leqslant S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j),$$

$$S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \leqslant \mathfrak{c}\mathfrak{b}x_p,$$

$$t_{q0}(x_p, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S_q}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_q) \leqslant \mathfrak{c}\mathfrak{b}x_p,$$

и, согласно сделанному в начале доказательства замечанию (1), x_p не превосходит некоторую константу.

(2) $\sigma = S_0(x_i, \mathfrak{a}_0), \tau_k = S'_0(x_k, \mathfrak{a}'_0)$. Имеем

$$S'_0(x_k, \mathfrak{a}'_0) \leqslant S_0(x_i, \mathfrak{a}_0) < \mathfrak{c}S'_0(x_k, \mathfrak{a}'_0).$$

Далее получаем два случая:

(a) $t_{00}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_0}) \geqslant t_{00}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_0})$. Получаем

$$t_{00}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_0}) \leqslant t_{00}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_0}) < S_0(x_i, \mathfrak{a}_0) < \\ < \mathfrak{c}S'_0(x_k, \mathfrak{a}'_0) < \mathfrak{c}t_{00}(x_k, \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S'_0}).$$

В итоге мы имеем

$$f_0(x_k + \mathfrak{a}_0{}' - \mathfrak{d}_{S'_0}) \leqslant f_0(x_i + \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_0}) < \mathfrak{c}f_0(x_k + \mathfrak{a}_0{}' + \mathfrak{d}_{S'_0}),$$

$$f_0^{-1}(f_0(x_k + \mathfrak{a}_0{}' - \mathfrak{d}_{S'_0})) \leqslant f_0^{-1}(f_0(x_i + \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_0})) \leqslant \\ \leqslant f_0^{-1}\Big(\mathfrak{c}f_0(x_k + \mathfrak{a}_0{}' + \mathfrak{d}_{S'_0})\Big).$$

Далее, по лемме 5, получаем

$$x_k + \mathfrak{a}_0{}' - \mathfrak{d}_{S'_0} \leqslant x_i + \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_0} \leqslant f_0^{-1}(f_0(x_k + \mathfrak{a}_0{}' + \mathfrak{d}_{S'_0})) + \mathfrak{d},$$

$$x_k + \mathfrak{a}_0{}' - \mathfrak{d}_{S_0'} \leqslant x_i + \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_0} \leqslant x_k + \mathfrak{a}_0{}' + \mathfrak{d}_{S_0'} + \mathfrak{d},$$

тогда получаем, что x_i может принимать конечное количество значений

$$x_k + \mathfrak{a}_0{}' + \mathfrak{d}_{S_0} - \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_0'}, \ldots, x_k + \mathfrak{a}_0{}' + \mathfrak{d}_{S_0'} + \mathfrak{d} - \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_0},$$

и можно вместо x_i подставить эти значения, объединив полученные формулы дизъюнкцией.

(b) $t_{00}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_0}) < t_{00}(x_k, \mathfrak{a}_0' - \mathfrak{d}_{S_0'})$. Получаем

$$t_{00}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_0}) < t_{00}(x_k, \mathfrak{a}_0' - \mathfrak{d}_{S_0'}) < S_0('x_k, \mathfrak{a}_0') \leqslant \\ \leqslant S_0(x_i, \mathfrak{a}_0) < t_{00}(x_i, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_0}).$$

Далее аналогично случаю (a) получаем, что x_k может принимать конечное количество значений.

(3) $\sigma = S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j), \tau_k = S'_{j_1}(x_k, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}), j_1 > j$.

