

УДК 519.86

Математические модели экономических систем с учетом необратимости протекающих в них процессов

Цирлин А.М.¹

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

e-mail: tsirlin@sarc.botik.ru

получена 19 августа 2010

Ключевые слова: макросистемы, необратимость, термодинамика, экономика

1. Введение

Общие особенности макросистем.

Системы, состоящие из большого числа элементов, поведение каждого из которых не управляемо, называют макросистемами. Классическими и наиболее изученными системами такого рода являются термодинамические, элементами которых являются молекулы веществ, составляющих систему. Несмотря на невозможность управлять и контролировать состояние каждой молекулы на микроуровне, термодинамические системы (тепловые и холодильные машины, системы разделения газов и жидкостей, процессы, протекающие в химических реакторах и др.) управляемы на макроуровне и подчиняются вполне определенным закономерностям. Эти закономерности (модели поведения систем) могут быть получены на базе математического описания поведения отдельных элементов с последующим усреднением или на базе непосредственного изучения поведения макросистемы с использованием эксперимента. Первый подход характерен для статистической физики, второй – для феноменологической термодинамики.

Необратимость процессов в макросистемах является следствием стохастического поведения элементов системы на микроуровне. Введение количественной меры необратимости и связи ее с другими свойствами систем является центральным моментом их исследования. Подобный подход получил название термодинамического.

Контакт двух экономических агентов (ЭА).

Рассмотрим систему двух рынков, первоначально изолированных друг от друга. Цены ресурсов на этих рынках различны. При наличии контакта между ними происходит обмен ресурсами, причем эти ресурсы перемещаются на тот рынок, для

¹Работа поддержана РФФИ, грант 10-06-00161.

которого первоначальная цена их оказалась выше. Каждый поток ресурса сопряжен со встречным потоком капитала. В результате обмена установятся одинаковые цены на все ресурсы. Законы сохранения в такой системе справедливы для общего количества каждого из ресурсов и для капитала, но они отнюдь не определяют направление их перемещения.

Если требуется вернуть систему в исходное состояние по запасам ресурсов, то потребуется разделить рынки, закупить ресурсы на том из них, где цены были выше, и продать тому, у которого они были ниже. Такую операцию может проделать экономический посредник, однако при этом он понесет убытки. Общее количество капитала в системе возрастет на величину убытков посредника. Таким образом, процесс прямого ресурсообмена между ЭА необратим. Минимальная величина добавочного капитала, внесенного в систему посредником, может служить мерой необратимости прямого ресурсообмена.

Подобно термодинамическим системам, процесс ресурсообмена может быть сделан обратимым, если обмен производится не при прямом контакте подсистем, а через посредника, который покупает ресурсы на „дешевом“, а продает их на „дорогом“ рынке, извлекая прибыль. В системе установятся общие, одинаковые для обоих рынков, цены на ресурсы. Ниже показано, что эти цены будут выше, чем при прямом ресурсообмене. Посредник может вернуть систему в исходное состояние, затратив прибыль, извлеченную им в прямом процессе.

Подчеркнем особенности, характерные для всех макросистем:

- из неравновесной системы может быть извлечен некоторый базисный ресурс (работа, капитал...);
- для такого извлечения необходим посредник;
- процесс выравнивания параметров системы с посредником и без него приводит к разному состоянию равновесия;
- при этом в идеальном случае система с посредником может быть возвращена в исходное состояние, а для системы без посредника (с прямым контактом подсистем) этого сделать нельзя без изменения в окружающей среде;
- эти изменения могут служить количественной характеристикой необратимости процесса, протекающего при прямом контакте экономических подсистем.

Применительно к экономическим системам подход оптимизационной термодинамики позволяет сформулировать и решить такие задачи, как:

1. Как менять цены закупок/продаж ресурса у ЭА, чтобы за заданное время закупить заданный объем ресурса с минимумом затрат капитала?
2. Какова максимальная интенсивность прибыли посредника в системе ЭА, находящихся в контакте друг с другом и с экономическими резервуарами (рынками с постоянными ценами)?
3. Каковы минимальные затраты капитала на поддержание заданного неравновесного стационарного состояния системы ЭА?
4. Какую максимальную прибыль может извлечь посредник, осуществляя процессы закупок и продаж в неоднородной изолированной системе ЭА с заданными начальными состояниями за заданное время?

Для решения этих и подобных им задач необходимо распространить на экономические системы термодинамические методы анализа, ввести количественные

характеристики необратимости, выявить принципиальные различия между системами физической и экономической природы.

Макросистемный подход к процессам нефизической природы, изучению их равновесия, взаимодействия с окружением с позиций равновесной термодинамики связан с именами Дж. Фон-Неймана, П.А. Самуэльсона, М. Лихнеровича, Ф.Дж. Вильсона и др. Хотелось бы отметить К. Мартинаш, неустанно подчеркивающую в своих работах важность учета фактора необратимости экономических процессов. Особенно велика в развитии оптимизационной термодинамики и макросистемного подхода к экономике роль Л.И. Розоноэра, который со свойственной ему ясностью сформулировал проблему исследования предельных возможностей макросистем как задачу оптимального управления и получил в этом направлении важные результаты.

2. Термодинамическое описание экономических систем

Перечислим наблюдаемые факты, которые должны найти отражение в математических моделях экономических систем:

1. В результате взаимодействия друг с другом ЭА обмениваются ресурсами, потребляют и производят их, при этом каждый из ЭА стремится максимизировать свою осознанную или неосознанную «полезность», выбирая, какой ресурс, в каком количестве и на что обменивать. Ресурс переходит в процессе обмена к тому ЭА, для которого он полезнее, а значит, ЭА готов за этот ресурс заплатить большую цену. Таким образом ресурсы перетекают самопроизвольно в процессе стихийных обменов индивидуальных ячеек или через посредника от рынка с меньшей к рынку с большей ценой.

2. Потоки обмена между несколькими ЭА, изолированными от окружения, при отсутствии производства и потребления стремятся со временем к нулю, а цены, которые каждый из них готов заплатить за тот или иной ресурс, выравниваются.

3. Обмен ресурсами с ЭА, при котором он покупает и продает ресурсы так, чтобы в результате запасы ресурса у ЭА в начале и в конце цикла обмена оказались одинаковыми, не может увеличить «полезность» ни ЭА, ни его окружения, если свойства окружения стационарны.

4. При увеличении закупочной цены увеличивается поток продаж от ЭА к покупателю, а при цене ниже некоторого значения, различного для разных ЭА, этот поток становится равным нулю.

Перечисленные свойства во многом аналогичны свойствам термодинамических систем, так как и термодинамические и микроэкономические системы являются макросистемами. Но есть и существенная разница. Если термодинамическая система физической природы передает теплоту любой другой, находящейся с ней в контакте и имеющей более низкую температуру, то ЭА «просто так» полезный для себя ресурс не отдает. Он делает это только в обмен на другой ресурс (бартер) или на базисный ресурс (продажа). Это и другие отличия должны быть учтены при составлении математической модели.

Экономические системы могут быть *изолированными* от окружения, в этом случае обмен происходит лишь внутри системы, или *открытыми* по всем или части ресурсов. Как в любой макросистеме, процессы стохастического взаимодействия в экономике необратимы. В экономике может быть введен некоторый показатель необратимости, принимающий подобно энтропии максимальное значение в равновесии для изолированной системы, а также неотрицательная функция, аналогичная производству энтропии, и записаны экономические балансы, включающие эту функцию.

1. Модели экономических агентов, необратимость

Состояние ЭА характеризуется вектором N запасов ресурсов и количеством базисного ресурса M . В некоторых случаях, нужно учесть и число индивидуальных ячеек I , содержащихся в ЭА, если ЭА могут обмениваться и этими ячейками. Ниже эти случаи будут отдельно оговорены.

Базисный ресурс измеряется в одних и тех же единицах для всех ЭА (золото, международная валюта). Переменные N и M — экстенсивные, т. е. при объединении (разделении) однородных ЭА они изменяются в одинаковой пропорции. Кроме того, ЭА характеризуется вектором интенсивных переменных — оценок $p = (p_1, \dots, p_k)$ ресурсов, которые зависят от N и M . Однородные ЭА имеют одинаковые значения оценок ресурсов.

При обмене ресурсами нескольких изолированных от окружения ЭА оценки ресурсов выравниваются в состоянии равновесия, если все ресурсы являются необходимыми, т. е. если при стремлении запаса некоторого ресурса к нулю его оценка у всех ЭА стремится к бесконечности.

Оценка ресурса p_i — равновесная (внутренняя) цена. Она равна той минимальной цене в единицах базисного ресурса, по которой ЭА готов продать i -й ресурс, или той максимальной цене, по которой он готов его купить.

