

УДК 517.9

Фактор запаздывания и десинхронизация колебаний связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо

Глызин С. Д., Солдатова Е. А.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, lenochka_s24@mail.ru

получена 22 июля 2010

Ключевые слова: автоколебания, запаздывание в цепи связи, метод нормальных форм, бифуркации

Изучается динамика слабого взаимодействия пары близких осцилляторов типа ФитцХью–Нагумо, возникающих при моделировании электрического обмена импульсами между нервными клетками. В цепи связи между осцилляторами учтено запаздывание прохождения импульса. Локальными асимптотическими методами показано, что, несмотря на слабость взаимодействия, введение запаздывания приводит к существенным изменениям в сценарии фазовых перестроек. Соответствующий численный анализ позволил продемонстрировать, что введение подходящего запаздывания позволяет избежать ситуации, в которой сосуществуют устойчивый синхронный цикл и несинхронные колебания.

1. Постановка задачи

Проблема синхронизации и десинхронизации колебательных режимов в системах связанных осцилляторов представляется особенно насущной в области нейродинамики. Большое число явлений и процессов в нейронных ансамблях так или иначе связано либо с их одновременной активностью (синхронизм), либо со сложными процессами передачи импульсов, для которых попадание в синхронизм элементов системы ведет к крайне нежелательным последствиям, состоящим в потере функциональности системы. Так, по некоторым наблюдениям, ряд болезненных состояний нервной системы (например, при болезни Паркинсона) связан с синхронизацией некоторых ансамблей в нервной системе. Данное обстоятельство объясняет интерес к задаче о по возможности простых способах десинхронизации устойчивых колебательных режимов. Одним из наиболее очевидных и напрашивающихся способов является одномоментное внешнее воздействие, выводящее динамическую систему из области притяжения синхронного режима. Другой способ связан с изменением собственных характеристик входящих в систему осцилляторов. Первый из этих

¹Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (государственные контракты №02.740.11.0197 и П 11 от 11.03.10).

двух методов ограничен тем, что система после, возможно длительного, переходного процесса может возвратиться к синхронным колебаниям. Второй из методов обычно трудно реализовать, поскольку он требует индивидуального доступа к отдельным элементам системы. Имеется, наконец, третий способ воздействия, связанный с изменениями в системе связи. При этом увеличение или уменьшение пропускной способности грозит потерей функциональности системы, тогда как внесение, а точнее, некоторое увеличение задержек, которые и так присутствуют в системе, может оказаться эффективным способом десинхронизации колебаний.

В настоящей работе на примере пары осцилляторов ФитцХью–Нагумо с запаздывающей электрической связью локальными асимптотическими методами показано, что изменение запаздывания в цепи связи приводит к сокращению или уничтожению области устойчивости однородного (синхронного) режима при сохранении пропускной способности линии связи.

В качестве парциального осциллятора, моделирующего динамику уединенной нервной клетки, будем использовать предложенную ФитцХью и Нагумо [1, 2] систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= v - \frac{1}{3}v^3 - w + I, \\ \dot{w} &= p(v + a - bw),\end{aligned}\tag{1}$$

в которой $v(t)$ — нормированный мембранный потенциал, переменная $w(t)$ моделирует ток активации, а параметр I — постоянный ток.

Система (1) является упрощением модели Ходжкина–Хаксли [3], которая с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений математически описывает процесс формирования нервного импульса. Основываясь на ряде экспериментов, проведенных на аксонах гигантского кальмара, Ходжкин и Хаксли [3] построили первую количественную модель электрической возбудимости нейронов. Она описывает 3 основных ионных потока: поток натрия, поток калия и независимый от времени поток утечки.

