Модел. и анализ информ. систем. Т. **17**, № **3** (2010) 91–106

УДК 517.972.9

Гиперплоскости универсальной экстремали некоторых задач оптимизации

Федотова Н.П.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: fedotovanp@rambler.ru, natatulik@yandex.ru

получена 28 мая 2010

Ключевые слова: норма, евклидова норма, симметрическая норма, расстояние, гиперплоскость, класс многогранников, класс гиперплоскостей, пространство R^n, критерий оптимизации, оптимизационные задачи

Работа посвящена изучению класса гиперплоскостей конечномерного пространства, обладающего следующим свойством: для многогранника (из некоторой совокупности) в такой гиперплоскости существует точка многогранника, имеющая минимум нормы на многограннике для любой симметрической нормы пространства. Это свойство позволяет в ряде дискретных оптимизационных задач упростить выбор критерия оптимизации, взяв вместо него евклидову норму, которая в этом случае выступает в качестве универсального критерия оптимизации.

1. Введение. Основные определения

Напомним,что подмножество M пространства R^n называется линейным многообразием, если вместе с любыми двумя точками $X, Y \in M$ оно содержит прямую $(1-\lambda)X + \lambda Y$ и любое $(n-1)$-мерное линейное многообразие пространства R^n называется гиперплоскостью [5].
Напомним также, что нормой в R^n [3] называется функционал N, удовлетворяющий следующим условиям:
1. $N(x) \geq 0, \forall x \in R^n; N(x) = 0$ только при x=0;
2. $N(\alpha x) =\mid \alpha \mid N(x), \forall \alpha \in R, \forall x \in R^n$;
3. $N(x+y) \leq N(x) + N(y), \forall x, y \in R^n$.
Обычно в R^n используют шкалу норм $N_p(x) =\parallel x \parallel_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ при p от единицы до бесконечности. Норма $\parallel x \parallel_2$ называется евклидовой.

Симметрической нормой называется норма, обладающая следующим свойством: $\parallel (x_1, x_2, \ldots, x_n) \parallel = \parallel (x_{\xi_1}, x_{\xi_2}, \ldots, x_{\xi_n}) \parallel$ для любой перестановки ξ координат произвольного вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x \in R^n$.

Известно [7] следующее свойство гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ пространства R^n: для любого многогранника вида $a_i \leq x_i \leq b_i$ $(i \in \overline{1,n})$ в этой гиперплоскости существует точка этого многогранника, в которой достигается минимум любой симметрической нормы.

Данная теорема может быть использована при решении различных дискретных и оптимизационных задач. Она позволяет выбрать наиболее удобный критерий оптимизации – евклидову норму, что значительно упрощает вычисления в ряде случаев. Более того, можно выписать общий вид решения и свести задачу к перебору конечного числа критических точек. Примерами дискретных задач с соответствующими условиями могут быть: задача о целочисленном сбалансировании матрицы, задача о равномерном назначении работ, которые описаны в [4], [6].

В данной статье будем рассматривать гиперплоскости (и линейные многообразия), имеющие непустое пересечение с различными параллелепипедами

$$a_i \leq x_i \leq b_i \ (i \in \overline{1,n}),$$

и называть эти пересечения многогранниками вида D.

Будем говорить, что свойство U выполнено для гиперплоскости (или многогранника вида D), если точка этой гиперплоскости (или многогранника вида D), в которой достигается минимум евклидовой нормы, является точкой минимума любой другой симметрической нормы.

Очевидно, что если гиперплоскость содержит начало координат, то свойство U для нее выполнено, поэтому мы будем рассматривать только гиперплоскости и линейные многообразия, не содержащие начало координат.

Гиперплоскость пространства R^n будем называть униэкстремальной, если на любом многограннике вида D этой гиперплоскости выполнено свойство U.

Замечание 1.

Гиперплоскость (и многогранник вида D) в евклидовой норме имеет единственную точку экстремума. Поэтому определения свойства U и униэкстремальности корректны.

Замечание 2. В уравнении гиперплоскости все коэффициенты не могут быть равны нулю одновременно. В дальнейшем нам удобно будет считать, что наибольший по модулю коэффициент равен единице.

Замечание 3. Свойство униэкстремальности сильнее, чем свойство U.

Покажем сначала, что свойство униэкстремальности не слабее, чем свойство U. Предположим противное: существует униэкстремальная гиперплоскость P, не обладающая свойством U. Поскольку P не обладает свойством U, то найдутся такие норма N и точка F, что $N(F) < N(E)$, где E – точка минимума евклидовой нормы в гиперплоскости P. Тогда рассмотрим любой многогранник вида D гиперплоскости P, содержащий точки E и F. Поскольку $N(F) < N(E)$, E и F принадлежат многограннику, то гиперплоскость P не униэкстремальна, и получаем противоречие. В дальнейшем (следствие 4) будут приведены примеры гиперплоскостей, обладающих свойством U, но не являющихся униэкстремальными.

Определение свойства U и свойства униэкстремальности будет значительно короче, если ввести его через метрическую проекцию.
Напомним определение метрической проекции [1].

Рассмотрим задачу о наилучшем приближении элемента x из нормированного пространства X множеством приближающих элементов $K \subset X$:
$\rho(x, K) = inf\{\| x - y \|: y \in K\}$.

Элемент $y^* = y(x) \in K$, для которого $\| x - y^* \| = \rho(x, K)$ называется элементом наилучшего приближения.