Если в каком-то $s_{t'}$ содержится член $t_{j_2 0}(x_i, \mathfrak{a}'''_0, \mathfrak{a}'''_1, \ldots, \mathfrak{a}'''_{j_2})$, $j_2 > j$, то получаем

$$t_{j_2 0}(x_i, \mathfrak{a}'''_0 - \mathfrak{d}_{S_{j_2}}, \mathfrak{a}'''_1, \ldots, \mathfrak{a}'''_{j_2}) < S''_{j_2}(x_i, \mathfrak{a}'''_0, \mathfrak{a}'''_1, \ldots, \mathfrak{a}'''_{j_2}) \leqslant \\ \leqslant S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j)$$

и, согласно сделанному в начале доказательства замечанию (2), x_i не превосходит некоторую константу. Если же ни в каком $s_{t'}$ не содержится член $t_{j_2 0}(x_i, \mathfrak{a}'''_0, \mathfrak{a}'''_1, \ldots, \mathfrak{a}'''_{j_2})$, получаем два случая:

(a) $t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \geqslant t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1})$. Получаем

$$t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}) \leqslant t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < \\ < S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < \mathfrak{c} S'_{j_1}(x_k, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}) < \\ < \mathfrak{c} t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}).$$

(b) $t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1})$. Получаем

$$t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}) < \\ < S'_{j_1}(x_k, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}) \leqslant S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < \\ < t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j).$$

Оба случая рассматриваются аналогично, рассмотрим случай (a). Имеем

$$t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}) \leqslant t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < \\ < \mathfrak{c} t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}),$$

то есть

$$f_0^{-1}(t_{j_10}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \dots, \mathfrak{a}'_{j_1})) \leqslant f_0^{-1}(t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_j)) < \\ < f_0^{-1}(\mathfrak{c}t_{j_10}(x_k, \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \dots, \mathfrak{a}'_{j_1})).$$

Далее, применяя лемму 5, получаем

$$t_{j_11}(x_k, \mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2, \dots, \mathfrak{a}'_{j_1}) + \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_{j_1}} \leqslant t_{j1}(x_i, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j} < \\ < f_0^{-1}(t_{j_10}(x_k, \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \dots, \mathfrak{a}'_{j_1})) + \mathfrak{d}.$$

Далее мы получаем

$$t_{j_11}(x_k, \mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2, \dots, \mathfrak{a}'_{j_1}) \leqslant t_{j1}(x_i, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j} - \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}$$

и

$$t_{j1}(x_i, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_j) < t_{j_11}(x_k, \mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2, \dots, \mathfrak{a}'_{j_1})) + \mathfrak{d} + \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S'_{j_1}} + \mathfrak{d}_{S_j} - \mathfrak{a}_0.$$

Далее, последовательно применяя лемму 6, получаем

$$t_{j_1(j+1)}(x_k, \mathfrak{a}'_{j+1}, \mathfrak{a}'_{j+2}, \dots, \mathfrak{a}'_{j_1}) \leqslant x_i + \mathfrak{d}_1$$

и

$$x_i < t_{j_1(j+1)}(x_k, \mathfrak{a}'_{j+1}, \mathfrak{a}'_{j+2}, \dots, \mathfrak{a}'_{j_1})) + \mathfrak{d}_2,$$

где $\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{d}_2$ — некоторые константы. Тогда получаем, что x_i может принимать конечное количество значений

$$t_{j_1(j+1)}(x_k, \mathfrak{a}'_{j+1}, \mathfrak{a}'_{j+2}, \dots, \mathfrak{a}'_{j_1}) - \mathfrak{d}_1, \dots, t_{j_1(j+1)}(x_k, \mathfrak{a}'_{j+1}, \mathfrak{a}'_{j+2}, \dots, \mathfrak{a}'_{j_1}) + \mathfrak{d}_2,$$

и можно вместо x_i подставить эти значения, объединив полученные формулы дизъюнкцией, причем при этом преобразовании матрица формулы (2) не теряет нужного нам вида.