В целях изучения динамики ассоциаций нейроподобных систем рассмотрим простейшую из них, т.е. возьмем пару слабо связанных осцилляторов типа ФитцХью–Нагумо, в которой учтена конечность времени прохождения импульса по цепи связи между ними

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= v_1 + v_* - \frac{(v_1 + v_*)^3}{3} - (w_1 + w_*) + I + \varepsilon D(v_2(t-h) - v_1), \\ \dot{w}_1 &= p(v_1 + v_* + a - b(w_1 + w_*)), \\ \dot{v}_2 &= v_2 + v_* - \frac{(v_2 + v_*)^3}{3} - (w_2 + w_*) + I + \varepsilon D(v_1(t-h) - v_2), \\ \dot{w}_2 &= p(v_2 + v_* + a - b(w_2 + w_*)).\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь $v_1(t)$, $v_2(t)$ — нормированные мембранные потенциалы; переменные $w_1(t)$, $w_2(t)$ моделируют ток активации, а параметр I — постоянный ток. В системе (2) начало координат сдвинуто в точку ненулевого состояния равновесия $(v_*, u_*)^T$. Кроме того, параметр a системы (2) выбран близким к критическому значению для колебательной потери устойчивости этого состояния равновесия так, что $a = a_{\text{кр}} - \varepsilon$,

где

$$a_{\text{кр}} = bI + \frac{1}{3}\sqrt{1-pb}(3-pb^2-2b). \quad (3)$$

Параметр надкритичности ε считается малым положительным.

При критическом значении параметра a компоненты состояния равновесия $(v_*, u_*)^T$ допускают следующее простое представление:

$$v_* = -\sqrt{1-pb}, \quad w_* = \frac{1}{b}(a_{\text{кр}} - \sqrt{1-pb}).$$

Величина εD ($D > 0$) характеризует связь между нервными клетками. Отметим, что эта связь пропорциональна малому параметру ε и содержит запаздывание h .

Наша задача на основе локального асимптотического анализа и иллюстрирующего его численного эксперимента исследовать характер изменения сценариев фазовых перестроек системы. Кроме того, отдельно исследуется задача о сосуществовании однородного (синхронного) и неоднородных режимов.

Задача (2) изучалась ранее в ряде статей (см., например, [4, 5]), однако в основном применялись методы большого параметра либо численные методы.

2. Построение нормальной формы

В целях получения нормальной формы системы (2) воспользуемся стандартным алгоритмом (см., например, [6]). Для этого выполним следующую замену:

$$(v_j, w_j)^T = \sqrt{\varepsilon} \left(\xi_j(s) \mathbf{a} e^{i(\omega_0 t + \psi_j(s))} + \bar{\xi}_j(s) \bar{\mathbf{a}} e^{-i(\omega_0 t + \psi_j(s))} \right) + \varepsilon u_{1j}(s, t) + \varepsilon^{3/2} u_{2j}(s, t) + \dots, \quad (4)$$

где $j = 1, 2$, $s = \varepsilon t$, $\mathbf{a} = (1, pb - i\sqrt{p - p^2 b^2})^T$ – собственный вектор матрицы линейной части каждого из осцилляторов, соответствующий собственному числу $i\omega_0$, где $\omega_0 = \sqrt{p - p^2 b^2}$. В этом случае на третьем шаге алгоритма из условий разрешимости задач для $u_{2j}(s, t)$ в классе периодических функций получим следующую нормальную форму:

$$\begin{aligned} z_1' &= \varphi z_1 + d|z_1|^2 z_1 + c(z_2 e^{-i\omega_0 h} - z_1), \\ z_2' &= \varphi z_2 + d|z_2|^2 z_2 + c(z_1 e^{-i\omega_0 h} - z_2), \end{aligned} \quad (5)$$

где штрихом обозначена производная по s , а параметры φ , d и c определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + i\psi_0 = \frac{1}{pb^2 - 1} \sqrt{\frac{1-pb}{p - p^2 b^2}} (ipb - \sqrt{p - p^2 b^2}), \\ d &= d_0 + ic_0 = \frac{1}{2} + \frac{1-b}{pb^2 - 1} + i \frac{\sqrt{p - p^2 b^2} (-4 + bp(7 + 3b(-2 + pb)))}{6p(pb^2 - 1)^2}, \\ c &= ke^{i\delta} = D \left(\frac{1}{2} - \frac{ipb}{2\sqrt{p - p^2 b^2}} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Произведем в нормальной форме (5) некоторые стандартные замены и перейдем к системе с амплитудными и фазовыми переменными. Положим в (5)