Совокупность элементов наилучшего приближения для $x \in X$ будем обозначать через $P_K(x)$: $P_K(x) = \{y \in K : \| x - y \| = \rho(x, K)\}$, а отображение $P_K : X \to X$ или $x \mapsto P_K(x)$ называется метрической проекцией или оператором наилучшего приближения.

Совокупность элементов наилучшего приближения для $x \in X$ будем обозначать через $P_{K,N}(x)$, если расстояние ρ определено через норму N.

Приведем эквивалентное определение свойства U в терминах элементов наилучшего приближения и метрической проекции.

Гиперплоскость G обладает свойством U, если $P_{G,E}(0) \in P_{G,N}(0)$ для любой симметрической нормы N, где E – евклидова норма, 0 – нулевой элемент пространства R^n.

В данном случае метрическая проекция в некотором смысле не зависит от того, каким образом определено расстояние.

В данной работе описаны:

- класс гиперплоскостей пространства R^n, обладающих свойством U;
- класс униэкстремальных гиперплоскостей пространства R^n;
- возможность расширения класса гиперплоскостей, обладающих свойством U, и класса униэкстремальных гиперплоскостей, за счет наложения ограничений на симметрическую норму;
- применение свойств униэкстремальных гиперплоскостей к различным оптимизационным задачам и задачам дискретной математики.

2. Гиперплоскости, обладающие свойством U

Приведем три вспомогательных утверждения.

Утверждение 1. *Следующая квадратичная форма положительно определена в R^n:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j. \tag{1}$$

Доказательство утверждения 1. Квадратичную форму (1) при n>2 можно представить как линейную комбинацию $\alpha(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 + \beta \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (x_i + x_j)^2$, где $\alpha = \frac{(n-3)}{(2n-4)}$ и $\beta = \frac{1}{(2n-4)}$. Значит, она не может принимать отрицательные значения, а все комбинации во второй сумме не могут обращаться одновременно в 0 при n>2 и нетривиальном наборе x_i. Случай $n = 2$ рассмотрим отдельно: $x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{4}(x + y)^2 + \frac{1}{4}(x - y)^2$.

Следствие 1. Функционал $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j}$ является симметрической нормой в R^n.

Будем обозначать эту норму N^*. Она потребуется нам для построения контрпримеров, при нахождении гиперплоскостей, не обладающих свойством U.

Утверждение 2. *В евклидовой норме в пространстве* R^n *минимум расстояния от начала координат до гиперплоскости* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$ *достигается в точке* $E = (c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n)$, *где* $c = const / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$.

Утверждение 3. *На любом линейном многообразии вида*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = const, \quad k \in \overline{1,n}, \quad x_i = \alpha_i, \quad i \in \overline{k+1,n}, \quad \alpha_i \in R, \tag{2}$$

минимум расстояния до начала координат во всех симметрических нормах достигается в точке $O_k(const/k, const/k, \cdots, const/k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ при $k > 0$ и любых действительных α_i.

Доказательство утверждения 3.

1. Предположим противное. Тогда найдутся такие точка F и норма N, что $N(F) < N(O_k)$. Пусть $F = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_k^*, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n)$. Обозначим $F_1 = F$; $F_2 = (x_2^*, x_3^*, \cdots x_k^*, x_1^*, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n)$; $F_3 = (x_3^*, x_4^*, \cdots, x_k^*, x_1^*, x_2^*, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n)$; $\cdots F_k = (x_k^*, x_1^*, x_2^*, \cdots, x_{k-1}^*, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_k)$.
2. Из симметричности нормы имеем: $N(F_1) = N(F_2) = \cdots = N(F_k)$.
3. Из свойства 3 нормы (неравенство треугольника) имеем: $N(\sum_{i=1}^{k} F_i) \leq \sum_{i=1}^{k} N(F_i)$.
4. Тогда $k \cdot N(O_k) = N(\sum_{i=1}^{k} F_i) \leq \sum_{i=1}^{k} N(F_i) = k \cdot N(F)$, $N(O_k) \leq N(F)$ и получаем противоречие.

Замечание 4. Утверждение 3 справедливо, даже если в уравнение линейного многообразия входят не первые k координат, а любой другой набор из k координат, что вытекает из симметричности рассматриваемых норм.

Теорема 1. *Гиперплоскость пространства* R^n *обладает свойством* U *тогда и только тогда, когда она имеет вид (3) или (4):*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = const \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const, \quad \alpha_i \in \{-1, 0, 1\}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0. \tag{4}$$

Замечание: если гиперплоскость обладает свойством U и в ее уравнении есть коэффициенты разных знаков, то все эти коэффициенты равны по модулю единице (с учетом замечания 2) и количество коэффициентов, равных единице, равно количеству коэффициентов, равных минус единице.

Доказательство теоремы 1 вытекает из справедливости лемм 1–5.

Лемма 1. *Гиперплоскости вида* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const$, *где* $\alpha_i \in R, i \in \overline{1,n}, \exists i,j : |\alpha_i| > |\alpha_j| > 0$ *пространства* R^n *не обладают свойством* U.

Доказательство леммы 1.

1. Согласно утверждению 2 минимум евклидовой нормы достигается в точке $E = (c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n)$, где $c = const/\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$.

2. $\| E \|_1 = |const| \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$

3. В данной гиперплоскости рассмотрим точку $F = (0, \ldots, 0, const/\alpha_{max}, 0, \ldots, 0)$, где α_{max} – максимальный по модулю коэффициент.