Размерность вектора цен c , как и вектора оценок, — единицы базисного ресурса, отнесенные к единице ресурса.

Выделим три типа ЭА:

1. ЭА, у которых оценка ресурса p зависит от состояния ЭА (от запасов ресурсов и капитала). Обычно, но не всегда, с ростом запаса некоторого ресурса его оценка падает, а с ростом запаса капитала растет. ЭА такого типа будем по аналогии с термодинамическими системами называть *экономическими подсистемами с конечной емкостью*.

ЭА может обмениваться с окружением не только материальным, но и базисным ресурсом M . Минимальная цена продажи (максимальная цена покупки) представляет собой оценку базисного ресурса для ЭА. Обозначим ее $p_0(N, M)$. Эта оценка положительна для всех ЭА. Вообще говоря, любой ресурс, оценка которого положительна для всех ЭА, может быть принят за базисный.

ЭА может обмениваться с окружением потоками потребления и дохода. Взамен потока потребления ЭА не получает никакой компенсации, а поток дохода, как правило, имеет размерность базисного ресурса.

2. ЭА, у которых оценки p_i не зависят от запаса ресурсов. При обмене с таким ЭА

количество закупаемого или продаваемого ему ресурса столь мало по сравнению с наличным запасом, что практически не влияет на его оценку. ЭА такого типа аналогичны термодинамическим системам бесконечной емкости (резервуарам). Поэтому их естественно назвать *экономическими резервуарами*. К ним относятся рынки, цены на которых не зависят от потоков закупок и продаж, но могут изменяться во времени под влиянием внешних по отношению к системе факторов.

3. *Активные ЭА* — *посреднические фирмы*, которые назначают цену или интенсивность продажи (покупки) ресурсов независимо от их запаса и стремятся сделать это таким образом, чтобы извлечь максимум или затратить минимум базисного ресурса. Фирмы аналогичны рабочему телу тепловой машины в термодинамике. Они могут контактировать одновременно с несколькими ЭА, назначая для каждого из них свои цены или потоки. Цены посредника и функции прерывания контакта с тем или иным ЭА являются управляющими переменными.

Фирма может быть и производственной, в этом случае она закупает ресурсы (сырье, рабочую силу, производственные фонды) и продает продукцию, выпуск которой определяется производственной функцией того или иного типа [1] и ценой, которую фирма устанавливает. Цену, устанавливаемую фирмой на i -й вид ресурса, обозначим c_i .

2. Существование функции благосостояния и ее свойства

Вопрос о том, как количественно охарактеризовать полезность для ЭА того или иного ресурса, существует ли функция полезности, которую ЭА стремится максимизировать при тех или иных ограничениях, зависит ли эта функция от количества ресурсов или потоков их потребления,... обсуждался в экономике давно. Многие задачи можно было решать, не делая допущения о существовании функции полезности, а используя лишь кривые безразличия, которые выделяют наборы ресурсов, имеющие одинаковую ценность для ЭА.

Подход к ЭА как к макросистеме позволяет ввести и доказать существование такой функции. Следуя [2], будем называть ее *функцией благосостояния*. Эта функция была введена в более ранних работах [3],[4], где она названа структурной функцией. Термин, использованный в [2], в большей степени соответствует экономическому смыслу.

При обмене ЭА закупает и продает ресурсы, изменяя одновременно запасы ресурсов N и капитала M . Введем функцию U , дифференциал которой равен

$$dU = dM + \sum_i p_i dN_i. \quad (1)$$

Эту функцию называют *капитализацией* или *полным капиталом* ЭА, так как ее изменение учитывает изменение как базисного ресурса M , так и *связанного капитала*, с дифференциалом $dF = \sum_i p_i dN_i$. При покупке (продаже) по минимально возможной (равновесной) цене p_i i -го ресурса $p_i dN_i = -dM$ и $dU = 0$.

dU является полным дифференциалом, а функция U зависит от N, M при условиях:

$$\partial p_i / \partial M = 0, \quad \partial p_i / \partial N_j = \partial p_j / \partial N_i, \quad \forall i, j. \quad (2)$$

В этом случае значения ее вторых производных не зависят от последовательности дифференцирования. В общем случае это не так.

Доказательство существования функции благосостояния $S(N, M)$ сводится к доказательству существования интегрирующего множителя $p_0(N, M)$ такого, что $dS = p_0(N, M)dU$ является полным дифференциалом. Этот множитель по аналогии с p может быть назван оценкой капитала базового ресурса. Для всех ЭА он строго положителен. Это доказательство приведено в [6].

Таким образом, доказано Утверждение:

Существует некоторая функция состояния (экстенсивных переменных) $S(N, M)$ такая, что ее дифференциал имеет вид

$$dS = p_0(N, M)dU = p_0(N, M) \left[dM + \sum_i p_i(N, M)dN_i \right]. \quad (3)$$

В обратимом, т. е. осуществляемом по ценам, совпадающим с оценками ресурсов, цикле обмена, функция S не изменяется, так как

$$\oint dS = 0. \quad (4)$$

Оценки ресурсов могут быть выражены через функцию S как:

$$p_0 = \frac{\partial S}{\partial M}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial N_i} / \frac{\partial S}{\partial M}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

При этом оценка базисного ресурса p_0 положительна для всех ЭА, а p_i могут быть и отрицательными, если i -й ресурс требует, например, утилизации или затрат на хранение. Из выражений (5) следует, что оценки всех ресурсов, кроме базисного, не изменяются при умножении функции S на постоянное число, а оценка базисного ресурса умножается на то же число. Добавление константы к функции благосостояния не влияет на значения оценок.

При объединении двух ЭА с одинаковыми оценками всех ресурсов, включая базисный, предполагают, что оценки ресурсов не изменятся. В этом случае функция благосостояния S возрастет во столько же раз, во сколько вырастут запасы ресурсов, т.е. она, как N и M , является экстенсивной переменной и представляет собой однородную функцию первого порядка. По теореме Эйлера однородная функция первого порядка может быть записана в форме

$$S(N, M) = p_0(M, N) \left(\sum_i p_i(M, N)N_i + M \right). \quad (6)$$

Зависимость $p(N, M)$ может быть найдена по формулам (5), а также экспериментально по поведению ЭА в процессах обмена.

Таким образом, потенциалом ресурсообмена является оценка ресурса p , а координатой его количество N . Произведение $p dN$ имеет размерность базисного ресурса. Функция благосостояния измеряется в валюте конкретного ЭА, так что величина p_0 характеризует ценность для ЭА базисного ресурса и имеет размерность [единицы

валюты ЭА/единицы базисного ресурса]. Если ЭА функционируют на рынке с одинаковой валютой, то их функции благосостояния имеют одинаковую размерность и аддитивны. Но если взаимодействуют ЭА, использующие разную валюту, то их функции S_j не аддитивны.

Система может содержать валютную биржу, на которой в каждый момент времени определены коэффициенты обмена одной валюты на другую. Любая из них либо их набор могут быть приняты за базисный ресурс, а функция благосостояния ЭА нормирована посредством умножения на стоимость v базисного ресурса в единицах валюты ЭА на бирже. Такие нормированные функции $\bar{S}_j = v_j S_j$ аддитивны для разных ЭА. Коэффициенты v_j естественно назвать *внешними нормирующими коэффициентами*. Функция

$$\bar{S} = \sum_j \bar{S}_j$$

представляет собой нормированную функцию благосостояния системы. Если система неоднородна и входящие в нее ЭА обмениваются ресурсами, то $\bar{S}$ возрастает и в состоянии равновесия достигает своего максимального значения при тех или иных ограничениях, наложенных на систему.

Функцию S предполагают дважды непрерывно дифференцируемой, монотонно возрастающей по каждому из аргументов, строго выпуклой вверх и равной нулю в начале координат. Ее частные производные стремятся к бесконечности, когда соответствующая переменная стремится к нулю (условие необходимости каждого из ресурсов). Как следствие этих предположений p_i падает с ростом N_i . При таком описании ЭА подобен термодинамической подсистеме конечной емкости.

Для экономического резервуара оценки ресурсов p_i и p_0 постоянны, а функция благосостояния линейная по M и N .

3. Условия добровольности и следствия из существования функции S

При обмене ресурсами между экономическими агентами должны соблюдаться *условия добровольности*, заключающиеся в том, что ни одна из функций благосостояния S_ν не уменьшается (исключение — ассоциированный обмен, благотворительность). Условия добровольности делают невозможным прямой обмен одним видом ресурса, если его оценки у контактирующих друг с другом ЭА имеют одинаковый знак.

Дифференциальные соотношения между оценками, аналог уравнения Гиббса–Дюгема. Существование функции благосостояния приводит к тому, что оценки ресурсов должны отвечать определенным требованиям.