$z_j = \sqrt{-\frac{\varphi_0}{d_0}} \xi_j e^{i\varphi_j}$ ($j = 1, 2$) и заменим время $\varphi_0 s \rightarrow s$. Тогда для переменных ξ_1, ξ_2 и $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned}\xi_1' &= \left(1 - \frac{k}{\varphi_0} \cos \delta - \xi_1^2\right) \xi_1 + \frac{k}{\varphi_0} \xi_2 \cos(\alpha + \delta - \omega_0 h), \\ \xi_2' &= \left(1 - \frac{k}{\varphi_0} \cos \delta - \xi_2^2\right) \xi_2 + \frac{k}{\varphi_0} \xi_1 \cos(-\alpha + \delta - \omega_0 h), \\ \alpha' &= -\frac{c_0}{d_0} (\xi_2^2 - \xi_1^2) + \frac{k}{\varphi_0} \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(-\alpha + \delta - \omega_0 h) - \frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\alpha + \delta - \omega_0 h) \right).\end{aligned}\quad (7)$$

В системе (7) положим $b_0 = c_0/d_0$ и $\delta^* = \delta - \omega_0 h$. Кроме того, выполним замену $\xi_j \rightarrow \theta \xi_j$ и $\theta^2 s \rightarrow s$, где $\theta = \sqrt{1 - k(\cos \delta - \cos \delta^*)}$. В этой ситуации при дополнительном условии

$$1 - k(\cos \delta - \cos \delta^*) > 0 \quad (8)$$

приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned}\xi_1' &= (1 - \varkappa \cos \delta^* - \xi_1^2) \xi_1 + \varkappa \xi_2 \cos(\alpha + \delta^*), \\ \xi_2' &= (1 - \varkappa \cos \delta^* - \xi_2^2) \xi_2 + \varkappa \xi_1 \cos(-\alpha + \delta^*), \\ \alpha' &= -b_0 (\xi_2^2 - \xi_1^2) + \varkappa \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(-\alpha + \delta^*) - \frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\alpha + \delta^*) \right),\end{aligned}\quad (9)$$

где $\varkappa = \frac{k}{\varphi_0 \theta^2}$. Отметим, что параметр $\delta^* = \delta - \omega_0 h$ при изменении запаздывания h может принимать значения в широком диапазоне.

3. Анализ нормальной формы

Система (9) изучалась ранее в [7] аналитическими и численными методами, причем было показано, что при изменении параметра $\varkappa$, пропорционального коэффициенту связи D , возможны различные сценарии фазовых перестроек в системе (2). В [7] приведена теорема о соответствии, которая связывает грубые устойчивые режимы системы (5) с соответствующими устойчивыми режимами у исходной системы.

Теорема о соответствии. *Предположим, что система (5) имеет некоторый экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный цикл (тор). Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ исходная система (2) имеет цикл (двумерный инвариантный тор) с теми же свойствами устойчивости, асимптотика которого задается формулами (4).*

Для системы (9) в [7] было определено разбиение ее плоскости параметров b_0 и δ на области с различными сценариями фазовых перестроек. На рисунке 1 это разбиение определяется кривыми с номерами от 1 до 6. В частности, кривая с номером 1 представляет собой график зависимости $b_0 = -\operatorname{ctg} \delta$. Для значений b_0 и δ , расположенных ниже этой кривой, состояние равновесия $(1, 1, 0)^T$ устойчиво при любом положительном $\varkappa$. Кривые под номерами два и три разбивают плоскость параметров таким образом, что для значений b_0 и δ^* между кривыми два и три система (9) имеет при $\varkappa > \varkappa_{\text{кр}}$ неоднородные состояния равновесия A, B, C, D , а для других областей таких докритических состояний нет. На кривой, отмеченной числом четыре,