4. Убедимся, что $\| E \|_1 > \| F \|_1$, т.е. $|const| \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > |const|/|\alpha_{max}|$. Во-первых, можно разделить обе части неравенства на |const|, так как случай const=0 уже известен [7]. Во-вторых, если $\exists i,j : |\alpha_i| > |\alpha_j| > 0$, то $|\alpha_{max}| \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 1$. Что и требовалось доказать.

Следствие 2. Коэффициентами гиперплоскостей, обладающих свойством U, могут быть только -1, 0, 1 с учетом замечания 2.

Лемма 2. *Гиперплоскости вида (3) пространства* R^n *обладают свойством* U.

Доказательство леммы 2.

Гиперплоскости вида (3) являются частным случаем гиперплоскостей вида (2) при $k = n$. Следовательно, в силу утверждения 3, минимум любой симметрической нормы для гиперплоскостей вида (3) достигается в точке $O_k(c/n, c/n, \cdots, c/n)$, а значит, гиперплоскости вида (3) обладают свойством U.

Лемма 3. *Гиперплоскости вида* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const$, *где* $\alpha_i \in \{0,1\}, \quad i \in \overline{1,n}, \quad \exists i : a_i = 0$ *пространства* R^n *не обладают свойством* U.

Доказательство леммы 3.

1. Без ограничения общности можно считать, что первые k коэффициентов равны единице, а остальные равны нулю, $k < n$.

2. Согласно утверждению 2 минимум евклидовой нормы достигается в точке $E = (c, c, \cdots, c, 0, \cdots, 0)$, где $c = const/k$.

3. В данной гиперплоскости рассмотрим точку $F = (c, c, \cdots, c, -\delta, 0, \cdots, 0)$, где δ мало и совпадает по знаку с константой c. Точка F получается из точки E заменой первой нулевой координаты на $-\delta$. Тогда при переходе от точки E к точке F евклидова норма вырастет, а норма N^* уменьшится, хотя новая точка лежит в той же плоскости. Покажем это.

4. $(N^*(E))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j = k \cdot c^2 + C_k^2 \cdot c^2$.

5. $(N^*(F))^2 = (N^*(E))^2 + \delta^2 - k\delta c = (N^*(E))^2 + \delta(\delta - kc)$.

6. Если δ мало ($|\delta| < |kc|$) и совпадает по знаку с (kc), то $N^*(F) < N^*(E)$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Гиперплоскости вида (4) пространства R^n обладают свойством U.*
Доказательство леммы 4. Доказательство проведем методом от противного.

1. Без ограничения общности можно считать, что первые k коэффициентов равны единице, следующие k коэффициентов равны минус единице, а остальные равны нулю.

2. Согласно утверждению 2 минимум евклидовой нормы достигается в точке $E = (c, c, \cdots, c, -c, -c, \cdots, -c, 0, \cdots, 0)$, где $c = const/(2k)$.

3. Предположим противное. Тогда найдутся такие точка F и норма N, что $N(F) < N(E)$. Пусть $F = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_k^*, x_{k+1}^*, x_{k+2}^*, \cdots, x_{2k}^*, x_{2k+1}^*, x_{2k+2}^*, \cdots, x_n^*)$.

4. Обозначим:
$F_1 = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_k^*, x_{k+1}^*, x_{k+2}^*, \cdots, x_{2k}^*, x_{2k+1}^*, x_{2k+2}^*, \cdots, x_n^*) = F$;
$F_2 = (x_2^*, \cdots, x_k^*, x_1^*, x_{k+2}^*, x_{k+3}^*, \cdots, x_{k+1}^*, x_{2k+1}^*, x_{2k+2}^*, \cdots, x_n^*)$;
$\cdots$
$F_k = (x_k^*, x_1^*, \cdots, x_{k-1}^*, x_{2k}^*, x_{k+1}^*, \cdots, x_{2k-1}^*, x_{2k+1}^*, x_{2k+2}^*, \cdots, x_n^*)$;
$F_{k+1} = (-x_{k+1}^*, -x_{k+2}^*, \cdots, -x_{2k}^*, -x_1^*, -x_2^*, \cdots, -x_k^*, -x_{2k+1}^*, -x_{2k+2}^*, \cdots, -x_n^*)$;
$F_{k+2} = (-x_{k+2}^*, -x_{k+3}^*, \cdots, -x_{k+1}^*, -x_2^*, \cdots, -x_k^*, -x_1^*, -x_{2k+1}^*, -x_{2k+2}^*, \cdots, -x_n^*)$;
$\cdots$
$F_{2k} = (-x_{2k}^*, -x_{k+1}^*, \cdots, -x_{2k-1}^*, -x_k^*, -x_1^*, \cdots, -x_{k-1}^*, -x_{2k+1}^*, -x_{2k+2}^*, \cdots, -x_n^*)$.

5. Заметим, что $2k \cdot N(E) = N(\sum_{i=1}^{2k} F_i)$, поскольку любая координата (сумма для каждого столбца) равна $\pm(x_1^* + x_2^* + \cdots + x_k^* - x_{k+1}^* - x_{k+2}^* - \cdots - x_{2k}^*)$, а это выражение равно $\pm const$ из уравнения плоскости.

6. Из симметричности и однородности нормы имеем:
$N(F_1) = N(F_2) = \cdots = N(F_{2k})$.

7. Из свойства 3 нормы (неравенство треугольника) имеем: $N(\sum_{i=1}^{2k} F_i) \le \sum_{i=1}^{2k} N(F_i)$.

8. Тогда $2k \cdot N(E) = N(\sum_{i=1}^{2k} F_i) \le \sum_{i=1}^{2k} N(F_i) = 2k \cdot N(F)$, т.е. $N(E) <= N(F)$ и получаем противоречие.