Для этого продемонстрируем, что для $i_2 \leqslant j$, любых $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{i_2}$ существуют $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_{j_1}$, такие что

$$t_{i_20}(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{i_2}) = t_{j_10}(x_k, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_{j_1}).$$

Итак, пусть $T_{j_1(j+1)} = t_{j_1(j+1)}(x_k, \mathfrak{a}'_{j+1}, \mathfrak{a}'_{j+2}, \dots, \mathfrak{a}'_{j_1})$, тогда получаем

$$T_{j_1(j+1)} = t_{j_1(j+1)}(x_k, \mathfrak{a}'_{j+1}, \mathfrak{a}'_{j+2}, \dots, \mathfrak{a}'_{j_1}) = \\ = f_{j+1}(f_{j+2}(\dots(f_{j_1-1}(f_{j_1}(x_k + \mathfrak{a}_{j_1}{}') + \mathfrak{a}_{j_1-1}{}') \dots) + \mathfrak{a}_{j+2}{}') + \mathfrak{a}_{j+1}{}') = \\ = f_{i_2+1}(f_{i_2+2}(\dots(f_{j_1-1}(f_{j_1}(x_k + \mathfrak{a}_{j_1}{}'') + \mathfrak{a}_{j_1-1}{}'') \dots) + \mathfrak{a}_{i_2+2}{}'') + \mathfrak{a}_{i_2+1}{}'').$$

Далее имеем

$$t_{i_20}(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{i_2}) = \\ = f_0(f_1(\dots(f_{i_2-1}(f_{i_2}(x_i + \mathfrak{a}_{i_2}) + \mathfrak{a}_{i_2-1}) \dots) + \mathfrak{a}_1) + \mathfrak{a}_0) = \\ = f_0(f_1(\dots(f_{i_2-1}(f_{i_2}(T_{j_1(j+1)} + \mathfrak{d} + \mathfrak{a}_{i_2}) + \mathfrak{a}_{i_2-1}) \dots) + \mathfrak{a}_1) + \mathfrak{a}_0) = \\ = t_{j_10}(x_k, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_{j_1}).$$

(4) $\sigma = S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j), \tau_k = S'_{j_1}(x_k, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}), j_1 < j$.

Если в каком-то $s_{t'}$ содержится член $t_{j_2 0}(x_k, \mathfrak{a}'''_0, \mathfrak{a}'''_1, \ldots, \mathfrak{a}'''_{j_2})$, $j_2 > j_1$ то получаем

$$t_{j_2 0}(x_k, \mathfrak{a}'''_0 - \mathfrak{d}_{S_{j_2}}, \mathfrak{a}'''_1, \ldots, \mathfrak{a}'''_{j_2}) < S''_{j_2}(x_k, \mathfrak{a}'''_0, \mathfrak{a}'''_1, \ldots, \mathfrak{a}'''_{j_2}) \leqslant \\ \leqslant S'_{j_1}(x_k, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1})$$

и, согласно сделанному в начале доказательства замечанию (2), x_k не превосходит некоторую константу. Если же ни в каком $s_{t'}$ не содержится член $t_{j_2 0}(x_k, \mathfrak{a}'''_0, \mathfrak{a}'''_1, \ldots, \mathfrak{a}'''_{j_2})$, получаем два случая:

(a) $t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) \geqslant t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1})$. Получаем

$$t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}) \leqslant t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < \\ < S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < \mathfrak{c} S'_{j_1}(x_k, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}) < \\ < \mathfrak{c} t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}).$$

(b) $t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1})$. Получаем

$$t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}) < \\ < S'_{j_1}(x_k, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}) \leqslant S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < \\ < t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j).$$

Оба случая рассматриваются аналогично, рассмотрим случай (a). Имеем

$$t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}) \leqslant t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < \\ < \mathfrak{c} t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}),$$

то есть

$$f_0^{-1}(t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1})) \leqslant f_0^{-1}(t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j)) < \\ < f_0^{-1}(\mathfrak{c} t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1})).$$

Далее, применяя лемму 5, получаем

$$t_{j_1 1}(x_k, \mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}) + \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_{j_1}} \leqslant t_{j1}(x_i, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j} < \\ < f_0^{-1}(t_{j_1 0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1})) + \mathfrak{d}.$$

Далее мы получаем

$$t_{j_1 1}(x_k, \mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}) \leqslant t_{j1}(x_i, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j} - \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S'_{j_1}}$$

и

$$t_{j1}(x_i, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_j) < t_{j_1 1}(x_k, \mathfrak{a}'_1, \mathfrak{a}'_2, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1})) + \mathfrak{d} + \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S'_{j_1}} - \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}.$$