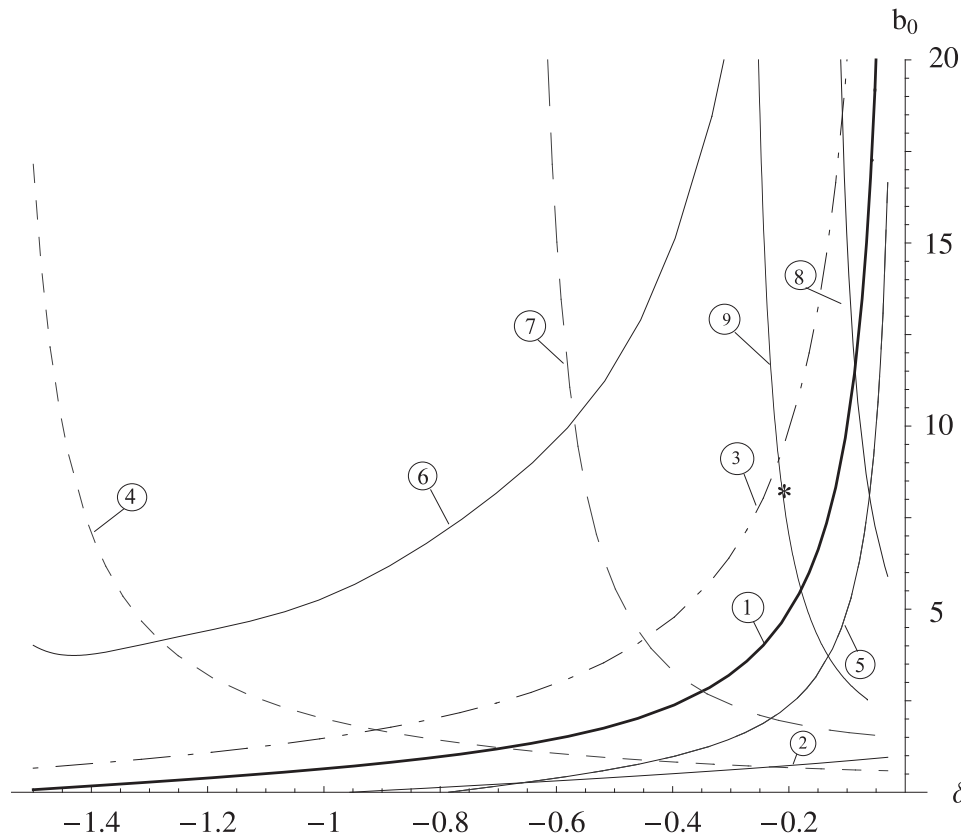


Рис. 1.

лежат значения параметров, при которых равна нулю вещественная часть ляпуновской величины, вычисленной для неоднородного состояния равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ в критической точке потери устойчивости ($\varkappa = \varkappa_{\pi,2}$), это означает, что при значениях b и δ^* выше этой кривой при увеличении $\varkappa$ рождается устойчивый цикл, а ниже нее в состоянии равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ стягивается неустойчивый цикл. Кривая под номером пять представляет собой функцию $b = -\text{ctg}2\delta^*$, для значений b и δ^* выше этого графика состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ теряет устойчивость колебательным образом. Кривая шесть соответствует равенству нулю вещественной части ляпуновской величины, вычисленной для симметричных состояний равновесия A и B , поэтому для значений b_0 и δ^* ниже этой кривой состояния A и B мягко теряют устойчивость с рождением устойчивых циклов C_A и C_B , а выше этой кривой в состояния A и B стягиваются неустойчивые циклы и потеря устойчивости происходит жестко.