Запишем дифференциал функции S

$$dS = p_0 \left(dM + \sum_{i=1}^n p_i dN_i \right) = p_0 dU. \quad (7)$$

Разрешив (7) относительно dM , получим

$$dM = \frac{dS}{p_0} - \sum_{i=1}^n p_i dN_i. \quad (8)$$

Из равенства (6) следует, что

$$M = \frac{S}{p_0} - \sum_{i=1}^n p_i N_i, \quad (9)$$

$$dM = \frac{dS}{p_0} + Sd\left(\frac{1}{p_0}\right) - \sum_{i=1}^n (p_i dN_i + N_i dp_i). \quad (10)$$

Сравнивая равенства (10) и (8), найдем соотношение, связывающее оценки ресурсов и капитала

$$Sd\left(\frac{1}{p_0}\right) - \sum_{i=1}^n N_i dp_i = 0. \quad (11)$$

Аналогично, сравнивая дифференциал S , найденный из равенства (6), с выражением (7), получим

$$M dp_0 + \sum_{i=1}^n N_i d(p_0 p_i) = 0. \quad (12)$$

Условия (11), (12) вытекают из существования функции S и ее однородности первого порядка. Они являются экономическими аналогами уравнений Гиббса–Дюгема в термодинамике. Из них, например, следует, что если состояние системы изменяется так, что оценки ресурсов постоянны, то неизменна и оценка капитала p_0 .

В силу симметрии матрицы вторых производных для дважды дифференцируемой функции S чувствительности оценок к изменениям запасов ресурсов и капитала связаны равенствами

$$\frac{\partial(p_0 p_i)}{\partial N_j} = \frac{\partial(p_0 p_j)}{\partial N_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial N_i \partial N_j}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial N_j} = \frac{\partial(p_0 p_j)}{\partial M} = \frac{\partial^2 S}{\partial M \partial N_j}. \quad (14)$$

Из условий (13), (14), как нетрудно показать, следует, что

$$\frac{\partial p_i}{\partial N_j} + p_i \frac{\partial p_j}{\partial M} = \frac{\partial p_j}{\partial N_i} + p_j \frac{\partial p_i}{\partial M}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (15)$$

Равенства (13) и (14) — экономический аналог соотношений Максвелла.

3. Термодинамические балансы экономических систем

Подобно тому как для систем физической природы термодинамические балансы включают наряду с балансами по веществу и энергии баланс по энтропии, в экономических системах балансовые уравнения наряду с балансами по ресурсам и капиталу должны включать балансовое уравнение по фактору необратимости. В этом разделе логика составления и использования термодинамических балансов перенесена на экономические системы с учетом тех их особенностей, о которых говорилось выше.

1. Изолированная система, условия равновесия

В изолированной системе объем всех ресурсов, включая базисный, остается неизменным, если система не содержит производственной фирмы. В общем случае объем i -го ресурса в системе изменяется в соответствии с уравнением

$$\dot{N}_i = \sum_j W_j(p_j) \alpha_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где $W_j(p_j)$ — интенсивность процесса преобразования ресурсов в j -й подсистеме; коэффициенты $\alpha_{ij} > 0$, если i -й ресурс возникает в j -й подсистеме, и $\alpha_{ij} < 0$, если этот ресурс расходуется. Они определяют, сколько i -го ресурса возникает (расходуется) в единицу времени.

Суммарный запас ресурса и капитала не изменяется в силу процессов обмена, так что

$$\sum_j n_{ij}(p_i, p_j) = 0, \quad \sum_j c_{ij}(p_i, p_j) n_{ij}(p_i, p_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Будем предполагать, что в системе имеется валютная биржа, тогда в равновесии нормированная функция благосостояния достигает максимума. Если производство в системе отсутствует, то условия максимума $\bar{S}$ определяют равновесное распределение ресурсов и капитала между ЭА. Для простоты покажем это на системе из двух ЭА, обменивающихся скалярным ресурсом.

Равновесию в такой системе соответствует решение следующей задачи:

$$[\bar{S}_1(N_1, M_1) + \bar{S}_2(N_2, M_2)] \Rightarrow \max \quad (18)$$

при условиях

$$M_1 + M_2 = M_0, \quad N_1 + N_2 = N_0.$$

Здесь в правых частях равенств фигурируют суммарные запасы ресурсов до начала процесса ресурсообмена.

Условия оптимальности задачи (17) очевидно приводят к равенствам

$$\frac{\partial \bar{S}_1(N_1, M_1)}{\partial N_1} = \frac{\partial \bar{S}_2(N_2, M_2)}{\partial N_2}, \quad \frac{\partial \bar{S}_1(N_1, M_1)}{\partial M_1} = \frac{\partial \bar{S}_2(N_2, M_2)}{\partial M_2}, \quad (19)$$

или с учетом характера зависимости функций благосостояния от запасов ресурса и капитала

$$v_1 p_{01} p_1 = v_2 p_{02} p_2, \quad v_1 p_{01} = v_2 p_{02}.$$

Мы получили четыре уравнения с четырьмя неизвестными. Тем же условиям соответствует равновесие для любого числа ЭА и векторного ресурса.

Таким образом, равновесию в изолированной системе, не содержащей производства, соответствует равенство оценок ресурсов и нормированных оценок капитала. Эти же условия справедливы и при наличии производства, если начальные запасы ресурсов ограничены, все ресурсы „необходимы“, а функции благосостояния и производственные функции W_j выпуклы вверх. В этом случае оценки вырабатываемых

ресурсов с увеличением их объема падают, а потребляемых растут, так что поток производства стремится к нулю.

Процесс прямого ресурсообмена в изолированной неоднородной системе необратим. Показателем необратимости может служить прирост нормированной функции благосостояния $\Delta \bar{S}$ либо прирост связанного капитала ΔF . При этом условие максимума F не определяет распределения ресурсов и капитала в равновесии, так как приводит лишь к требованию равенства оценок ресурсов. При отсутствии валютной биржи возможна неединственность состояния равновесия (этот случай будет рассмотрен подробнее в следующей главе).

2. Открытая система

Запишем уравнения балансов для неоднородной экономической системы, обменивающейся с окружением потоками ресурсов и капитала. При этом индекс i припишем i -му виду ресурса, а индекс j — j -ой подсистеме. Каждая из подсистем обменивается потоками ресурсов с внешними продавцами и покупателями и с другими подсистемами, входящими в рассматриваемую систему. Потоки ресурсов и капитала (базисного ресурса), поступающие в подсистему, будем считать положительными, а покидающие ее — отрицательными.

Внешние потоки подразделяют на две категории:

- а) принудительно поступающие в систему и меняющие свою интенсивность во времени под влиянием внешних факторов, и
- б) зависящие от цен, назначаемых внешними по отношению к подсистеме продавцами и покупателями, и от оценок ресурса в рассматриваемой подсистеме. В термодинамике первые из них принято называть *конвективными*, а вторые — *диффузионными*. В соответствии с этим будем присваивать конвективным потокам индекс k , а диффузионным — индекс d . Потоки и оценки в тех выражениях, где у них отсутствует индекс ресурса i , для упрощения записи будем предполагать векторными.

Запишем балансовые соотношения по каждому из видов ресурсов, капиталу и фактору необратимости:

Уравнения баланса по ресурсам

$$\dot{N}_i = \sum_j \left(n_{ij}^k(t) + \sum_\nu n_{ij\nu}^d(p_j, p_\nu) + W_j(p_j) \alpha_{ij} \right), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где суммирование ведется по всем подсистемам; $W_j(p_j)$, как и выше — интенсивность процесса преобразования ресурсов в j -й подсистеме; коэффициенты $\alpha_{ij} > 0$, если i -й ресурс возникает в j -й подсистеме, и $\alpha_{ij} < 0$, если этот ресурс расходуется.

В уравнениях (20) к конвективным потокам могут быть отнесены потоки потребления, ресурсы, поступающие в систему как гуманитарная помощь, или изымаемые из системы принудительно в форме натуральных налогов.

Уравнение баланса по базисному ресурсу:

$$\dot{M} = \sum_j \left(m_j^k(t) - \sum_k c_{kj} n_{kj}^d(p_j, c_{kj}) \right). \quad (21)$$

Здесь учтено, что изменение базисного ресурса связано только с обменом между ЭА, входящими в систему и ее окружением или с экономическими резервуарами. Внутренний ресурсообмен не меняет суммарного запаса базисного ресурса. c_{kj} – цена k -го диффузионного потока, поступающего в j -ю подсистему. Конвективным потокам соответствует уплата налогов, социальные выплаты, затраты капитала на потребление ресурсов извне системы ...

Уравнение баланса по связанному капиталу:

$$\dot{F} = \sum_j p_j (n_{ij}^k(t) + \sum_k n_{kj}^d(p_j, c_{kj})) + \sigma. \quad (22)$$

Здесь первое слагаемое соответствует изменению связанного капитала за счет обмена системы с окружением, а второе – (диссипация капитала σ) скорость его роста за счет внутреннего ресурсообмена между подсистемами и преобразования ресурсов в процессе производства. Она равна

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_j \sum_\nu n_{j\nu}(p_j, p_\nu)(p_j - p_\nu) + \sum_j W_j(p_j)A_j, \quad (23)$$

где p_j и p_ν – векторы оценок ресурсов j -й и ν -й подсистем с составляющими p_{ij} и $p_{i\nu}$; $A_j = \sum_i \alpha_{ij}p_{ij}$; $n_{j\nu} = -n_{\nu j}$ – вектор-функция потока ресурсов.

Величина $\sigma(p) \geq 0$, так что в неоднородной открытой системе в отсутствие конвективных потоков связанный капитал в выходящих потоках не меньше, чем в потоках, поступающих в систему. Знак равенства соответствует однородной системе.

Как и в термодинамике, условие $\sigma(p_1, p_2) \geq 0$ вместе с балансовыми соотношениями (20)–(22) выделяет границу области реализуемости экономической системы в классе обратимых процессов. Наложённые на интенсивность того или иного потока условия позволяют определить величину $\sigma_{\min} > 0$, достижимую при этих условиях. При этом область реализуемости сужается, так как вместо неравенства $\sigma \geq 0$ справедливо неравенство $\sigma \geq \sigma_{\min}$.

Если $\Delta p_{j\nu} = p_j - p_\nu$ мало, а кинетическая функция $n_{i\nu}$ дифференцируема по совокупности аргументов, то σ представляет собой положительно-определённую квадратичную форму переменных $\Delta p_{j\nu}$.

В отличие от систем физической природы, в которых при стационарных внешних условиях устанавливается режим с постоянными значениями интенсивных переменных и потоков обмена, в экономике при стационарных внешних условиях в отсутствие конвективных потоков происходит накопление базисного ресурса в каждой из подсистем.

Условие добровольности обмена накладывает ограничения на множество возможных состояний открытой системы. Чтобы найти эти ограничения, запишем балансовые соотношения по ресурсу и капиталу для j -й подсистемы:

$$\dot{N}_{ij} = n_{ij}^k(t) + n_{ij}^d(p_j, p_\nu) + \sum_\nu n_{ij\nu}(p_j, p_\nu) + W_j(p_j)\alpha_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

$$\dot{M}_j = m_j^k(t) - \sum_i [c_{ij}n_{ij}^d(p_j, c_j) + \sum_\nu c_{ij\nu}(p_j, p_\nu)n_{ij\nu}(p_j, p_\nu)]. \quad (25)$$

Для любого ЭА в силу условий добровольности скорость изменения функции благосостояния, а значит, и его капитализации неотрицательна

$$\dot{U}_j = \dot{S}_j/p_{0j} = \sum_i (p_{ij}\dot{N}_{ij} + \dot{M}_j) \geq 0,$$

что с учетом (24), (25) приводит к ограничениям на оценки и потоки в системе

$$\begin{aligned} & \sum_i \left[p_{ij} [n_{ij}^k(t) + W_j(p_j)\alpha_{ij}] + \sum_\nu [n_{ij\nu}(p_j, p_\nu)(p_{ij} - c_{ij\nu}(p_j, p_\nu))] + \right. \\ & \left. + n_{ij}^d(p_j, c_j)(p_{ij} - c_{ij}) \right] + m_j^k(t) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (26)$$

4. Кинетика процессов обмена, диссипация капитала

В процессах обмена ЭА выступает как покупатель и как продавец, он характеризуется функцией спроса и предложения. Функция спроса показывает, сколько i -го ресурса ЭА готов приобрести по цене c_i . Чем выше эта цена, тем, как правило, меньше спрос. Наконец, при некоторой цене $c_i = p_i$ ЭА прекращает закупки, а при $c_i > p_i$ он готов продавать i -й ресурс, причем в тем большем количестве, чем больше c_i .

Обмен потоками энергии, вещества в макросистемах физической природы и обмен потоками ресурсов и капитала в экономических системах возникает за счет различия интенсивных переменных. Движущей силой для потока теплоты, например, является разность температур, а для потока вещества – разность химических потенциалов. В экономике обмен тем или иным ресурсом между ЭА возникает в том случае, когда оценки этих ресурсов у контактирующих ЭА различны.

При этом направление потока зависит от знака разности соответствующих интенсивных переменных. В экономических системах кинетические коэффициенты определяются „размерами“ рынков, возможностью доставки товаров и пр.

При анализе процессов, протекающих во времени, роль функции спроса – зависимости объема закупаемого ресурса от цены продажи (объема продаваемого от цены покупки), играет функция, характеризующая кинетику ресурсообмена $n_i(p_i, c_i)$, она связывает с ценой не количество, а поток ресурса. Если положительным считать поток, направленный в сторону ЭА, то кинетические функции обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} & \text{sign } n_i(c_i, p_i) = \text{sign } (p_i - c_i), \\ & n_i(c_i, p_i) = 0 \quad \text{при} \quad c_i = p_i, \quad \frac{\partial n_i}{\partial c_i} < 0, \quad \frac{\partial n_i}{\partial p_i} > 0. \end{aligned} \quad (27)$$

При цене, сколь угодно близкой к оценке, интенсивность потока сколь угодно мала, процесс называют квазиравновесным. Для закупки конечного объема ресурса квазиравновесный процесс требует сколь угодно большого времени.

Зависимость $n(c, p)$ удовлетворяет условиям (27). Если покупатель управляет ценой покупки, то рынок называют *монопольным*. Если оценки рынка не зависят от

потоков закупок каждого покупателя (число покупателей столь велико, что влияние каждого пренебрежимо мало), рынок называют *рынком совершенной конкуренции*. Он представляет собой аналог термодинамического резервуара.

При обмене потоками ресурсов и капитала функции благосостояния контактирующих ЭА изменяются. Для простоты записи будем считать ресурс скалярным. В силу (7), (12)

$$\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial N} \dot{N} + \frac{\partial S}{\partial M} \dot{M} = p_0 p n(p, c) - p_0 c n(p, c) = p_0 n(p, c)(p - c) = p_0 \dot{U}. \quad (28)$$

Здесь учтено, что поток базового ресурса противоположен потоку ресурса, умноженному на c – цену продажи или покупки ресурса ЭА.

При продаже ресурса в силу принципа добровольности $c > p$, при покупке ресурса ЭА $p > c$. В свою очередь, в первом случае поток n отрицателен, а во втором случае положителен. Поэтому скорость изменения функции благосостояния всегда больше нуля.

Если обмен производится между несколькими ЭА, то скорость роста функции благосостояния, как и капитализации, положительна для каждого из них. При этом в изолированной системе суммарный объем базового ресурса не изменяется и рост суммарной капитализации связан только с возрастанием связанного капитала F .

Заметим, что в отличие от экономических систем энтропия для процессов физической природы при взаимодействии подсистем возрастает только для системы в целом. Для части взаимодействующих подсистем она может убывать. В этом смысле к энтропии физических систем ближе связанный капитал F . При взаимодействии двух ЭА связанный капитал одного из них (продавца) уменьшается, а другого (покупателя) увеличивается. Но при этом суммарное значение F возрастает, так как поток всегда направлен в сторону ЭА с большей оценкой ресурса.

В равенстве (28) фигурирует цена ресурса c . При обмене между двумя ЭА, у которых $p_1 < p_2$, цена определяется по условию равенства потока продаж $n_1(p_1, c)$ потоку покупок $n_2(c, p_2)$, т.е. из уравнения

$$n_1(p_1, c) = n_2(c, p_2), \quad (29)$$

которое связывает цену с оценками ресурса контактирующих ЭА. Исключая из (29) $c(p_1, p_2)$, получим зависимость потока обмена от оценок ресурса $n(p_1, p_2)$.

Например, при $n_1 = \alpha_1(c - p_1)$, $n_2 = \alpha_2(p_2 - c)$, нетрудно видеть, что

$$n(p_1, p_2) = \bar{\alpha}(p_2 - p_1), \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (30)$$

Свойства (28) потоков обмена приводят к тому, что для цены обмена справедливы неравенства $p_1 < c < p_2$.