Далее, последовательно применяя лемму 6, получаем

$$x_k \leqslant t_{j(j_1+1)}(x_i, \mathfrak{a}_{j_1+1}, \mathfrak{a}_{j_1+2}, \ldots, \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{d}_1$$

и

$$t_{j(j_1+1)}(x_i, \mathfrak{a}_{j_1+1}, \mathfrak{a}_{j_1+2}, \ldots, \mathfrak{a}_j) < x_k + \mathfrak{d}_2,$$

где $\mathfrak{d}_1$ и $\mathfrak{d}_2$ — некоторые константы.

Тогда получаем, что x_k может принимать конечное количество значений:

$$t_{j(j_1+1)}(x_i, \mathfrak{a}_{j_1+1}, \mathfrak{a}_{j_1+2}, \ldots, \mathfrak{a}_j) - \mathfrak{d}_2, \ldots, t_{j(j_1+1)}(x_i, \mathfrak{a}_{j_1+1}, \mathfrak{a}_{j_1+2}, \ldots, \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{d}_1,$$

и можно вместо x_i подставить эти значения, объединив полученные формулы дизъюнкцией, причем при этом преобразовании матрица формулы (2) не теряет нужного нам вида. Это показывается аналогично пункту (3).

(5) $\sigma = S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j), \tau_k = S'_j(x_k, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_j), j \neq 0$. Имеем

$$t_{j0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{d}_{S'_j}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_j) < S'_j(x_k, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_j) \leqslant$$
$$\leqslant S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j)$$

и

$$t_{j0}(x_i, \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{d}_{S_j}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) < S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_j) <$$
$$< \mathfrak{c}S'_j(x_k, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_j) < \mathfrak{c}t_{j0}(x_k, \mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{d}_{S'_j}, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_j).$$

Если $x_i + \mathfrak{a}_j > x_k + \mathfrak{a}_j{}'$, то, согласно лемме 8, x_k не превосходит некоторой константы, если $x_i + \mathfrak{a}_j < x_k + \mathfrak{a}_j{}'$, то, согласно лемме 8, x_i не превосходит некоторой константы, если же $x_i + \mathfrak{a}_j = x_k + \mathfrak{a}_j{}'$, то в качестве x_i возьмем $x_k + \mathfrak{a}_j{}' - \mathfrak{a}_j$.

(6) $\sigma = \mathfrak{a}S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{j_1}, \mathfrak{a}_{j_1+1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j-1}, \mathfrak{a}_j)$,
$\tau_k = \mathfrak{b}S'_j(x_i, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}, \mathfrak{a}_{j_1+1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j-1}, \mathfrak{a}_j)$, $j \neq 0, 0 < j_1 < j, \mathfrak{a}_{j_1} \neq \mathfrak{a}'_{j_1}$.
Пусть

$$u = f_{j_1+1}(f_{j_1+2}(\ldots(f_{j-1}(f_j(x_i + \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j-1})\ldots) + \mathfrak{a}_{j_1+2}) + \mathfrak{a}_{j_1+1}),$$

тогда получаем

$$S_j(x_i, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{j_1}, \mathfrak{a}_{j_1+1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j-1}, \mathfrak{a}_j) = S_{j_1}(u, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{j_1})$$

и

$$S'_j(x_i, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}, \mathfrak{a}_{j_1+1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j-1}, \mathfrak{a}_j) = S'_{j_1}(u, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{j_1}).$$

Далее, так как $\mathfrak{a}_{j_1} \neq \mathfrak{a}'_{j_1}$, аналогично предыдущему случаю, получаем, что u не превосходит некоторой константы, следовательно, x_i не превосходит некоторой константы.

Итак, мы убедились, что в первом случае количество элиминируемых кванторов можно уменьшить, добавляя новые кванторы существования перед отрицанием, а во втором — сократить их количество, используя вместо кванторов дизъюнкцию. □

Следствие 2. *Если f_0 — эффективно согласованная со сложением рекурсивная функция и все функции f_i эффективно периодичны по любому модулю, то экзистенциальная формула в предыдущей теореме строится эффективно.*

Следствие 3. *Если функция f_0 согласована со сложением и все функции f_i периодичны по модулю p для любого $p > 1$, то теория*

$$\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, f_1, \dots, f_n)$$

является модельно полной.