Формулы (6) позволяют при известных p , h и b определить значения величин b_0 и δ^* . В связи с этим удобно, зафиксировав величины p и h и изменяя b , построить параметрически заданную равенствами (6) кривую на плоскости δ^* , b_0 . Числами 7, 8 и 9 обозначены кривые, получающиеся при $h = 0$ и $p = 0.8$, $p = 0.08$ и $p = 0.27$ соответственно.

Если в свою очередь зафиксировать параметр $p = 0.27$, то при $h = 0$, $h = 0.287$ и $h = 0.747$ могут быть получены кривые 10, 11 и 12 соответственно (эти линии изображены на рис. 2). На кривой 10 буквами A^0 и B^0 обозначены точки, в которых

она пересекает линии 1 и 3. На кривой 11 точки, соответствующие тем же значениям параметра b , обозначены A' и B' . Запаздывание для линии 11 подобрано так, чтобы точка A' попала на кривую 3. Тем самым, за счет подходящего выбора запаздывания весь участок кривой 10, лежащий между кривыми 1 и 3, переходит в области с существенно иными сценариями фазовых перестроек.

Приведем примеры различных сценариев фазовых перестроек при изменении бифуркационного параметра κ . Выберем значение $b = 0.3823$, для которого при $h = 0$ параметры системы (9) оказываются равными $\delta^* = -0.2$, $b_0 = 8.33954$, соответственно при $h = 0.287$ и том же значении b имеем $\delta^* = -0.3461$, $b_0 = 8.33954$. Соответствующие точки на кривых 10, 11 отмечены звездочками.

Для запаздывания $h = 0$ и значений параметров $\delta^* = -0.2$, $b_0 = 8.33954$ имеем для системы (9) следующий сценарий фазовых перестроек:

1. При значениях параметра $\kappa > \kappa_{AB} \approx 0.8535$ глобально устойчиво единственное состояние равновесия $\xi_1 = \xi_2 = 1$, $\alpha = 0$ (соответствует пространственно однородному периодическому режиму у исходной системы (2)).

2. При $\kappa = \kappa_{AB}$ из «воздуха» рождается две пары симметричных состояний равновесия: две устойчивые точки $A = (\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha_1^*)^T$ и $B = (\xi_2^*, \xi_1^*, -\alpha_1^*)^T$, где $\xi_1^* > \xi_2^*$, $0 < \alpha_1^* < \pi/2$, и две неустойчивые — $C = (\eta_1^*, \eta_2^*, \alpha_2^*)^T$ и $D = (\eta_2^*, \eta_1^*, -\alpha_2^*)^T$, где $\eta_1^* > \eta_2^*$, $0 < \alpha_2^* < \pi/2$, кроме того, считаем, что $|\eta_j^* - \xi_j^*| \rightarrow 0$, $(j = 1, 2)$, $|\alpha_1^* - \alpha_2^*| \rightarrow 0$ при $\kappa \rightarrow \kappa_{AB} - 0$. Полученные состояния равновесия соответствуют несинхронизированным периодическим режимам у исходной системы. Состояния равновесия A и B устойчивы при уменьшении параметра κ вплоть до значения κ_C .

3. При $\kappa = \kappa_C \approx 0.8$ симметричные состояния A и B теряют устойчивость с рождением устойчивых циклов C_A и C_B (бифуркация Андронова–Хопфа).

4. При $\kappa = \kappa_{кр.} = -\cos \delta^* - b \sin \delta^* \approx 0.67674$ неустойчивые неподвижные точки C и D сливаются с однородным состоянием равновесия и отбирают его устойчивость.

5. При $\kappa < \kappa_{\pi 1} = \frac{1}{2 \cos \delta^*} \approx 0.5102$ рождается неустойчивое состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$, где $\xi^* = \sqrt{1 - 2\kappa \cos \delta^*}$ (соответствует колебаниям в противофазе у исходной системы (2)).