Лемма 5. *Гиперплоскости вида* $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = const, \quad \alpha_i \in \{-1, 0, 1\}, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ *пространства R^n не обладают свойством U.*
Доказательство леммы 5.

1. Без ограничения общности можно считать, что первые k коэффициентов в уравнении гиперплоскости равны единице, следующие l равны минус единице, а остальные равны нулю, $k > l > 0$.

2. Согласно утверждению 2 минимум евклидовой нормы достигается в точке $E = (c, c, \ldots, c, -c, -c, \ldots, -c, 0, \ldots, 0)$, где $c = const/(k + l)$, первые k координат равны c, следующие l равны $-c$.

3. Рассмотрим точку $F = (c - \delta, c, \ldots, c, -c - \delta, -c, \ldots, -c, 0, \ldots, 0)$, где δ мало и положительно. Точка F получается из точки E уменьшением первой и $(k + 1)$-й координат на δ. Тогда евклидова норма вырастет, а норма N^* уменьшится, хотя новая точка лежит в той же плоскости. Покажем это.

4. $(N^*(E))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j = (k + l) \cdot c^2 + C_k^2 \cdot c^2 + C_l^2 \cdot c^2 - klc^2$

5. $(N^*(F))^2 = (N^*(E))^2 + 3\delta^2 + 2\delta c(l - k) = (N^*(E))^2 + 3\delta(\delta + 2c(l - k)/3)$

6. Если δ мало ($|\delta| < |2c(l - k)/3|$) и противоположно по знаку выражению $(2c(l - k)/3)$, то $N^*(F) < N^*(E)$, что и требовалось доказать.

3. Униэкстремальные гиперплоскости

Теорема 2. *Униэкстремальными являются все гиперплоскости* $(k = n)$ *и линейные многообразия* $(k < n)$ *вида (2):*
$\sum_{i=1}^{k} x_i = const, \quad k \in \overline{1, n}, \quad x_i = \alpha_i, \quad i \in \overline{k + 1, n}, \quad \alpha_i \in R.$
С точностью до перестановки координат.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются утверждения 3 и 4.

Утверждение 4.

Пусть в точке O некоторого линейного многообразия вида (2) достигается минимум расстояний от точек данного многообразия до начала координат в симметрической норме N. Если взять любой луч из точки O с направляющим вектором $\overrightarrow{u}$ из этого многообразия, то функция $f(t) = N(\overrightarrow{O} + t\overrightarrow{u})$ нестрого монотонно возрастает при $t > 0$.
Доказательство вытекает из неравенства треугольника и однородности нормы.

Следствие 3. Для любого многогранника вида D линейного многообразия вида (2) независимо от значений $c = const, k, \alpha_i$ минимум любой симметрической нормы достигается в точке $O_k(c/k, c/k, \cdots, c/k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ (O_k из утверждения 3), если она принадлежит данному многограннику, или в какой-то точке на границе этого многогранника.

Доказательство теоремы 2 проведем методом математической индукции по размерности линейного многообразия (2).

База индукции

1. Заметим, что при $k = 1$ мы получим пустой многогранник или многогранник, состоящий из одной точки, для которого утверждение тривиально.

2. В случае $k = 2$ получается отрезок, для которого утверждение теоремы следует либо из утверждения 3, если точка O_2 лежит внутри отрезка, либо из утверждения 4, когда минимум будет достигаться в одном из концов отрезка.

3. Рассмотрим отдельно еще и случай $k = 3$, поскольку именно на нем будет базироваться индукционный переход нашей теоремы.

4. В случае $k = 3$ многогранник представляет собой такой многоугольник на плоскости:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c \\ a_i \le x_i \le b_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ x_i = \alpha_i, \quad i = 4, 5, \cdots, n. \end{cases}$$
Нетрудно установить вид этого многоугольника, но в доказательстве мы будем использовать лишь его выпуклость. Это существенно, поскольку в индукционном переходе может получиться выпуклый многоугольник другого вида.

5. Если точка O_3 лежит внутри него, то утверждение теоремы следует из утверждения 3. Рассмотрим случай, когда точка O_3 лежит вне многоугольника. Заметим, что точки E, в которой достигается минимум евклидовой нормы, и F, в которой достигается минимум некоторой симметрической нормы N, не могут лежать внутри многоугольника по утверждению 4.

6. Следовательно, точки E и F лежат на границе многоугольника. Поскольку случай $k = 2$ уже разобран, мы знаем, что на каждой из сторон минимумы всех симметрических норм достигаются в одной и той же точке. Следовательно, если E и F лежат на одном ребре многоугольника, то все доказано.

7. Предположим, что точки E и F лежат на разных сторонах многоугольника и $N(F) < N(E)$. Тогда возможны два варианта: точка E внутри стороны многогранника и E в вершине. Для наглядности в обоих вариантах приведем соответствующие чертежи (рис. 1).