Сумма по всем подсистемам

$$\sigma = 0,5 \sum_{\nu j} n_{\nu j}(p_\nu, p_j)(p_j - p_\nu) \quad (31)$$

характеризует скорость роста суммарного связанного капитала F изолированной системы. Множитель 0,5 в (31) связан с тем, что значение каждого из слагаемых

не зависит от порядка индексов и входит в сумму дважды; n и p – векторы, а их произведение равно

$$p_j n_{vj} = \sum_i p_{ji} n_{vji}.$$

Величина σ неотрицательна и равна нулю только в состоянии равновесия (равенства оценок ресурсов для всех подсистем). В такой системе посредник не может извлечь базисный ресурс за счет покупки ресурсов у одних и продажи другим ЭА. Базисный ресурс в этой системе частично обесценился, так как при необратимом обмене объемы ресурсов не изменились, а их стоимость (связанный капитал) F возросла.

Рассмотрим циклический процесс взаимодействия фирмы с ЭА и потребуем, чтобы средняя интенсивность потоков обмена или, что то же самое, продолжительность процесса и объем закупаемого ресурса были фиксированы. В этом случае процесс необратим, так как фирма при закупке ресурса вынуждена будет повышать цены по сравнению с оценками p_i , а продавать по ценам, которые ниже, чем эти оценки.

$$\Delta U = \oint \sum (p_i(N, M) - c_i) dN_i \geq 0. \quad (32)$$

Фирма понесет убытки в количестве ΔU по сравнению с обратимым процессом.

Интенсивность потерь фирмы за счет необратимости

$$\sigma(t) = \sum_i n_i(p, c)(p_i - c_i) \geq 0. \quad (33)$$

Это выражение совпадает с (31) с той разницей, что цена определена фирмой, а не является функцией оценок; σ в данном случае имеет смысл торговых издержек.

Условие (32) неубывания капитализации (значит, и благосостояния) при экономическом обмене является аналогом интеграла Клаузиуса, а закон, согласно которому при контакте двух ЭА ресурс переходит от ЭА, для которого его оценка меньше, к ЭА, у которого его оценка больше, и при этом суммарная величина связанного капитала не убывает ($\Delta(F_1 + F_2) \geq 0$), является аналогом второго начала термодинамики и позволяет построить необратимую микроэкономику, во многом, но далеко не во всем, аналогичную необратимой термодинамике. Будем называть величину σ – *диссипацией капитала*.

Прибыльность. Закупая ресурсы у одних и продавая их другим экономическим агентам, посредническая фирма извлекает базисный ресурс. *Максимальное количество E базисного ресурса, которое фирма может извлечь в изолированной неоднородной системе, естественно назвать прибыльностью.* Если на продолжительность процесса не наложено никаких ограничений, то очевидно, что прибыльности соответствует закупка по самым низким ценам (оценкам) у одних ЭА и продажа по самым высоким ценам (тоже оценкам) другим ЭА, у которых эти оценки выше. Объемы же закупок и продаж определяются условиями равенства оценок у всех ЭА в конце процесса. При таком определении прибыльность является прямым аналогом понятия „работоспособности“ (эксергии) в термодинамике физических систем.

5. Процесс ресурсообмена и равновесие в изолированной системе

Остановимся подробнее на обмене ресурсами в изолированных системах. В таких системах суммарный объем ресурсов не изменяется, а функция благосостояния и капитализация каждой подсистемы, как в любых процессах обмена, не убывает. Скорость роста суммарной капитализации U с учетом неизменности суммарного базисного ресурса равна

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dF}{dt} = \sigma = \sum_j \sum_i p_{ji} \frac{dN_{ji}}{dt} \geq 0. \quad (34)$$

В состоянии равновесия, которое в силу свойств функций благосостояния всегда устойчиво, капитализация системы максимальна, а потоки обмена $n_{ij} = dN_{ji}/dt$ равны нулю.

В термодинамике условия равновесия можно получить из задачи о максимуме суммарной энтропии системы при заданном суммарном значении той или иной экстенсивной переменной. Например, если задан суммарный объем подсистем, а остальные экстенсивные переменные неизменны, то максимуму суммарной энтропии соответствует такое распределение объемов, при котором производные энтропии каждой системы по ее объему одинаковы, а это приводит к равенству давлений. Аналогично распределение общего количества тепловой энергии в равновесии приводит к равенству температур и т.д.

В микроэкономике условия равновесного распределения ресурсов также можно получить из требования максимума суммарного связанного капитала или, что то же самое, капитализации системы, при заданном суммарном запасе ресурсов. Оно приводит к распределению, при котором производные капитализации каждой подсистемы по запасам распределяемого ресурса (оценки ресурса) одинаковы. Однако оценки базисного ресурса могут быть разными в зависимости от кинетики обмена.

1. Продажа и покупка ресурсов

Рассмотрим систему, в которой товары обмениваются на базисный ресурс. Покажем, что в этом случае при отсутствии валютной биржи состояние равновесия не единственно и в отличие от термодинамических систем зависит от кинетики обмена.

В состоянии равновесия справедливы балансовые соотношения

$$\sum_{j=1}^n \overline{N}_{ij} = N_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (35)$$

$$\sum_{j=1}^n \overline{M}_j = M_0. \quad (36)$$

Здесь i и j – индексы вида ресурса и ЭА соответственно, а чертой отмечены равновесные величины ресурсов. К уравнениям балансов нужно добавить условия равновесия (равенства оценок ресурсов для всех ЭА)

$$p_{ij}(\overline{N}_j, \overline{M}_j) = \overline{p}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (37)$$

Общее число неизвестных (векторы $\bar{N}$, $\bar{M}$ и $\bar{p}$) равно $(m+1)n+m$. Число уравнений (35), (37) равно $m(n+1)+1$ с учетом того, что $n \geq 2$ число неизвестных всегда больше числа уравнений (не хватает $(n-1)$ -го условия). Так что равновесие не определено однозначно.

Из свойств кинетических функций следует, что в процессе ресурсообмена капитализация каждого из ЭА не уменьшается, т.е. справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^k (\bar{p}_{ij} \bar{N}_{ij} - p_{ij0} N_{ij0}) + \bar{M}_j - M_{j0} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (38)$$

Состояние равновесия, удовлетворяющее условиям (35)–(38), доопределено, если известна кинетика ресурсообмена. Она задает промежуточную цену, которая определена через равенство потоков продажи и покупки ресурса между любыми двумя ЭА

$$n_{ij\nu}(p_{ij}, c_{ij\nu}) = -n_{i\nu j}(c_{ij\nu}, p_{i\nu}). \quad (39)$$

При этом поток базисного ресурса направлен навстречу потоку ресурса и равен

$$m_{j\nu} = \sum_{i=1}^k c_{ij\nu} n_{ij\nu}(p_{ij}, c_{ij\nu}) = -m_{\nu j}, \quad j, \nu = 1, \dots, n. \quad (40)$$

Динамику изменения состояния системы характеризуют уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dM_j}{dt} &= - \sum_{i=1}^k \sum_{\nu=1}^n c_{ij\nu} n_{ij\nu}(p_{ij}, c_{ij\nu}), \\ \frac{dN_{ij}}{dt} &= \sum_{\nu=1}^n n_{ij\nu}(p_{ij}, c_{ij\nu}), \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (41)$$

с фиксированными начальными условиями. Решение этих уравнений при $t \rightarrow \infty$ стремится к состоянию равновесия, удовлетворяющему всем записанным выше условиям.

Число уравнений, определяющих состояние равновесия, $k(1+n)+n$, равно числу неизвестных, так что состояние равновесия не зависит от кинетики и определено зависимостью оценок ЭА от запасов ресурсов, т.е. видом функций благосостояния.

Для изолированных экономических систем справедливо следующее

У т в е р ж д е н и е: При каждом распределении базисного ресурса $\bar{M}$ между подсистемами остальные ресурсы в состоянии равновесия распределяются таким образом, что суммарная капитализация, или, что то же самое, величина связанного капитала системы, достигает максимума, совместимого с наложенными на систему ограничениями:

$$U(M^0, \bar{N}) = M^0 + \sum_i \sum_j p_{ij}(\bar{N}_{ij}, \bar{M}_j) \bar{N}_{ij} \rightarrow \max_{\bar{N}_{ij}}, \quad (42)$$

при условиях

$$\sum_i \bar{N}_{ij} = N_i^0, \quad \bar{N}_{ij} \geq 0, \quad \bar{M}_j = M_j^0 - \sum_i p_{ij}(\bar{N}_{ij}, \bar{M}_j) (\bar{N}_{ij} - N_{ij}^0) \quad \forall i, j. \quad (43)$$

Если равновесные запасы каждой подсистемы по каждому виду ресурсов положительны, то этот максимум равен

$$U^*(M^0) = M^0 + \sum_i \bar{p}_i N_i^0, \quad (44)$$

где $\bar{p}_i$ – равновесная оценка i -го ресурса.