Разрешимость теории $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, f_1, \dots, f_n)$**.** Докажем, что при выполнении условия эффективной периодичности гиперфункций, теория $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, f_1, \dots, f_n)$ является разрешимой.

Теорема 2. *Пусть f_0 — согласованная со сложением функция и все функции f_i периодичны по модулю p для любого натурального p. Тогда если теорию $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, f_1, \dots, f_n)$ обогатить предикатами делимости и обратными функциями для f_0, f_1, f_2, $\dots$, f_n, то в ней любая формула эквивалентна бескванторной формуле.*

Доказательство. Мы в предыдущей теореме установили, что если f согласована со сложением и все f_i периодичны по модулю p для любого натурального p, то в теории $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, f_1, \dots, f_n)$ любая формула эквивалентна экзистенциальной формуле.

Нам осталось доказать, что формула $(\exists x_1, \dots, x_n)\phi$ эквивалентна бескванторной.

Будем доказывать это индукцией по количеству кванторов.

Это доказательство почти в точности повторяет доказательство предыдущей теоремы, с тем лишь отличием, что в случае 1 термы w_k и r_k содержат только константы и свободные переменные.

В качестве переменной u можно взять константу, используя обратные функции.

$$u = f_j^{-1}(f_{j-1}^{-1}(\dots(f_1^{-1}(f_0^{-1}(2r_p) - \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{d}_{S_j})\dots) - \mathfrak{a}_{j-2}) + \mathfrak{a}_{j-1}) - \mathfrak{a}_j. \qquad \square$$

Следствие 4. *Если рекурсивная функция f_0 эффективно согласована со сложением и все функции f_i эффективно периодичны по модулю p для любого $p > 1$, то теория $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, f_1, \dots, f_n)$ разрешима.*

5. Заключение

Мы показали, что при выполнении условия эффективной периодичности гиперфункций, теории, образованные из арифметики А.Л. Семенова добавлением таких функций, являются разрешимыми. Дальнейшие исследования в данной области могут в себя включать:

1. Поиск класса функций согласованных со сложением, для которых гиперфункции будут периодическими по любому модулю.

2. Исследования обогащения арифметики Пресбургера функциями Аккермана, при фиксировании второго аргумента.

Список литературы

1. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.

2. Верещагин Н.К., Шень А. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2002.

3. Семёнов А.Л. О некоторых расширениях арифметики сложения натуральных чисел // Изв. АН СССР. 1979. 43(5). С.1175–1195.

4. Семёнов А.Л. Логические теории одноместных функций на натуральном ряде // Изв. АН СССР. 1983. 47(3). С.623–658.

5. Снятков А.С. Разрешимость теории $T_c = \mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, c^x, \mathfrak{C}^x)$ // Вестник ТвГУ сер. Прикл. матем. 2007. 5(35). С. 113–121.

6. Снятков А.С. Разрешимость теории $T_f = \mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f(x), F(x))$ // Вестник ТвГУ сер. Прикл. матем. 2008. 14(34). С. 39–51.

7. Ackermann W. Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen // Mathematische Annalen. 1928. 99. P. 118–133.

On Decidability of the Theory $\mathrm{Th}(\omega, 0, 1, <, +, f_0, \ldots, f_n)$

Snyatkov A.S.

Keywords: Semenov arithmetic, hyperfunction, Ackermann function

In the paper we consider theories which are obtained from the Semenov arithmetics introducing functions $f_i, i > 0$. They are called "hyperfunctions" and they are obtained when we iterate an addition-connected function. We have proved, that such theories are model complete. It is also shown, that these theories are decidable when the condition of effective periodicity is satisfied for hyperfunctions.

Сведения об авторе:
Снятков Алексей Сергеевич,
Тверской государственный университет, аспирант