6. Дальнейшее уменьшение параметра κ приводит к тому, что устойчивые циклы C_A и C_B , родившиеся из неподвижных точек A и B , увеличиваются в размерах до

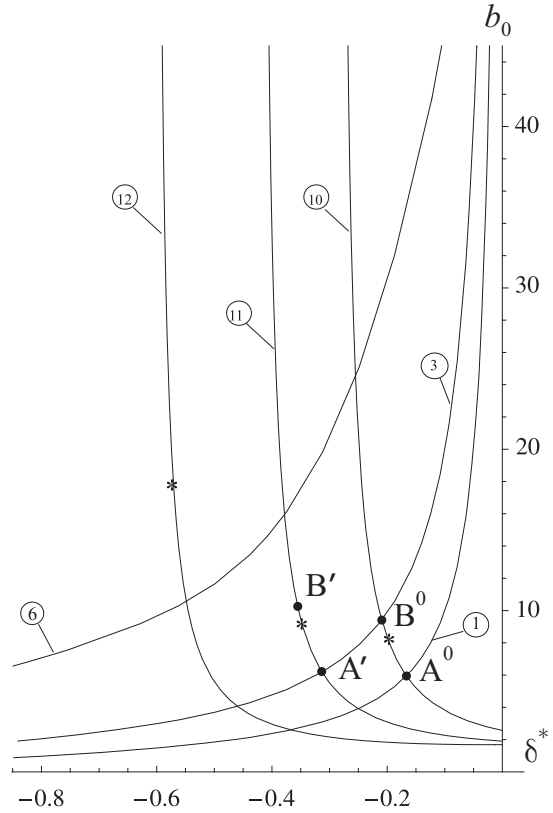


Рис. 2.

тех пор, пока при $\kappa = \kappa_S \approx 0.5042$ не сомкнутся в точке $\xi_1 = \xi_2 = 1, \alpha = 0$ (обратная бифуркация расщепления сепаратрис). В результате происходит объединение двух циклов C_A и C_B в один C_U .

7. Устойчивый цикл C_U стягивается к неустойчивому состоянию равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ и при $\kappa = \kappa_{\pi 2} \approx 0.254$ сливается с ним, делая неоднородное состояние равновесия устойчивым.

8. Наконец, при $0 < \kappa < \kappa_{\pi 2}$ система (9) имеет единственное, глобально устойчивое состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$, соответствующее колебаниям в противофазе исходной системы.

Отметим, что продемонстрированный сценарий фазовых перестроек остается тем же на всем промежутке изменения параметров системы (9), соответствующих области плоскости δ^*, b_0 , лежащей между кривыми 1 и 3. Пункты 4, 5 сценария позволяют утверждать, что при $\kappa_C < \kappa < \kappa_{кр.}$ у нормальной формы (9) сосуществуют устойчивое однородное состояние равновесия и два симметричных орбитально устойчивых цикла. Тем самым, из сформулированной выше теоремы о соответствии выводим, что у исходной системы (2) также сосуществуют устойчивый синхронный цикл и пара симметричных двухмерных торов.

Для запаздывания $h = 0.287$ и того же, что и в предыдущем случае, значения $b = 0.3823$ имеем следующие коэффициенты нормальной формы (9): $\delta^* \approx -0.3461$, $b_0 \approx 8.3395$. Опишем сценарий фазовых перестроек, реализующийся в этом случае.

1. Система не имеет докритических устойчивых режимов и при $\kappa > \kappa_{кр.} = -\cos \delta^* - b \sin \delta^* \approx 1.8883$ однородное состояние равновесия $\xi_1 = \xi_2 = 1, \alpha = 0$ глобально устойчиво.

2. При $\kappa = \kappa_{кр.}$ от однородного состояния равновесия ответвляется пара устойчивых состояний A и B , наследующих его устойчивость.

3. При $\kappa = \kappa_C \approx 0.926$ состояния равновесия A и B теряют устойчивость с рождением устойчивых циклов C_A и C_B (бифуркация Андронова–Хопфа).