2. Системы, включающие валютную биржу

На валютной бирже каждый ЭА обменивает свою валюту на базисный ресурс по некоторому установившемуся курсу. Будем предполагать, что оборот валютной биржи столь велик, что потоки обмена между биржей и каждым из ЭА не оказывают влияния на курсы валют. Так что оценка p_{0j} базисного ресурса постоянна или изменяется под влиянием внешних по отношению к системе факторов.

Наличие биржи существенно влияет на равновесие в системе и множество состояний каждого из ЭА. Действительно, условие

$$p_{0j}(N_j, M_j) = 1/v_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (45)$$

накладывает ограничение на множество состояний ЭА, связывая запас базисного ресурса с N_j . Дифференциал капитализации

$$dU_j = dS_j v_j = dM_j + \sum_i p_i(N_j, M_j) dN_{ji}$$

на этом множестве оказывается полным дифференциалом. Если из условия (45) выразить $M_j(N_j)$ и подставить в p_{ji} , то для получившихся оценок $\tilde{p}_j = p_j[N, M(N)]$ справедливы $\frac{n(n-1)}{2}$ соотношений

$$\frac{\partial \tilde{p}_{ji}}{\partial N_{jl}} = \frac{\partial \tilde{p}_{jl}}{\partial N_{ji}}, \quad i, l = 1, 2, \dots, k, j = 1, \dots, n. \quad (46)$$

Равновесие в замкнутой системе ресурсообмена при наличии валютной биржи единственно, оно определено условиями (35), (37), к которым добавляются требования (45). В состоянии равновесия достигает максимума сумма нормированных функций благосостояния

$$\bar{S} = \sum_j S_j(\bar{N}_j, \bar{M}_j) v_j \quad (47)$$

при условиях (35).

Обмен с резервуаром. Оценки резервуара p^0 постоянны. Максимальному приросту ΔU для ЭА соответствует обмен по ценам, равным p^0 . В этом случае в состоянии равновесия капитал $\bar{M}$ и запасы ресурса $\bar{N}$ подчиняются условиям

$$p_i(\bar{M}, \bar{N}) = p_i^0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (48)$$

$$\bar{M} - M_0 = \sum_{i=1}^m p_i^0 (N_{i0} - \bar{N}_i), \quad (49)$$

$$\overline{M} > 0, \quad \overline{N}_i > 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (50)$$

где M_0 и N_0 — начальные значения M и N . Условия (48), (49) определяют состояние равновесия системы, если выполнены ограничения (50). Если же они не выполнены, то часть переменных приравнивают к нулю, уменьшая число условий (48), (49) для расчета оставшихся переменных.

Подсчитаем прирост капитализации ЭА при $m = 1$:

$$\Delta U = \int_{N_0}^{\overline{N}} \frac{dU}{dN} dN = \int_{N_0}^{\overline{N}} \left(\frac{\partial U}{\partial M} \frac{dM}{dN} + \frac{\partial U}{\partial N} \right) dN.$$

Так как

$$\frac{dM}{dN} = -p^0, \quad \frac{\partial U}{\partial N} = p(M, N), \quad M = M_0 - p^0(N - N_0),$$

то

$$\Delta U = \int_{N_0}^{\overline{N}} [p(M_0 - p^0(N - N_0), N) - p^0] dN. \quad (51)$$

Если $p \geq p^0$, то $dN \geq 0$, а если меньше, то $dN \leq 0$, так что прирост ΔU неотрицателен.

Покажем, что при обмене по рыночным ценам прирост функции благосостояния ЭА максимален. Действительно

$$S(\overline{N}, \overline{M}) = S \left(\overline{N}_1, \dots, \overline{N}_m, M(0) - \sum_{i=1}^m p_i^0(\overline{N}_i - N_i(0)) \right) \rightarrow \max_{\overline{N}}.$$

Условия максимума $S(\overline{N})$

$$\frac{\partial S}{\partial \overline{N}_i} = \frac{\partial S}{\partial \overline{M}} \frac{\partial \overline{M}}{\partial \overline{N}_i} + \frac{\partial S}{\partial N_i} = p_0(p_i - p_i^0) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (52)$$

совпадают с условиями равновесия (48). Таким образом, в равновесии с экономическим резервуаром достигается максимум функции благосостояния.

Конкретизируем записанные выше соотношения для случая, когда функция благосостояния ЭА имеет форму Кобба–Дугласа

$$S = (M, N_1, N_2) = M^{\gamma_0} \prod_{i=1}^m N_i^{\gamma_i}.$$

Условия равновесия (48) приводят к системе линейных уравнений

$$\overline{N}_i c_i \left(1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_i} \right) + \sum_{\nu=1, \nu \neq i}^m c_\nu \overline{N}_\nu = U_0 = M(0) + \sum_{\nu=1}^m c_\nu N_\nu(0), \quad i = 1, \dots, m. \quad (53)$$

Здесь U_0 — капитализация ЭА в начальном состоянии по ценам рынка. Решение уравнений (53) имеет вид

$$\overline{M} = U_0 \gamma_0, \quad \overline{N}_i = U_0 \frac{\gamma_i}{c_i}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (54)$$

Значение функции благосостояния в равновесии с рынком

$$\bar{S} = S(\bar{N}) = U_0 \gamma_0^{\gamma_0} \prod_{i=1}^m \left(\frac{\gamma_i}{c_i} \right)^{\gamma_i}. \quad (55)$$

6. Прибыльность системы и процессы минимальной диссипации капитала

Модели экономических макросистем, рассмотренные в предыдущей главе, позволяют ставить и решать задачи об извлечении базисного ресурса в неравновесных экономических системах. Решение этих задач предполагает наличие в системе активной подсистемы — посредника, который выбирает цены закупок и продаж при контакте с каждым из экономических агентов. Если при прямом контакте ЭА процесс ресурсообмена всегда необратим, то при контакте с посредником это не так. Процесс обратим, если в любой момент времени цена посредника сколь угодно близка к оценке ресурса ЭА. Правда, интенсивность потока ресурса при этом может быть сколь угодно мала. Если продолжительность процесса ограничена, то возникает задача о таком изменении цен закупки и продажи ресурса, при котором за заданное время посредник извлечет максимальный объем базисного ресурса.

Прибыльностью экономической системы назовем максимальное количество базисного ресурса, которое может быть извлечено из системы, при тех или иных ограничениях. При этом под системой понимается один или несколько экономических агентов и их окружение (экономический резервуар). При таком определении прибыльности существенную роль играют ограничения, наложенные на процесс извлечения базисного ресурса. Приведем наиболее распространенные из подобных ограничений.

1. Кроме начального состояния, могут быть заданы конечные состояния всех или некоторых ЭА.

2. Могут быть зафиксированы условия равенства тех или иных интенсивных переменных системы (p_i, p_0) с соответствующими переменными внешней среды.

3. Зафиксирована продолжительность процесса.

Эти и иные ограничения уменьшают величину прибыльности. Отметим, что прибыльность — аналог работоспособности для систем физической природы. В частности, в системе с одним резервуаром при заданном начальном состоянии ЭА и отсутствии ограничений на продолжительность процесса она аналогична эксергии.

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из k ЭА, каждый из которых располагает некоторым запасом ресурса N_i ($i = 1, 2, \dots, k$) и базисного ресурса M_i . Оценка ресурса p_i зависит от N_i и M_i . Одной из подсистем может быть экономический резервуар, для которого оценка ресурса p_- постоянна. Предположим, что система замкнута по ресурсам. При контакте i -й и j -й подсистем возникают потоки ресурса n_{ij} и капитала m_{ij} . При этом поток ресурса направлен от подсистемы с меньшей оценкой к подсистеме с большей оценкой, а поток капитала направлен навстречу потоку ресурса. В системе имеется фирма (посредник), ее целью является такая организация ресурсообмена, при которой фирма извлекает из системы неко-

торое количество капитала M . В дальнейшем мы будем предполагать, что непосредственный обмен ресурсами между ЭА невозможен, фирма назначает цены покупки и продажи ресурса, стремясь при этом добиться максимума M , а потоки закупок и продаж зависят от цены c_ν , предложенной фирмой ν -й подсистеме, и оценки $p_{i\nu}$ подсистемой i -го ресурса, т.е.

$$n_{i\nu} = n_{i\nu}(p_i, c_i), \quad n_{i\nu} = 0 \quad \text{при} \quad p_\nu = c_\nu, \quad \text{sign}(n_{i\nu}) = \text{sign}(c_{i\nu} - p_{i\nu}).$$

Знак потока в этой задаче будем считать положительным, если он направлен в сторону фирмы, так что он монотонно растет с ростом c_i . Посредник не производит, а только перепродает ресурсы.

Очевидно, что поток капитала

$$m_\nu(p_\nu, c_\nu) = - \sum_i c_{i\nu} n_{i\nu}(p_i, c_i).$$

Запасы ресурса и капитала в ν -й подсистеме изменяются как

$$\begin{aligned} \dot{N}_{i\nu} &= -n_{i\nu}(p_\nu, c_\nu), \quad N_{i\nu}(0) = N_{i\nu 0}, \\ \dot{M}_\nu &= \sum_i c_{i\nu} n_{i\nu}(p_\nu, c_\nu), \quad M_\nu(0) = M_{\nu 0}. \end{aligned}$$

Как правило, оценки $p_{i\nu}(N_\nu, M_\nu)$ монотонно уменьшаются с ростом N_i при фиксированном M_ν и не убывают с ростом M_ν при фиксированном N_ν .

Найдем, какой объем базисного ресурса может извлечь фирма за сколь угодно большое и за конечное время для случаев, когда в системе имеется резервуар и когда он отсутствует.

1. Продолжительность процесса не ограничена

Система содержит экономический резервуар. Извлечение базисного ресурса возможно только в том случае, когда начальное состояние системы неравновесно, т.е. векторы оценок $p_\nu(0)$ у подсистем различны. Процесс заканчивается в состоянии равновесия, когда оценки всех подсистем равны оценкам экономического резервуара

$$p_{i\nu}(\bar{M}_\nu, \bar{N}_\nu) = p_i^0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (56)$$

Максимуму извлеченного базисного ресурса соответствует минимум суммарного капитала ЭА и резервуара:

$$\sum_{\nu=0}^m \bar{M}_\nu \rightarrow \min. \quad (57)$$

Для достижения этой цели посредник закупает ресурсы по самым низким ценам (оценкам) у тех ЭА, у которых оценки i -го ресурса ниже p_i^0 , а продает по самым высоким ценам (оценкам) тем ЭА, у которых они выше p_i^0 . И при закупке, и при продаже процесс обратим (диссипация капитала и прирост функций благосостояния каждого ЭА) равны нулю. Начальные запасы капитала ЭА заданы, а изменение запаса капитала экономического резервуара

$$\Delta M^0 = \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^k (\bar{N}_{i\nu} - N_{i\nu}(0)) p_i^0.$$

Для определения состояния равновесия имеем $m \times n$ условий (56) и m условий обратимости

$$S_\nu(\overline{M}_\nu, \overline{N}_\nu) = S_\nu(M_\nu(0), N_\nu(0)) = S_\nu, \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (58)$$

Равенства (56), (58) определяют равновесные запасы ресурсов и капитала ЭА. Извлеченный капитал равен разности между суммарным начальным и конечным капиталом ЭА за вычетом приращения капитала резервуара:

$$E_\infty = \sum_{\nu=1}^m (M_\nu(0) - \overline{M}_\nu) - \Delta M^0. \quad (59)$$

Здесь индекс ∞ соответствует тому, что продолжительность процесса сколь угодно велика.

Подчеркнем, что в отличие от прямого контакта ЭА при обратимом обмене через посредника равновесное состояние не зависит от кинетики обмена.

Система не содержит экономического резервуара. В этом случае условия равновесия (56) остаются в силе с той разницей, что вектор равновесных оценок p^0 неизвестен. Для его определения имеем условия ненакопления ресурсов посредником

$$\sum_{\nu=1}^m (\overline{N}_{i\nu} - N_{i\nu}(0)) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (60)$$

Система (56), (58), (60) определяет $(m+1)n$ переменных состояния подсистем в равновесии. Естественно, что равновесие в системе с посредником $\overline{M}, \overline{N}$ отлично от равновесия при прямом обмене. Максимум извлеченного базисного ресурса равен

$$E_\infty = \sum_{\nu=1}^m (M_\nu(0) - \overline{M}_\nu). \quad (61)$$

2. Продолжительность ресурсообмена ограничена

Пусть продолжительность ресурсообмена задана и равна τ . В этом случае посредник вынужден повышать цены закупки ресурса и снижать цены продажи по сравнению с равновесными оценками p_i . Это приведет к необратимым потерям и уменьшит величину извлеченного капитала. Его максимально возможное значение E_τ окажется меньше, чем E_∞ . Их разность

$$\Delta E = (E_\infty - E_\tau) > 0$$

характеризует необратимость процесса ресурсообмена.

Потери извлеченного капитала (уменьшение прибыльности) по сравнению с равновесным процессом оценивает диссипация капитала:

$$\sigma = n(p, c)(p - c). \quad (62)$$

Величина диссипативных потерь определяется в случае скалярного ресурса как

$$\Delta F(\tau) = \int_0^\tau \sigma(t) dt = \int_0^\tau n(p, c)(p - c) dt. \quad (63)$$

Условие минимальной диссипации ресурсообмена. Рассмотрим обмен между посредником и ЭА и выясним, как менять цену продажи ресурса c , чтобы за

фиксированное время τ продать заданное количество ресурса ΔN с максимальной выручкой. Ясно, что тем же условиям будет отвечать и цена покупки ресурса у ЭА, если фирма стремится затратить как можно меньше капитала. И в том, и в другом случае объем капитала ЭА в конце процесса $M(\tau)$ должен быть минимален.

Задача формулируется как

$$\overline{M} = M(\tau) \rightarrow \min_{c(t)} \quad (64)$$

при условиях

$$\overline{N} = N(\tau) = N_0 - \Delta N, \quad (65)$$

$$\frac{dM}{dN} = -c, \quad (66)$$

$$\int_0^\tau dt = \int_{\overline{N}}^{N_0} \frac{dN}{n(p(N, M), c)} = \tau. \quad (67)$$

Здесь для перехода от dt к dN использована кинетическая зависимость

$$\frac{dN}{dt} = -n(p, c),$$

в которой поток n на интервале $(0, \tau)$ не обращается в нуль.

В задаче (64)–(67) требуется найти такую функцию $c^*(N)$, для которой прирост капитала ЭА окажется минимальным.

Запишем условия оптимальности для этой задачи в форме принципа максимума в предположении невырожденности решения ($\psi_0 = 1$):

функция Гамильтона

$$H = -\psi c + \lambda \frac{1}{n(c, p(N, M))};$$

уравнение для сопряженной переменной

$$\frac{d\psi}{dN} = -\frac{\partial H}{\partial M} = -\lambda \frac{\partial n / \partial p (\partial p / \partial M)}{n^2(c, p(N, M))}, \quad \psi(\overline{N}) = 0; \quad (68)$$

условие максимума по c для выпуклой вверх и дифференцируемой функции H

$$\frac{\partial H}{\partial c} = -\psi + \lambda \frac{\partial n / \partial c}{n^2(c, p(N, M))} = 0.$$

Исключая ψ с учетом (68) и сокращая λ , получим условие оптимальности закупок (продаж) — *условие минимальной диссипации процесса ресурсообмена*

$$\frac{d}{dN} \left[\frac{\partial n / \partial c}{n^2(p, c)} \right] = \frac{\partial n / \partial p \cdot (\partial p / \partial M)}{n^2(p, c)}, \quad (69)$$

которое определяет $c(N, M)$ с точностью до константы, вычисляемой из равенства (67).

В том случае, когда оценка ресурса p зависит только от его запаса N , а $\partial p / \partial M = 0$, условие (69) упрощается и примет форму

$$\frac{\partial n / \partial c}{n^2(p, c)} = \text{const}. \quad (70)$$

Так, для

$$n(p, c) = \alpha(c - p), \quad (71)$$

из условия (70) при продаже ресурса получим оптимальную цену для ограниченной продолжительности τ

$$c_\tau^*(N, \bar{N}) = p(N) - \frac{\bar{N} - N_0}{\alpha\tau}, \quad (72)$$

а вырученный при продаже капитал равен

$$E_\tau(\bar{N}) = E_\infty(\bar{N}) - \frac{(\bar{N} - N_0)^2}{\alpha\tau}, \quad (73)$$

где E_∞ — капитал, который фирма могла бы получить при $\tau \rightarrow \infty$, продавая ресурс по равновесным ценам $c(N) = p(N)$.

При $\tau < \tau^0 = \frac{\Delta N^2}{\alpha E_\infty}$ фирма вынуждена доплачивать покупателю. При $\tau^* = 2\tau^0$ средняя интенсивность прибыли $e(\tau) = \frac{E(\tau)}{\tau}$ максимальна и равна

$$e^* = \frac{\alpha}{4} \left[\frac{E_\infty(\bar{N} - N_0)}{\bar{N} - N_0} \right]^2. \quad (74)$$

Каждому значению τ соответствует интенсивность потока продаж. В частности, поток, соответствующий $\tau = \tau^0$, возникает при бесприбыльной продаже ресурса. Интенсивность продаж, соответствующая максимуму потока прибыли, в два раза ниже, чем интенсивность бесприбыльной продажи при линейной зависимости потока от разности цены и оценки.

Для кинетики ресурсообмена, линейной относительно разности цены и оценки, необратимые потери равны

$$\Delta E(\tau, \bar{N}) = \int_0^\tau \alpha(p(N) - c(N))^2 dt = \frac{(\bar{N} - N_0)^2}{\alpha\tau},$$

так что

$$E(\tau) = E_\infty(\bar{N}) - \Delta E(\tau, \bar{N}) = E_\infty(\bar{N}) - \int_0^\tau n(p, c)(p - c) dt. \quad (75)$$

Здесь под интегралом стоит диссипация капитала.

Выражение (75) справедливо для произвольной зависимости $n(p, c)$. Действительно, при переходе от dt к dN интеграл в (63) примет форму

$$\Delta E(\bar{N}) = E(\bar{N}) - E(N_0) = \int_{N_0}^{\bar{N}} (p(N) - c_\tau(N, \bar{N})) dN.$$

В свою очередь извлеченный капитал равен

$$E(\tau, \bar{N}) = \int_{N_0}^{\bar{N}} c_\tau(N, \bar{N}) dN, \quad E_\infty(\bar{N}) = \int_{N_0}^{\bar{N}} p(N) dN. \quad (76)$$

Из сравнения этих равенств следует выражение (75).

Таким образом, оптимальные процессы закупок (продаж) являются процессами минимальной диссипации.

В этом случае задача сводится к закупке (продаже) ресурса у каждого из экономических агентов, так чтобы получить максимальную прибыль. Это условие соответствует тому, что суммарный объём капитала ЭА в конце процесса $M(\tau)$ при заданных граничных условиях должен быть минимальным.

Процесс закупки (продажи) должен протекать оптимально с точки зрения извлечения (затрат) капитала, так что цена c и оценка ресурса p должны в любой момент времени удовлетворять условиям минимальной диссипации капитала. Объёмы закупок ΔN_i у каждой из k подсистем должны выбираться оптимально и удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^k \bar{N}_i = \sum_{i=1}^k N_{i0} \Rightarrow \sum_{i=1}^k \Delta N_i = 0. \quad (77)$$

Рынок совершенной конкуренции можно считать одной из подсистем, у которой оценка p_- не зависит от запасов ресурса и капитала, а значит, для любых зависимостей $n(c, p_-)$ оптимальная цена c при закупке и продаже на таком рынке должна быть неизменна во времени.

Сформулируем задачу:

Критерий оптимальности

$$\sum_{i=1}^k \bar{M}_i(\tau) \rightarrow \min_{c_i} \quad (78)$$

при условиях

$$\frac{dN_i}{dt} = -n_i(p_i, c_i), \quad N_i(0) = N_{i0}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (79)$$

$$\frac{dM_i}{dt} = -c_i n_i(p_i, c_i), \quad M_i(0) = M_{i0}, \quad i = \overline{1, k} \quad (80)$$

и условию (77).

Перейдём от dt к dN_i , используя зависимости (79), в которых потоки n_i на интервале $(0, \tau)$ не обращаются в ноль. Условия (79), (80) перепишутся как

$$\int_0^\tau dt = \int_{\bar{N}_i}^{N_{i0}} \frac{dN_i}{n_i(p_i(N_i, M_i), c_i)} = \tau, \quad i = \overline{1, k}, \quad (81)$$

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -c_i, \quad i = \overline{1, k}. \quad (82)$$

Решим задачу (77), (80), с учётом (81)-(82) в два этапа. На первом этапе задача об извлечении максимума капитала за ограниченное время в замкнутой микроэкономической системе сводится к решению k задач об оптимальных закупках (продажах) для каждой из подсистем при фиксированных начальных и конечных запасах ресурса (N_{i0} и $\bar{N}_i$). Максимальное количество полученного капитала (минимальное количество затраченного) $E_i(\tau)$ зависит от $\bar{N}_i$. На втором этапе найдём оптимальные значения $\bar{N}_i$ из условия

$$\sum_{i=1}^k E_i^*(\tau, \bar{N}_i) \rightarrow \max_{\bar{N}_i} \quad (83)$$

при условии (77), что приводит к равенству

$$\frac{\partial E_i^*(\tau, \bar{N}_i)}{\partial \bar{N}_i} = \Lambda, \quad i = \overline{1, k},$$

в котором значение Λ находят из (77).

С учётом выражения (76) получим

$$\frac{\partial E_i(\tau, \bar{N}_i)}{\partial \bar{N}_i} = c_{i\tau}(\bar{N}_i, \bar{N}_i) + \int_{N_{i0}}^{\bar{N}_i} \frac{\partial c_{i\tau}(N_i, \bar{N}_i)}{\partial \bar{N}_i} dN_i = \bar{c}_{i\tau}(\bar{N}_i). \quad (84)$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой оптимальную цену в момент τ , второе слагаемое корректирует эту цену. Оно определяется усреднённым значением чувствительности оптимальной цены к количеству реализованного ресурса. Выражение (84) назовём *скорректированной ценой*. Условие оптимального выбора объёмов закупок (продаж) примет форму равенства скорректированных цен для всех подсистем.

$$\bar{c}_{i\tau}(\bar{N}_i) = \Lambda, \quad i = \overline{1, k}. \quad (85)$$

Задача сильно упрощается, когда все подсистемы имеют постоянные оценки $p = const$, то есть являются экономическими резервуарами. Тогда условие оптимальности (85) приводит к равенствам

$$p_i - \frac{2}{\alpha_i \tau} (\bar{N}_i - N_{i0}) = \Lambda \rightarrow \Delta N_i = \frac{\alpha_i \tau}{2} (p_i - \Lambda). \quad (86)$$

Здесь приведенная цена $\bar{c}_{i\tau} = p_i - \frac{2}{\alpha_i \tau} (\bar{N}_i - N_{i0})$. Из условия (77) значение Λ равно средневзвешенной оценке ресурса

$$\Lambda = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i}{\sum_{i=1}^k \alpha_i},$$

а

$$\bar{N}_i^* = \frac{\tau \alpha_i}{2} \left(p_i - \frac{\sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu p_\nu}{\sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu} \right) + N_{i0}. \quad (87)$$

После подстановки в (86) $\bar{N}_i^*$ получим значение максимально возможного капитала $E_i(\tau, \bar{N}_i^*)$, который может быть извлечён из подсистемы за время τ . Прибыльность системы

$$E_\tau^* = \sum_{i=1}^k \left[p_i (\bar{N}_i^* - N_{i0}) - \frac{(\bar{N}_i^* - N_{i0})^2}{\alpha_i \tau} \right] = E_\infty^* - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^k \frac{\Delta N_i^{*2}}{\alpha_i}. \quad (88)$$

7. Заключение

Термодинамические системы физической и экономической природы имеют много общих черт как макросистемы, главным из которых является необратимость протекающих в них процессов. Очень важно для экономических систем ввести количественный показатель необратимости. Такой показатель – суммарная капитализация, в отличие от энтропии не является полным дифференциалом для систем, не содержащих валютной биржи. Существование функции благосостояния приводит к полезным соотношениям, связывающим оценки ресурсов, которые в свою очередь определяют кинетику процессов ресурсообмена.

Список литературы

1. *Петров А.А.* Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1996.
2. *Martinas K.* Irreversible Microeconomics, Intern. Onsager-Workshop. Leiden, 2000. P. 147-152.
3. *Lichnerowicz M., Lichnerowicz A.* Economie et Thermodynamique: Un Modele dechange economique // Economies et Societes. 1971. V. 5.
4. *Розоноэр Л.И.* Обмен и распределение ресурсов (обобщенный термодинамический подход). I-III // Автоматика и Телемеханика. 1973. № 5. С. 115-132; № 6. С. 65-79; № 8. С. 82-103.
5. *Розоноэр Л.И., Малишевский А.В.* Модель хаотического обмена ресурсами и аналогии между термодинамикой и экономикой // Всесоюзное совещание по проблемам управления: Рефераты докладов. 1971. С. 207-209.
6. *Цирлин А.М.* Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах. М.: Наука, 2008, 416 с.
7. *Амелькин С.А., Мартинаш К., Цирлин А.М.* Оптимальные процессы в необратимых термодинамических и микроэкономических системах // Автоматика и Телемеханика. 2002. №4. С. 3–25.

Mathematical models of economic systems with account of the irreversibility of processes proceeding in them

Tsirlin A.M.

Keywords: macro systems, irreversibility, thermodynamics, economics

In this paper we consider optimal trading processes in economic systems. The analysis is based on accounting for the irreversibility factor using the wealth function concept.

Сведения об авторе:

Цирлин Анатолий Михайлович,

ИЦ Системного анализа Института программных систем РАН,
главный научный сотрудник