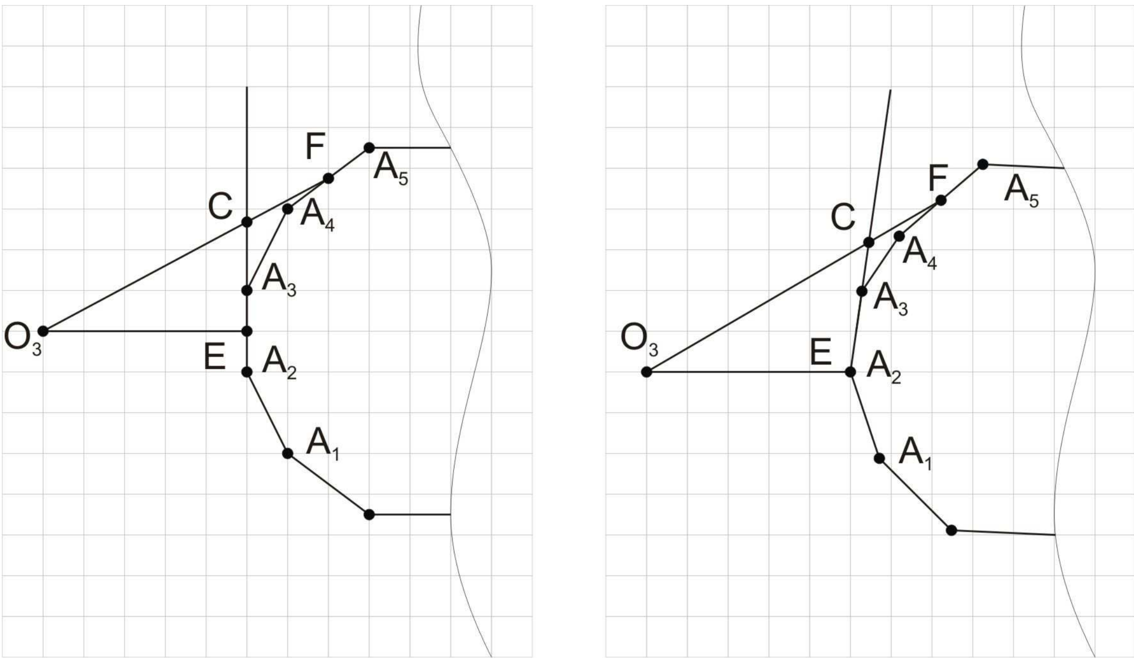

Рис. 1. E внутри стороны (слева) и E в вершине (справа)

8. Первый случай – E внутри стороны: точка C получается как пересечение стороны A_2A_3 и прямой O_3F. При этом точка C лежит между O_3 и F, так как прямая O_3E перпендикулярна стороне многоугольника, точка O_3 лежит вне его, а многоугольник выпуклый. По утверждению 3 минимум нормы N на стороне A_2A_3 достигается в точке E. По утверждению 4 норма N растет при движении от точки E до точки C и от точки C до точки F. Следовательно, $N(F) \geq N(E)$, получаем противоречие с пунктом 7.

9. Второй случай – E в вершине многоугольника, ближайшей к точке O_3. Прямая O_3F пересекает одну из сторон с вершиной E или ее продолжение в точке C. Снова точка C лежит между O_3 и F, так как многоугольник выпуклый, а точка O_3 вне его. Аналогично, $N(F) \geq N(C) \geq N(E)$ и получаем противоречие с пунктом 7.

Переход индукции.

Если для многогранника вида D линейного многообразия вида (2) размерности k

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k+1} x_i = c \\ a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i \in \overline{1, k+1} \\ x_i = a_i, \quad i =\in \overline{k+2, n} \end{cases}$$

положить $x_i = \alpha_i$ или $x_i = \beta_i$ для некоторых $i \in \overline{1, k+1}$, то мы получим многогранник вида D линейного многообразия вида (2) меньшей размерности. Поэтому все такие многогранники мы будем называть гранями G_k многогранника вида D линейного многообразия вида (2). Пусть доказано, что на любых $(k-1)$-мерных гранях G_{k-1} минимумы во всех симметричных нормах достигаются в одной и той же точке. Рассмотрим теперь грань G_k размерности k $(k < n)$. Если точка O_{k+1} принадлежит грани G_k, то утверждение теоремы следует из утверждения 3.

Предположим, что точка O_{k+1} лежит вне грани G_k, минимум евклидовой нормы находится в точке E, минимум некоторой симметрической нормы находится в точке F. Если точки E и F различны, то по предположению индукции они лежат на разных $(k-1)$-мерных гранях. Построим двумерную плоскость, содержащую точки O_{k+1}, E и F.

В сечении грани G_k этой плоскостью получится многоугольник, ребра которого идут по граням G_{k-1}. Действительно, из соображений размерности, пересечение двумерной плоскости и $(k-1)$-мерной грани в k-мерном линейном многообразии будет иметь размерность 1, поскольку плоскость не может принадлежать ни одной из граней G_{k-1}, так как точка O_{k+1} лежит вне многогранника и точки E и F лежат на разных $(k-1)$-мерных гранях.

Далее можно повторить построение и рассуждение из двумерного случая и получить противоречие. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Для многогранников вида D гиперплоскостей вида (3) общий вид единой точки экстремума всех симметрических норм таков: каждая координата может быть первого или второго рода. Для координат первого рода $x_i = a_i$ или $x_i = b_i$. Для координат второго рода $x_i = (c-s)\ /\ (n-k)$, где c – константа из уравнения гиперплоскости, k – количество координат первого рода, $k \in \overline{0, n}$, s – сумма координат первого рода.*

Иными словами, k – количество координат, принимающих граничные значения, а остальные координаты равны между собой.

Доказательство теоремы 3.

Согласно теореме 2 точка минимума евклидовой нормы E для многогранника вида D гиперплоскости вида (3) существует и в ней достигается минимум всех остальных симметрических норм. Точка E может лежать:
1) внутри многогранника;
2) внутри грани G_k многогранника;
3) в вершине многогранника.
В первом случае точка E совпадает с минимумом евклидовой нормы на всей гиперплоскости и согласно утверждению 2 имеет вид: $E = (c/n, c/n, \ldots, c/n)$, где c – константа из уравнения гиперплоскости, n – размерность пространства. Все координаты точки E являются координатами второго рода при $k = 0,\ s = 0$.

Во втором случае точка E совпадает с минимумом евклидовой нормы на линейном многообразии вида (2), содержащем грань G_k.

Тогда точка E имеет вид $(c/k, \ldots, c/k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ с точностью до перестановки координат, согласно утверждению 3. Поскольку точка E лежит на грани G_k, то все α_i равны соответствующим a_i или b_i.

В третьем случае каждая координата точки E равна a_i или b_i, поскольку многогранник имеет вид D: $a_i \leq x_i \leq b_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Во всех трех случаях точка E имеет вид, описанный в теореме 3, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Никакие другие гиперплоскости пространства R^n, кроме указанных в теореме 2, не являются униэкстремальными.*

Доказательство теоремы 4.

1. Из теоремы 1 и замечания 3 следует, что для доказательства теоремы 4 необходимо только установить, что гиперплоскости вида (4) не являются униэкстремальными. Для этого построим контрпримеры.

2. Поскольку рассматриваемые нормы симметричны, для удобства можно рассматривать гиперплоскости не вида (4), а вида $\sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=k+1}^{2*k} x_i = const$.

3. При $const = 0$ рассмотрим многогранник
   $\begin{cases} -10 \leq x_i \leq 10, i \in \overline{1, 2k-1} \\ 1 \leq x_{2k} \leq 2 \end{cases}$
   Поскольку рассматриваемая гиперплоскость содержит начало координат, то минимумы всех норм достигаются именно в нулевой точке. Далее, воспользуемся утверждением 2 и следствием 3. В рассматриваемом случае любой луч из начала координат, который пересекает наш многогранник, сначала пересечется с его гранью x_{2k}=1, поскольку на таких лучах x_{2k} монотонно возрастает от 0. Значит, точка минимума для любой симметрической нормы лежит на грани x_{2k}=1 нашего многогранника.
   Но на гиперплоскости $\sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=k+1}^{2*k-1} x_i = 1$, x_{2k}=1 (грани $x_{2k} = 1$ исходной гиперплоскости) точка минимума для евклидовой нормы

$E = (\frac{1}{2k-1}, \dots, \frac{1}{2k-1}, -\frac{1}{2k-1}, \dots, -\frac{1}{2k-1}, 1, 0, \dots, 0)$, которая принадлежит нашему многограннику, не является точкой минимума для симметрической нормы N^* и контрпример при $const = 0$ построен.

4. В случае $const > 0$ (случай $const < 0$ полностью аналогичен) минимум всех симметрических норм достигается в точке
$E = (\frac{const}{2k}, \dots, \frac{const}{2k}, -\frac{const}{2k}, \dots, -\frac{const}{2k}, 0, \dots, 0)$. Далее, рассмотрим многогранник
$\begin{cases} -const \le x_i \le const, i \in \overline{1, 2k-1} \\ 0 \le x_{2k} \le 1. \end{cases}$
Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим, что точка минимума для любой симметрической нормы расположена на грани x_{2k}=0.

   Данная грань снова содержит точку минимума евклидовой нормы
$E = (\frac{const}{2k-1}, \dots, \frac{const}{2k-1}, -\frac{const}{2k-1}, \dots, -\frac{const}{2k-1}, 0, \dots, 0)$ для гиперплоскости x_{2k}=0, $\sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=k+1}^{2*k-1} x_i = const$, которая не является точкой минимума для нормы N^*.

Теорема 5.
Любая униэкстремальная гиперплоскость в пространстве R^n имеет вид (3), и каждая гиперплоскость пространства R^n, имеющая вид (3), униэкстремальна.
Доказательство теоремы 5.

1. Докажем первую часть теоремы, где утверждается, что любая униэкстремальная гиперплоскость размерности $(n-1)$ в пространстве R^n имеет вид (3). Воспользуемся теоремой 4 и учтем, что размерность гиперплоскости на единицу меньше размерности пространства, следовательно, на координаты может быть только одно ограничение, поэтому гиперплоскость имеет вид (3), что и требовалось доказать.

2. Докажем вторую часть теоремы, где утверждается, что каждая $(n-1)$ - мерная гиперплоскость n-мерного пространства, имеющая вид (3), униэкстремальна. Для этого достаточно воспользоваться теоремой 2, положив $k = n$.

Следствие 4. Гиперплоскости вида (4) обладают свойством U, но не являются униэкстремальными.

4. Специальная симметрическая норма

Следуя [2] (с. 96), специальной симметрической нормой N^s назовем норму, обладающую свойством: $\| (| x_1 |, | x_2 |, \dots, | x_n |) \| = \| (x_{\xi_1}, x_{\xi_2}, \dots, x_{\xi_n}) \|$ для любой перестановки ξ .

Ограничение на норму не сильно сужает класс исследуемых задач. Например, все нормы $\| \, \|_p$ являются специальными симметрическими нормами.

Будем говорить, что свойство U^s выполнено для гиперплоскости (или многогранника вида D), если точка этой гиперплоскости (или многогранника вида D), в которой достигается минимум евклидовой нормы, является точкой минимума любой другой специальной симметрической нормы.

Гиперплоскость пространства R^n будем называть униэкстремальной в смысле специальной симметрической нормы, если на любом многограннике вида D этой гиперплоскости выполнено свойство U^s.

Замечание 5.

Поскольку класс специальных симметрических норм уже класса симметрических норм, то свойство U сильнее свойства U^s и свойство униэкстремальности в обычном смысле сильнее свойства униэкстремальности в смысле специальной симметрической нормы. Заметим также, что свойство униэкстремальности в смысле специальной симметрической нормы сильнее свойства U^s (аналогично замечанию 3).

Теорема 6. *Гиперплоскость пространства R^n со специальной симметрической нормой обладает свойством U^s тогда и только тогда, когда она имеет вид:*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const, \quad \alpha_i \in \{-1, 0, 1\}, \quad i \in \overline{1, n}. \tag{5}$$

Доказательство теоремы 6 вытекает из справедливости лемм 6–7.

Лемма 6. *Гиперплоскости вида (5) пространства R^n обладают свойством U^s.*

Доказательство леммы 6.

1. Гиперплоскости вида $\sum_{i=1}^{n} x_i = const,\ i \in \overline{1, n}$ обладают свойством U (лемма 2), значит, они тем более обладают и свойством U^s, поскольку специальные симметрические нормы – это подмножество всех симметрических норм.

2. Докажем, что свойством U^s обладают гиперплоскости вида:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const, \quad \alpha_i \in \{0, 1\}, \quad i \in \overline{1, n}. \tag{6}$$

   $N^s(0, x) \le N^s(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}x) + N^s(-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}N^s(a, x) + \frac{1}{2}N^s(-a, x) = \frac{1}{2}N^s(a, x) + \frac{1}{2}N^s(a, x) = N^s(a, x)$. Тогда мы можем перейти в пространство меньшей размерности, где применим пункт 1.

3. Докажем, что свойством U^s обладают гиперплоскости вида (5). Уравнение вида (5) можно преобразовать к уравнению вида (6) заменой соответствующих координат x_i на $-x_i$. Такая замена допустима, поскольку из определения N^s следует $N^s(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = N^s(x_1, x_2, \dots, -x_i, \dots, x_n)$.

Лемма 7. *Гиперплоскости вида $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const,\ \alpha_i \in R,\ \ i \in \overline{1, n},\ \ \exists i, j : |\alpha_i| > |\alpha_j| > 0$ пространства R^n не обладают свойством U^s.*

Доказательство леммы 7 совпадает с доказательством леммы 1, поскольку в нем была использована специальная симметрическая норма N_1.

Утверждение 5.

Зафиксируем произвольные $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ и произвольную специальную симметрическую норму N^s. Определим функцию $f(t) = N^s((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t))$. Тогда *минимум функции $f(t)$ достигается при $t = 0$ и функция $f(t)$ нестрого монотонно возрастает при $t > 0$.*

Доказательство первой части утверждения: $N^s(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \leq \frac{1}{2}(N^s(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t) + N^s(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -t)) = N^s(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$.

Доказательство второй части данного утверждения вытекает из неравенства треугольника и однородности нормы.

Следствие 5. Минимум функции $f(t)$ из утверждения 5 на отрезке $[a_n, b_n]$ достигается при t, равном минимальному по модулю числу из отрезка $[a_n, b_n]$.

Теорема 7. *Гиперплоскость пространства R^n со специальной симметрической нормой является униэкстремальной тогда и только тогда, когда она имеет вид (5): $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const, \quad \alpha_i \in \{-1, 0, 1\}, \quad i \in \overline{1, n}$.*

Доказательство теоремы 7.

1. В силу теоремы 6 и замечания 5, униэкстремальные гиперплоскости в смысле специальной симметрической нормы следует искать среди плоскостей вида (5).

2. Докажем, что гиперплоскости вида (6) являются униэкстремальными в смысле специальной симметрической нормы. Напомним, что многогранник имеет вид $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i \in \overline{1, n}$, а в уравнении гиперплоскости (6) некоторые коэффициенты равны нулю, следовательно, мы имеем ограничения на свободные переменные и выполнены условия утверждения 5. Тогда по следствию 5 свободные переменные будут равны соответствующей константе, и наше уравнение гиперплоскости примет вид (2). Линейное многообразие вида (2) униэкстремально в общем смысле, а значит, и в смысле специальных симметрических норм, что и требовалось доказать.

3. Для завершения доказательства теоремы 7 осталось заметить, что уравнение вида (2) можно преобразовать к уравнению вида (6) заменой соответствующих координат x_i на $-x_i$. Такая замена допустима, поскольку из определения N^s следует $N^s(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = N^s(x_1, x_2, \dots, -x_i, \dots, x_n)$.

5. Приложения

1. При постановке оптимизационной задачи нередко возникает проблема выбора критерия, если условия задачи не позволяют однозначно выбрать тот или иной критерий. Как правило, оптимальность решения зависит от критерия, и это заставляет искать дополнительные доводы в пользу того или иного выбора. Если же удается установить, что класс оптимизационных задач обладает самым мощным критерием (в том смысле, что из него следует оптимальность по другим), то проблема выбора критерия снимается.

2. Возможно также, что решение задачи минимизации функции по некоторому критерию при определенных ограничениях затруднительно, неудобно или трудоемко. Следовательно, если ограничения задачи имеют описанный выше вид и данный критерий удовлетворяет условиям симметрической нормы, можно

заменить его другим, более простым критерием, для которого задача решается проще.

3. Важно, что самым мощным критерием оказывается именно евклидова норма, поскольку в этом случае задача нахождения расстояния до объекта хорошо исследована. В случае нахождения расстояния до гиперплоскости достаточно знать уравнение нормали гиперплоскости, и задача становится тривиальной.

4. Специальные симметрические нормы позволяют расширить класс униэкстремальных гиперплоскостей. В то же время наложение на симметрическую норму специального ограничения не сильно сужает класс исследуемых задач. Например, все нормы $\| \|_p$ (p от 1 до бесконечности) являются специальными симметрическими нормами.

5. Общий вид точки минимума.

   (a) В процессе доказательства удалось установить общий вид точки минимума, что позволяет, в случае необходимости, решить задачу методом перебора, поскольку изначальное множество возможных ответов (точек многогранника) имеет меру континуум, а в результате применения теоремы 3 получается конечное число возможных ответов. Однако мощность этого множества растет экспоненциально с ростом размерности.

   (b) Согласно теореме 3 общий вид возможной точки экстремума таков: каждая координата может быть первого или второго вида. В первом случае $x_i = a_i$ или $x_i = b_i$. Во втором случае $x_i = (c-s)/(n-k)$, где c – константа из уравнения гиперплоскости, k – количество координат первого вида, s – сумма координат первого рода, $(n-1)$ – размерность гиперплоскости. Иными словами, k – количество координат, принимающих граничные значения, а остальные координаты равны между собой.

   (c) Выпишем всевозможные точки экстремума для $n = 2$. Задача: $\sum_{i=1}^{2} x_i = c$, $a_i \le x_i \le b_i (i = 1, 2)$. Требуется найти точку, в которой достигается минимум всех симметрических норм. Возможные решения (всего 5): $(c/2, c/2), (a_1, c - a_1), (c - a_2, a_2), (b_1, c - b_1), (c - b_2, b_2)$.

   (d) Выпишем всевозможные точки экстремума для $n = 3$. Задача: $\sum_{i=1}^{3} x_i = c$, $a_i \le x_i \le b_i (i = 1, 2, 3)$. Требуется найти точку, в которой достигается минимум всех симметрических норм. Возможные решения (всего 19): $(a_1, (c-a_1)/2, (c-a_1)/2), ((c-a_2)/2, a_2, (c-a_2)/2), ((c-a_3)/2, (c-a_3)/2, a_3)$, $(b_1, (c-b_1)/2, (c-b_1)/2), ((c-b_2)/2, b_2, (c-b_2)/2), ((c-b_3)/2, (c-b_3)/2, b_3)$, $(a_1, a_2, c-a_1-a_2), (a_1, b_2, c-a_1-b_2), (b_1, a_2, c-b_1-a_2), (b_1, b_2, c-b_1-b_2)$, $(a_1, c-a_1-a_3, a_3), (a_1, c-a_1-b_3, b_3), (b_1, c-b_1-a_3, a_3), (b_1, c-b_1-b_3, b_3)$, $(c-a_2-a_3, a_2, a_3), (c-a_2-b_3, a_2, b_3), (c-b_2-a_3, b_2, a_3), (c-b_2-b_3, b_2, b_3)$, $(c/3, c/3, c/3)$.

   (e) Если известно, что $0 \le a_i \le b_i$ (для $i = 1, 2, \ldots, n$), то количество вариантов существенно сокращается.

   Для $n = 2$ получаем 3 варианта: $(c/2, c/2), (a_1, c - a_1), (c - a_2, a_2)$.

Для $n = 3$ остается 7 вариантов из 19: $(c/3, c/3, c/3)$,
$(a_1, (c-a_1)/2, (c-a_1)/2), ((c-a_2)/2, a_2, (c-a_2)/2), ((c-a_3)/2, (c-a_3)/2, a_3)$,
$(a_1, a_2, c - a_1 - a_2), (a_1, c - a_1 - a_3, a_3), (c - a_2 - a_3, a_2, a_3)$.

6. Известны [4], [6] приложения теории униэкстремальных гиперплоскостей к некоторым задачам дискретной математики. Например, в работе [4] исследованы лишь некоторые критерии оптимизации, а в работе [6] показано, что для задачи о равномерном назначении работ евклидова норма оказывается самым мощным критерием оптимизации.

Автор выражает благодарность Вадиму Сергеевичу Рублеву за постоянное внимание к работе и содержательные обсуждения.

Список литературы

1. Бердышев В.И., Петрак Л.В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 1999.

2. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом простраснстве. М.: Наука, 1965.

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

4. Коршунова Н.М., Рублев В.С. Задача целочисленного сбалансирования матрицы // Современные проблемы математики и информатики. Ярославль, 2000. Вып. 3. С. 145 – 150.

5. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

6. Рублев В.С., Чаплыгина Н.Б. Выбор критерия оптимизации в задаче о равномерном назначении // Дискретная математика. 2005. Т. 17, вып. 4. С. 150-157.

7. Рублев В.С., Чаплыгина Н.Б. О некоторой характерной точке одного класса многогранников в симметрических пространствах // ДАН. 2006. Т. 407, № 2. С. 176-178.

Universal extremum of hyperplanes in some optimization problems

Fedotova N.P.

Keywords: Norm, Euclidean norm, symmetrical norm, distance, hyperplane, class of hyperplanes, class of polyhedrons, R^n space, optimization functions, optimization problems

This paper is concerned with the minimum distance between a point and a polyhedrons of some class in the R^n vector space supplied with different symmetrical norms. We find all hyperplanes where for all polyhedrons the point of Euclidean norm minimum is also one of the nearest points in any symmetrical norm. It simplifies the choice of criterion in some optimization problems.

Сведения об авторе:
Федотова Наталья Петровна,
Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова, аспирант