4. Дальнейшее уменьшение параметра κ приводит к тому, что устойчивые циклы C_A и C_B , родившиеся из неподвижных точек A и B , увеличиваются в размерах до тех пор, пока при $\kappa = \kappa_S \approx 0.639$ не сомкнутся в точке $\xi_1 = \xi_2 = 1, \alpha = 0$ (обратная бифуркация расщепления сепаратрис). В результате происходит объединение двух циклов C_A и C_B в один C_U .

5. При $\kappa < \kappa_{\pi 1} \approx 0.5315$ добавляется неустойчивое состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$, где $\xi^* = \sqrt{1 - 2\kappa \cos \delta^*}$ (соответствует колебаниям в противофазе у исходной системы (2)).

6. Устойчивый цикл C_U стягивается к неустойчивому состоянию равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ и при $\kappa = \kappa_{\pi 2} \approx 0.266$ сливается с ним, делая неоднородное состояние равновесия устойчивым.

7. Наконец, при $0 < \kappa < \kappa_{\pi 2}$ система (9) имеет единственное, глобально устойчивое состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$, соответствующее колебаниям в противофазе исходной системы.

Особо отметим, что в данном случае с однородным состоянием равновесия не могут сосуществовать другие устойчивые режимы нормальной формы (9) и при $\kappa > \kappa_{кр.}$ однородное состояние равновесия глобально устойчиво.

Дальнейшее увеличение параметра h может привести к выходу в область пара-

метров выше кривой 6. Сценарий фазовых перестроек системы (9) в данном случае несколько сложнее описанного выше. В него входят все фазовые перестройки, кроме пункта 4, в котором бифуркация расщепления сепаратрис приводит к возникновению хаотических колебаний. В соответствии со статьей [7] в системе (9) реализуется каскад каскадов бифуркаций удвоения так, что по прошествии каждого из каскадов в системе наблюдается хаотический аттрактор. Нам, впрочем, от этого сценария нужно лишь отсутствие докритических колебаний, указанные же сложные колебательные режимы реализуются здесь в относительно узком интервале изменения λ .

Итак, уже на данном этапе мы можем сформулировать простой способ ухода из области, где сосуществуют устойчивые синхронные периодические колебания и более сложные несинхронные режимы. Как оказалось, для этого достаточно увеличить подходящим образом параметр запаздывания.

Приведенные результаты в силу теоремы о соответствии носят локальный характер, кроме того, неизвестно, насколько должно быть мало значение ε_0 , ограничивающего изменение бифуркационного параметра. Тем самым, встает вопрос о границах применимости локальной теории. Эту задачу можно частично решить, проводя численный эксперимент. Учитывая, что нам известны критические значения параметров, вычисления могут проиллюстрировать применимость или не применимость локальных методов при конкретных значениях параметров.

4. Численный анализ исходной модели

Перейдем к численному анализу исходной системы (2). Рассмотрим сначала случай нулевого запаздывания $h = 0$, будем, кроме того, считать, как и для приведенного выше локального анализа, $p = 0.27$, $b = 0.3823$, тогда формула (3) при $I = 1$ дает следующее критическое значение бифуркационного параметра: $a_{кр.} \approx 1.07547$.

Выполненные вычисления показали, что фазовые перестройки, полученные для нормальной формы системы, сохраняются при увеличении параметра надкритичности ε . Зафиксируем $\varepsilon = 0.02$, тогда при изменении параметра связи D имеем следующие фазовые перестройки:

1. При $D > D_{AB} \approx 0.13792$ устойчив только однородный цикл;
2. При $D_{AB} < D < D_{кр.} \approx 0.0559$ однородный устойчивый периодический режим сосуществует с двумя симметричными устойчивыми циклами;
3. При $D = D_{кр.}$ однородный цикл жестко теряет устойчивость, у системы остаются устойчивыми два цикла;
4. При $D = D_C \approx 0.0307$ от каждого из пары симметричных устойчивых циклов ответвляется устойчивый тор;
5. При $D = D_S \approx 0.023$ симметричные торы объединяются в один самосимметричный устойчивый тор;
6. При $D = D_{\pi 2} \approx 0.0089$ устойчивый самосимметричный тор стягивается в цикл, соответствующий колебаниям в противофазе;
7. Наконец, при $D < D_{\pi 2}$ устойчивы только колебания в противофазе.

Изменение параметра запаздывания приводит к изменению сценария фазовых перестроек, в частности при сохранении приведенных выше значений параметров и увеличении запаздывания до $h = 0.287$ происходит переход к новому сценарию, который определяется следующей последовательностью бифуркаций:

1. При $D > D_{кр.} \approx 0.161$ устойчив только однородный цикл;
2. При $D = D_{кр.}$ однородный цикл теряет устойчивость и от него ответвляются два симметричных друг другу устойчивых цикла;
3. При $D = D_C \approx 0.034$ от циклов ответвляется пара устойчивых торов;
4. При $D = D_S \approx 0.0206$ симметричные торы объединяются в один самосимметричный устойчивый тор;
5. При $D = D_{\pi_2} \approx 0.0095$ устойчивый самосимметричный тор стягивается в цикл, соответствующий колебаниям в противофазе;
6. При $D < D_{\pi_2}$ устойчивы только колебания в противофазе.

Нетрудно видеть, что у исходной системы, как и ее нормальной формы, увеличение параметра h приводит к изменению сценария фазовых перестроек. Наиболее же важным для нас результатом является тот факт, что подходящее увеличение запаздывания позволяет при тех же или близких значениях параметра связи перейти к ситуации, в которой синхронные колебания не могут сосуществовать с периодическими или квазипериодическими несинхронными режимами. Данный результат смыкается с полученным в [8] для другой системы, также моделирующей взаимодействие связанных осцилляторов из нейродинамики.

Список литературы

1. *FitzHugh R.* Threshold and plateaus in the Hodgkin-Huxley nerve equations // The Journal of General Physiology. 1960. V. 43. P. 867–896.
2. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc IRE. 1962. V. 50. P. 2061–2070.
3. *Hodgkin A. L., Huxley A. F.* A quantitative description of membrane current and application to conduction and excitation in nerve // Journal Physiol. 1952. V. 117. P. 500–544.
4. *Aronson D. G., Ermentrout G. B., Kopell N.* Amplitude Response of Coupled Oscillators // Physica D. 1990. V. 41. P. 403–449.
5. *Terman D., Kopell N., Bose A.* Dynamics of two mutually coupled slow inhibitory neurons // Physica D. 117. 1998. P. 241–275.
6. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю.* Локальные методы анализа динамических систем: учебное пособие. Ярославль, 2006. 92 с.
7. *Глызин С. Д.* Сценарии фазовых перестроек одной конечноразностной модели уравнения “реакция-диффузия” // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 805–811.
8. *Глызин С. Д., Киселева Е. О.* Учет запаздывания в цепочке связи между осцилляторами // Моделирование и анализ информационных систем. Т. 17, № 2. С. 140–150.

The factor of delay in a system of coupled oscillators FitzHugh – Nagumo

Glyzin S. D., Soldatova E. A.

Keywords: autooscillations, delay, normal form method, bifurcations

The dynamics of two weakly coupled close oscillators FitzHugh – Nagumo occurring in the simulation of the electric impulse exchange between nerve cells is considered. The delay in a connecting element between two oscillators is taken into account. Despite of the weakness of interaction, it is shown by local asymptotic methods that the introduction of a delay leads to significant changes in the script of phase reconstructions. The corresponding numerical analysis allows us to demonstrate that the introduction of the appropriate delay let us avoid the situation of the coexistence of a stable synchronous cycle and nonsynchronous oscillations.

Сведения об авторах:

Глызин Сергей Дмитриевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей;

Солдатова Елена Александровна,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант