Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **4** (2014) 148–180

УДК 512.543

Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп

Туманова Е. А.

Ивановский государственный университет
153025 Россия, г. Иваново, ул. Ермака, 39

e-mail: helenfog@bk.ru

получена 25 июня 2014

Ключевые слова: HNN-расширение, корневой класс групп, аппроксимируемость корневыми классами групп

Пусть $\mathcal{K}$ — произвольный корневой класс групп (это означает, что $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну неединичную группу, замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей и удовлетворяет условию Грюнберга: если $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X такой, что фактор-группы X/Y и Y/Z принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и фактор-группа X/T принадлежит классу $\mathcal{K}$). В данной статье исследуются условия аппроксимируемости классом $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$-аппроксимируемости) частного случая общей конструкции HNN-расширения, когда связанные подгруппы совпадают. Пусть $G = (B,\ t;\ t^{-1}Ht = H,\ \varphi)$. В случае, когда $B \in \mathcal{K}$ и подгруппа H нормальна в группе B, автором получено достаточное условие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G, которое становится и необходимым, если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации (т. е. взятия гомоморфных образов). Также установлены критерии $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G при условии, что класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, группа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема, а подгруппа H нормальна в группе B и удовлетворяет хотя бы одному из следующих ограничений: группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ всех автоморфизмов подгруппы H, представляющих собой ограничения на эту подгруппу всевозможных внутренних автоморфизмов группы G, является абелевой; группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна; автоморфизм φ совпадает с ограничением на подгруппу H некоторого внутреннего автоморфизма группы B; подгруппа H конечна; подгруппа H является бесконечной циклической; подгруппа H имеет конечный ранг Гирша–Зайцева (т. е. обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой). Кроме того, найдено достаточное условие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G в случае, когда группа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема, а подгруппа H является ее ретрактом (в этом утверждении класс $\mathcal{K}$ не обязан быть замкнутым относительно факторизации).

Введение

Исследования аппроксимационных свойств HNN-расширений групп, начатые в работах [27] и [31], и по сей день не утратили свою актуальность. Наиболее изученным среди данных свойств HNN-расширений является финитная аппроксимируемость. Результаты, полученные в этом направлении, представлены в статьях [4], [17], [24], [25], [27], [31], [37]. Исследования аппроксимируемости HNN-расширений конечными p-группами проводились в работах [11], [14], [15], [16], [20], [26], [35], [36], [38], [42]. В [15], [26] и [38] были установлены соответствующие критерии. Кроме того, в статьях [7] и [22] получены некоторые результаты по аппроксимируемости HNN-расширений конечными π-группами.

В перечисленных выше работах рассматривается общий случай конструкции HNN-расширения групп, когда обе связанные подгруппы отличны от базовой группы и друг от друга. Если же одна из связанных подгрупп HNN-расширения совпадает с базовой группой, то такое HNN-расширение называется нисходящим (или восходящим). Финитная аппроксимируемость и аппроксимируемость конечными p-группами нисходящих HNN-расширений изучались в работах [18], [34], [39] и [3], [30] соответственно. Следует также отметить, что если и вторая связанная подгруппа совпадает с базовой группой, то HNN-расширение превращается в расщепляемое расширение базовой группы при помощи бесконечной циклической группы, порожденной проходной буквой. Общие условия финитной аппроксимируемости расщепляемых расширений были указаны А.И. Мальцевым в работе [13]. Недавно эти результаты были усилены и обобщены Д.Н. Азаровым [2].

В данной работе рассматривается другой частный случай HNN-расширения, когда связанные подгруппы совпадают и отличны от базовой группы. Автором получены как необходимые, так и достаточные условия аппроксимируемости HNN-расширений указанного вида замкнутыми относительно факторизации, а также произвольными корневыми классами групп.

Напомним, что если $\mathcal{L}$ — некоторый класс групп, то группа X называется аппроксимируемой классом групп $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $x \in X$ существует гомоморфизм σ группы X на некоторую группу из класса $\mathcal{L}$ такой, что образ элемента x относительно гомоморфизма σ отличен от 1.

Следуя К. Грюнбергу [33], содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп $\mathcal{K}$ будем называть корневым, если выполняются следующие три условия.

1. Если группа X принадлежит классу $\mathcal{K}$ и Y — подгруппа группы X, то группа Y также принадлежит классу $\mathcal{K}$.

2. Прямое произведение любых двух групп из класса $\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

3. Условие Грюнберга: если $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X такой, что фактор-группы X/Y и Y/Z принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и фактор-группа X/T принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Более понятная характеризация корневых классов групп была дана Е. В. Соколовым [40]. Он установил, что наследственный (т. е. замкнутый относительно взятия подгрупп) класс групп является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно декартовых сплетений.

Заметим, что каждый из перечисленных выше классов групп является замкнутым относительно факторизации корневым классом, а потому проведенные в данной работе исследования автора помогут не только установить взаимосвязь между имеющимися на данный момент результатами, но и обобщить некоторые из них.

Пусть B — некоторая группа, H и K — изоморфные подгруппы группы B, $\varphi\colon H \to K$ — некоторый изоморфизм подгрупп, $G = (B,\ t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi)$ — HNN-расширение группы B с проходной буквой t и подгруппами H и K, связанными относительно изоморфизма φ (используемые здесь и далее обозначения и термины согласованы с монографией [12]). Как уже было сказано выше, в данной работе рассматривается частный случай общей конструкции HNN-расширения, когда связанные подгруппы H и K совпадают. Понятно, что изоморфизм φ при этом превращается в автоморфизм подгруппы H.

Все введенные в предыдущем абзаце обозначения предполагаются фиксированными до конца изложения. Условие $H = K$ также будем считать выполненным всюду, за исключением параграфа 2.

По-видимому, первое исследование аппроксимируемости произвольным корневым классом $\mathcal{K}$ HNN-расширений групп предпринято в работе Д. Тьеджо [41]. Он установил критерий аппроксимируемости классом $\mathcal{K}$ HNN-расширения $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы с совпадающими связанными подгруппами при условии, что φ — тождественное отображение. Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений групп также изучалась в работах [5] и [8].

В работе [22] автором показано, что определенная выше группа G представляет собой свободное произведение базовой группы B и подгруппы HNN-расширения G, порожденной связанной подгруппой H и проходной буквой t, с объединенной подгруппой H. Это замечание позволяет свести вопрос об аппроксимируемости корневым классом $\mathcal{K}$ HNN-расширения G к рассмотренной ранее автором задаче о $\mathcal{K}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой.

Сформулируем полученные результаты. Чтобы сократить число условий в них, с этого момента и до конца введения будем считать, что $\mathcal{K}$ — корневой класс групп.

Теорема 1. *Пусть B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, H — ретракт в группе B.*

1. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

2. Пусть класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — конечная группа. Если $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Если, кроме того, класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, то верно и обратное: из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G следует, что группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

В формулировке данной теоремы и всюду далее, если X — некоторая группа и x — ее произвольный элемент, то $\langle x\rangle$ обозначает циклическую подгруппу группы X, порожденную элементом x.

Следствие 1. *Пусть $E(n) = \langle a, b, t;\ a^{-1}ba = b^n,\ t^{-1}at = a^{-1}\rangle$ $(n \neq 0)$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Группа $E(n)$ аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.

2. Группа $E(n)$ аппроксимируется классом $\mathcal{FS}_\pi$ конечных разрешимых π-групп тогда и только тогда, когда $2 \in \pi$ и существует такое π-число $s > 1$, что $(s, n) = 1$ и порядок элемента $\bar{n}$ группы $\mathbb{Z}_s$ также является π-числом.

3. Группа $E(n)$ аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда $p = 2$ и число n нечетно.

Заметим, что если X — некоторая группа, Y — ее нормальная подгруппа, то ограничение на подгруппу Y любого внутреннего автоморфизма группы X оказывается автоморфизмом группы Y. Множество $\mathrm{Aut}_X(Y)$ всех таких автоморфизмов является подгруппой группы $\mathrm{Aut}\,Y$ всех автоморфизмов группы Y.

Во всех приводимых далее утверждениях подгруппа H является нормальной в B. При таком условии она оказывается нормальной и в G. Это позволяет рассмотреть группу $\mathrm{Aut}_G(H)$, которая, как легко видеть, порождается своей подгруппой $\mathrm{Aut}_B(H)$ и автоморфизмом φ.

Теорема 2. *Пусть B — $\mathcal{K}$-группа, H — нормальная подгруппа группы B. Если $B/H, \mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, то существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе B, и, в частности, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то данная теорема превращается в критерий, формулируемый следующим образом.

Следствие 2. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, B — $\mathcal{K}$-группа, H — нормальная подгруппа группы B. Тогда следующие два утверждения равносильны и при выполнении любого из них группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

1. Существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе B.

2. Группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Из приведенного следствия вытекает, например, что если π — произвольное множество простых чисел и B — конечная π-группа, то группа G аппроксимируется конечными π-группами тогда и только тогда, когда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является π-группой.

В нижеследующих утверждениях группа B уже не обязательно принадлежит классу $\mathcal{K}$, а $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G исследуется при различных условиях, накладываемых на подгруппу H и группу ее автоморфизмов. В теореме 3 и ее следствиях таким условием является конечность группы $\mathrm{Aut}_G(H)$, в теореме 4 и ее следствиях — абелевость группы $\mathrm{Aut}_G(H)$, в теореме 5 — совпадение автоморфизма φ с некоторым элементом группы $\mathrm{Aut}_B(H)$. Рассматриваются также случаи, когда подгруппа H является конечной (теорема 6 и ее следствие), бесконечной циклической (теорема 7 и ее следствие) или имеет конечный ранг Гирша–Зайцева (теорема 8 и ее следствие). Чтобы сформулировать перечисленные утверждения, введем ряд обозначений и напомним некоторые известные понятия.

Если $\mathcal{L}$ — некоторый, не обязательно корневой, класс групп, X — произвольная группа, обозначим через $\mathcal{L}^*(X)$ множество всех таких нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{L}$.

Напомним [13], что подмножество M группы X называется $\mathcal{L}$-отделимым в X, если для любого элемента $x \in X$, не принадлежащего подмножеству M, существует гомоморфизм ψ группы X на некоторую группу из класса $\mathcal{L}$ такой, что $x\psi \notin M\psi$.

Напомним также [28], что семейство $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ нормальных подгрупп группы X называется фильтрацией, если $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda = 1$.

Подгруппу S группы B назовем (H,φ)-совместимой, если выполнено равенство $(H\cap S)\varphi = H\cap S$.

Теорема 3. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, H — нормальная подгруппа группы B, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех (H,φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семейству $\mathcal{K}^*(B)$. Если $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$,

2) семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией,

3) подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B.

Следствие 3. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, подгруппа H $\mathcal{K}$-аппроксимируема и принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(B)$. Если $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Следствие 4. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, H — нормальная подгруппа группы B, $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа.*

1. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

2. Если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$ и подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B.

Теорема 4. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, H — нормальная подгруппа группы B, $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех (H,φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семейству $\mathcal{K}^*(B)$.*

1. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией.

2. Пусть класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — конечная группа. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B, семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией и группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Следствие 5. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, подгруппа H $\mathcal{K}$-аппроксимируема, центральна в группе B и принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(B)$.*

1. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

2. Пусть класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — конечная группа. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Следствие 6. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, H — центральная подгруппа группы B.*

1. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

2. Пусть класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — конечная группа. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$ и подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B.

В приведенных выше теоремах 1 и 4, а также следствиях из последней не рассматривается случай, когда класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, а группа $\langle\varphi\rangle$ бесконечна. В последнем параграфе работы приводятся примеры, показывающие, что при этих условиях группа G может как аппроксимироваться, так и не аппроксимироваться классом $\mathcal{K}$.

Теорема 5. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, H — нормальная подгруппа группы B, автоморфизм φ совпадает с ограничением на подгруппу H некоторого внутреннего автоморфизма группы B. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*

Теорема 6. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, H — конечная нормальная подгруппа группы B. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

2. Существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе H.

3. Группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Следствие 7. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, H — конечная нормальная подгруппа группы B. Пусть также группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой.*

1. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

2. Если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Теорема 7. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, H — нормальная бесконечная циклическая подгруппа группы B.*

1. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B.

2. Если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B и группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Заметим, что если изменить условия теоремы 7, потребовав конечности подгруппы H, то полученное в результате утверждение будет справедливо в силу следствия 7. Однако последнее имеет более простую формулировку, поэтому распространять теорему 7 на случай конечной подгруппы H не имеет смысла.

Напомним, что группы с одним определяющим соотношением вида

$$BS(m,\ n) = \langle a,\ b;\ a^{-1}b^m a = b^n\rangle,$$

где без потери общности можно считать $m \geq |n| > 0$, называются группами Баумслага–Солитера [29]. Из представления группы $BS(m,\ n)$ видно, что она является HNN-расширением бесконечной циклической группы с порождающим b и подгруппами $\langle b^m\rangle$ и $\langle b^n\rangle$, связанными при помощи изоморфизма, переводящего b^m в b^n. Если $m = |n|$, то связанные подгруппы совпадают и к группе $BS(m,\ n)$ может быть применена теорема 7. В результате получаем

Следствие 8. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации.*

1. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа $BS(m,\ \pm m)$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

2. Если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то

а) группа $BS(m,\ m)$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа $\mathbb{Z}_m$ принадлежит классу $\mathcal{K}$,

б) группа $BS(m,\ -m)$ $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы $\mathbb{Z}_m$ и $\mathbb{Z}_2$ принадлежат классу $\mathcal{K}$.

Говорят (см., например, [32]), что группа имеет конечный ранг Гирша–Зайцева, равный r, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой, и число бесконечных циклических факторов данного ряда равно r.

Теорема 8. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации и содержит хотя бы одну непериодическую группу, группа B аппроксимируется $\mathcal{K}$-группами без кручения, подгруппа H нормальна в группе B и имеет конечный ранг Гирша–Зайцева. Тогда следующие два условия равносильны, и при выполнении любого из них группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

1. Группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

2. Существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе H.

Следствие 9. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации и содержит хотя бы одну непериодическую группу, группа B аппроксимируется $\mathcal{K}$-группами без кручения, подгруппа H нормальна в группе B и имеет конечный ранг Гирша–Зайцева. Если группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Отметим, что теоремы 5, 6, 7 и следствие 4 обобщают результаты, полученные автором в [22]. Следствие 8 обобщает теорему 2 из работы [7] в части, касающейся аппроксимируемости конечными π-группами.

1. Вспомогательные утверждения

Предложение 1.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Произвольная свободная группа аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ [6, теорема 1].

2. Свободное произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп в свою очередь аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ [33, лемма 1.5], [6].

3. Произвольное расширение $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathcal{K}$-группы аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ [6, лемма].

Утверждения следующих двух предложений хорошо известны и могут быть легко проверены.

Предложение 1.2. *Пусть $\mathcal{L}$ — замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений класс групп, X — произвольная группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Пересечение конечного числа подгрупп семейства $\mathcal{L}^*(X)$ снова является подгруппой данного семейства.

2. Если группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема и Y — ее конечная подгруппа, то подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X и существует подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $Y \cap N = 1$.

3. Если X — конечная $\mathcal{L}$-аппроксимируемая группа, то она принадлежит классу $\mathcal{L}$.

Предложение 1.3. *Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа, Y — ее нормальная подгруппа.*

1. Если фактор-группа X/Y $\mathcal{L}$-аппроксимируема, то подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X.

2. Если класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно факторизации, то из $\mathcal{L}$-отделимости подгруппы Y в группе X следует $\mathcal{L}$-аппроксимируемость фактор-группы X/Y.

Предложение 1.4. *Пусть класс групп $\mathcal{L}$ замкнут относительно факторизации, X — произвольная группа, Y — нормальная подгруппа группы X. Если существует сюръективный гомоморфизм γ группы X в некоторую группу из класса $\mathcal{L}$, инъективный на Y, то группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{L}$. В частности, если класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений, группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема и ее подгруппа Y конечна, то группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Пусть гомоморфизм с требуемыми свойствами существует и N — ядро этого гомоморфизма. Тогда $N \in \mathcal{L}^*(X)$ и $Y \cap N = 1$. Значит, подгруппы Y и N поэлементно перестановочны. Следовательно, N содержится в централизаторе $C_X(Y)$ подгруппы Y в группе X. Поэтому $X/C_X(Y) \cong (X/N)/(C_X(Y)/N)$ и, так как класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно факторизации, то $X/C_X(Y) \in \mathcal{L}$. Группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$, как легко видеть, изоморфна фактор-группе $X/C_X(Y)$, следовательно, $\mathrm{Aut}_X(Y) \in \mathcal{L}$.

Если класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений, группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема и ее подгруппа Y конечна, то согласно утверждению 2 предложения 1.2 существует подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что

$Y \cap N = 1$. В силу доказанного выше отсюда следует, что группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$ принадлежит классу $\mathcal{L}$. Предложение доказано. □

Предложение 1.5. [19, предложение 1.2.4]. *Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп. Если группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема, то централизатор $C_X(Y)$ произвольного подмножества Y группы X является $\mathcal{L}$-отделимой подгруппой.*

Напомним, что группа X представляет собой расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y, если Y — подгруппа группы X, Z — нормальная подгруппа группы X, $X = YZ$ и $Y \cap Z = 1$. Отображение δ группы Y в группу автоморфизмов группы Z, сопоставляющее элементу $y \in Y$ ограничение на подгруппу Z внутреннего автоморфизма группы X, производимого элементом y, является гомоморфным и называется сопровождающим гомоморфизмом этого расщепляемого расширения.

Предложение 1.6. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y, $\delta\colon Y \to \mathrm{Aut}\, Z$ — сопровождающий гомоморфизм, $L = \ker\delta$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. Подгруппа LZ нормальна в группе X и представляет собой прямое произведение подгрупп L и Z; $X/LZ \cong Y\delta$.

2. Если группы Z и Y $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, а группа $Y\delta$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, то расщепляемое расширение X $\mathcal{K}$-аппроксимируемо.

3. Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации и группа $Y\delta$ конечна, то из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы X следует, что группы Z и Y $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, а группа $Y\delta$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Доказательство. 1. Так как подгруппа L нормальна в группе Y и подгруппа Z нормальна в группе X, то подгруппа LZ нормальна в X и

$$X/LZ = YZ/LZ = YLZ/LZ \cong Y/(Y \cap LZ) = Y/L \cong Y\delta.$$

Очевидно, что подгруппа L поэлементно перестановочна с Z. Поэтому подгруппа LZ является прямым произведением групп L и Z.

2. Так как группы Z и Y $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, то подгруппа LZ представляет собой прямое произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп и, следовательно, $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Таким образом, группа X является расширением $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы LZ при помощи $\mathcal{K}$-группы $Y\delta$ и потому $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу утверждения 3 предложения 1.1.

3. Из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости расщепляемого расширения X следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость его подгрупп Z и Y, а также (в силу предложения 1.5) $\mathcal{K}$-отделимость централизатора $C_X(Z)$ в группе X. Как уже было отмечено в доказательстве предложения 1.4, $\mathrm{Aut}_X(Z) \cong X/C_X(Z)$. Отсюда, из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации и предложения 1.3 следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы $\mathrm{Aut}_X(Z)$. Значит, ее подгруппа $Y\delta$ также $\mathcal{K}$-аппроксимируема. При этом $Y\delta$ конечна, следовательно, она содержится в классе $\mathcal{K}$ в силу утверждения 3 предложения 1.2. Предложение доказано. □

Предложение 1.7. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то он включает и все полициклические группы.*

Доказательство. Пусть X — непериодическая группа, принадлежащая классу $\mathcal{K}$, и g — элемент бесконечного порядка этой группы. Тогда ввиду замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп бесконечная циклическая подгруппа, порожденная элементом g, принадлежит этому классу. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации следует, что все конечные циклические группы также содержатся в классе $\mathcal{K}$. Таким образом, все циклические группы являются $\mathcal{K}$-группами. Класс $\mathcal{K}$ является корневым, значит, он замкнут относительно расширений. Следовательно, произвольная полициклическая группа принадлежит классу $\mathcal{K}$. Предложение доказано. □

Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа. Будем говорить, что

а) группа X $\mathcal{L}$-квазирегулярна по своей подгруппе Y, если для любой подгруппы $M \in \mathcal{L}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $N \cap Y \leqslant M$;

б) группа X $\mathcal{L}$-регулярна по своей нормальной подгруппе Y, если для любой подгруппы $M \in \mathcal{L}^*(Y)$, нормальной в X, найдется подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $N \cap Y = M$.

Предложение 1.8. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп. Если X — некоторая группа и $Y \in \mathcal{K}^*(X)$, то группа X $\mathcal{K}$-регулярна и $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе Y.*

Доказательство. Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(Y)$. Тогда субнормальный ряд $1 \leqslant M \leqslant Y \leqslant X$ удовлетворяет условию Грюнберга. Следовательно, существует подгруппа $N \in \mathcal{K}^*(X)$ такая, что $N \subseteq M$. Тогда $N \cap Y = N \leqslant M$ и группа X $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе Y.

Если, кроме того, подгруппа M нормальна в X, то фактор-группа X/M является расширением $\mathcal{K}$-группы Y/M при помощи $\mathcal{K}$-группы $(X/M)/(Y/M) \cong X/Y$. Так как класс $\mathcal{K}$ является корневым, то группа X/M также принадлежит классу $\mathcal{K}$. Поэтому $M \in \mathcal{K}^*(X)$ и, поскольку $M \leqslant Y$, $M \cap Y = M$. Таким образом, группа X $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе Y. Предложение доказано. □

Пусть π — непустое множество простых чисел. Как обычно, через π' будем обозначать множество всех простых чисел, не принадлежащих π.

Говорят, что подгруппа Y некоторой группы X π'-изолирована в X, если для произвольного элемента x группы X и произвольного π'-числа q из того, что x^q — элемент подгруппы Y, следует, что x также является элементом подгруппы Y.

Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп, состоящий только из периодических групп и содержащий хотя бы одну неединичную группу. Через $\pi(\mathcal{L})$ обозначим множество всех простых делителей порядков элементов $\mathcal{L}$-групп. Так как в классе $\mathcal{L}$ имеется по крайней мере одна неединичная группа, то множество $\pi(\mathcal{L})$ не пусто.

Легко видеть, что произвольная $\mathcal{L}$-отделимая подгруппа является $\pi(\mathcal{L})'$-изолированной. Если класс $\mathcal{L}$ является корневым, то для конечно порожденных нильпотентных групп верно и обратное.

Предложение 1.9. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп. Тогда произвольная $\pi(\mathcal{K})'$-изолированная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы $\mathcal{K}$-отделима.*

Доказательство. Из предложения 23 главы 2 работы [1] следует, что произвольная $\pi(\mathcal{K})'$-изолированная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы отделима конечными $\pi(\mathcal{K})$-группами. Так как гомоморфный образ нильпотентной группы снова является нильпотентной группой, то произвольная $\pi(\mathcal{K})'$-изолированная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы оказывается отделимой конечными нильпотентными $\pi(\mathcal{K})$-группами, а значит, и конечными разрешимыми $\pi(\mathcal{K})$-группами. Так как класс $\mathcal{K}$ состоит из периодических групп, то, как легко видеть, он содержит все конечные разрешимые $\pi(\mathcal{K})$-группы [9, предложение 2] и, следовательно, произвольная $\pi(\mathcal{K})'$-изолированная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы $\mathcal{K}$-отделима. Предложение доказано. □

Предложение 1.10. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, состоящий только из периодических групп, X — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, Y — $\mathcal{K}$-отделимая нормальная подгруппа группы X. Тогда группа X $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе Y.*

Доказательство. Пусть V — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(Y)$, нормальная в группе X. Так как подгруппа Y $\mathcal{K}$-отделима в группе X, то Y $\pi(\mathcal{K})'$-изолирована в X. Отсюда и из того, что $V \in \mathcal{K}^*(Y)$, следует $\pi(\mathcal{K})'$-изолированность подгруппы V в группе X. Тогда в силу предложения 1.9 подгруппа V $\mathcal{K}$-отделима в этой группе.

Таким образом, V — нормальная $\mathcal{K}$-отделимая подгруппа группы X. Поэтому ввиду замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации и предложения 1.3 группа X/V $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Так как X — конечно порожденная нильпотентная группа, то и Y/V — конечно порожденная нильпотентная группа. Поскольку $V \in \mathcal{K}^*(Y)$ и класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, фактор-группа Y/V является периодической, а потому конечной подгруппой $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы X/V. Поэтому в силу утверждения 2 предложения 1.2 существует подгруппа $S/V \in \mathcal{K}^*(X/V)$ такая, что $Y/V \cap S/V = 1$.

Тогда $S \in \mathcal{K}^*(X)$ и $Y \cap S = V$. Следовательно, группа X $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе Y. Предложение доказано. □

Предложение 1.11. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — $\mathcal{L}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X, имеющая конечный ранг Гирша–Зайцева. Тогда существует подгруппа $Z \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$. В частности, Y является $\mathcal{L}$-группой.*

Доказательство. Пусть $1 = Y_0 \leqslant Y_1 \leqslant \ldots \leqslant Y_n = Y$ — субнормальный ряд группы Y, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой. Доказательство будем вести индукцией по длине этого ряда.

Если $n = 0$, то утверждение предложения очевидным образом следует из $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы X. Поэтому далее будем считать, что $n \geqslant 1$ и для всех подгрупп, обладающих рядом указанного выше вида длины, меньшей n, искомое утверждение имеет место.

Так как группа X, а значит, и ее подгруппа Y_1, аппроксимируется группами без кручения, то она сама не имеет кручения. Поэтому Y_1 — бесконечная циклическая группа, порожденная некоторым элементом y. Также из $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы X следует, что существует нормальная подгруппа M этой группы такая, что $X/M \in \mathcal{L}$ и $y \notin M$. Из отсутствия кручения в фактор-группе X/M вытекает, что элемент y имеет бесконечный порядок по модулю подгруппы M. Поэтому $M \cap Y_1 = 1$.

Так как

$$M \cap Y_{i+1}/M \cap Y_i \cong (M \cap Y_{i+1})Y_i/Y_i \leqslant Y_{i+1}/Y_i,$$

то группа $M \cap Y$ также обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой, причем длина этого ряда строго меньше n. Поэтому в силу индуктивного предположения существует подгруппа $L \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $L \cap (M \cap Y) = 1$.

Обозначим $L \cap M$ через Z. Тогда $Z \cap Y = 1$ и ввиду утверждения 1 предложения 1.2 подгруппа Z содержится в семействе $\mathcal{L}^*(X)$. Следовательно, Z — искомая подгруппа. Предложение доказано. □

2. Некоторые условия аппроксимируемости HNN-расширений групп

В данном параграфе будем предполагать, что H и K — произвольные, не обязательно совпадающие, изоморфные подгруппы группы B.

Общий подход к исследованию аппроксимационных свойств свободных конструкций групп был предложен Г. Баумслагом в работе [28] применительно к обобщенным свободным произведениям, а затем распространен на HNN-расширения Б. Баумслагом и М. Треткоффом [27].

Следуя идеям этих работ, подгруппу S группы B назовем (H, K, φ)-совместимой, если выполнено равенство $(H \cap S)\varphi = K \cap S$.

Сразу же заметим, что если связанные подгруппы H и K совпадают, то соотношение $(H \cap S)\varphi = K \cap S$ равносильно соотношению $(H \cap S)\varphi = H \cap S$. Таким образом, определенное во введении понятие (H, φ)-совместимой подгруппы является не чем иным, как частным случаем понятия (H, K, φ)-совместимой подгруппы, и обозначение (H, φ) используется в данной статье вместо (H, H, φ) лишь для краткости.

Если S — нормальная (H, K, φ)-совместимая подгруппа группы B, то отображение $\varphi_S\colon HS/S \to KS/S$, действующее по правилу $(hS)\varphi_S = (h\varphi)S$, где $h \in H$, определено корректно и является изоморфизмом подгрупп HS/S и KS/S фактор-группы B/S. Это позволяет построить HNN-расширение

$$G_S = (B/S,\ \tau;\ \tau^{-1}HS/S\tau = KS/S,\ \varphi_S)$$

группы B/S с проходной буквой τ и подгруппами HS/S и KS/S, связанными относительно изоморфизма φ_S.

Нетрудно показать, что естественный гомоморфизм $\rho\colon B \to B/S$ может быть продолжен до гомоморфизма $\rho_S\colon G \to G_S$, переводящего t в τ и являющегося, таким образом, сюръективным.

Предложение 2.1. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G и $S = B \cap N$. Тогда подгруппа S является (H, K, φ)-совместимой и существует гомоморфизм группы G_S на группу G/N, действующий на подгруппе B/S инъективно.*

Обратно, если для (H, K, φ)-совместимой нормальной подгруппы S группы B существует гомоморфизм σ группы G_S на некоторую группу, действующий на подгруппе B/S инъективно, и $N = \ker(\rho_S\sigma)$, то $S = B \cap N$.

Доказательство. Пусть N — нормальная подгруппа группы G и $S = B \cap N$. Тогда подгруппа S нормальна в группе B и справедливы соотношения

$$(H \cap S)\varphi = (H \cap B \cap N)\varphi = (H \cap N)\varphi =$$
$$= t^{-1}(H \cap N)t = t^{-1}Ht \cap t^{-1}Nt = K \cap N = K \cap B \cap N = K \cap S.$$

Таким образом, S — нормальная (H, K, φ)-совместимая подгруппа группы B. Следовательно, можем построить HNN-расширение $G_S = (B/S,\ \tau;\ \tau^{-1}HS/S\tau = KS/S,\ \varphi_S)$ и гомоморфизм $\rho_S\colon G \to G_S$, переводящий t в τ.

Хорошо известно (и легко видеть), что ядро M гомоморфизма ρ_S группы G на группу G_S совпадает с нормальным замыканием в группе G подгруппы S. Следовательно, $M \subseteq N$ и потому существует гомоморфизм σ группы G_S на фактор-группу G/N, действующий по правилу: для любого элемента $x \in G_S$ полагаем $x\sigma = gN$ для некоторого элемента $g \in G$ такого, что $x = g\rho_S$.

Действительно, если для элементов f и g группы G выполнено равенство $f\rho_S = g\rho_S$, то элемент $f^{-1}g$ лежит в подгруппе M, а потому и в подгруппе N. Следовательно, $fN = gN$, и корректность определения отображения σ доказана. Гомоморфность и сюръективность этого отображения очевидны.

Произвольный элемент x из подгруппы B/S группы G_S имеет вид $x = bS$ для некоторого элемента $b \in B$. Поскольку по определению гомоморфизма ρ_S выполнено равенство $b\rho_S = bS$, имеем $x\sigma = bN$. Таким образом, если x лежит в ядре гомоморфизма σ, то $b \in N$ и потому $b \in B \cap N = S$. Следовательно, $x = 1$ и инъективность действия гомоморфизма σ на подгруппе B/S доказана.

Предположим теперь, что для некоторой (H, K, φ)-совместимой нормальной подгруппы S группы B существует гомоморфизм σ группы G_S на некоторую группу, действующий на подгруппе B/S инъективно. Полагая $N = \ker(\rho_S\sigma)$, покажем, что $S = B \cap N$.

Так как для гомоморфизма ρ_S справедливо равенство $S\rho_S = 1$, включение $S \subseteq B \cap N$ очевидно. Обратно, если элемент $b \in B$ принадлежит подгруппе N, то $1 = (b\rho_S)\sigma = (bS)\sigma$, и поскольку σ на подгруппе B/S действует инъективно, имеем $bS = 1$, т. е. $b \in S$. Таким образом, включение $B \cap N \subseteq S$ также справедливо, и равенство $S = B \cap N$ доказано. Предложение доказано. □

Предложение 2.2. [41, теорема 4.1]. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп. Если группа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема и существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе H, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Если $\mathcal{L}$ — некоторый класс групп, X — произвольная группа, Y — подгруппа группы X, то через $\mathcal{L}^*(X, Y)$ обозначим семейство всех подгрупп группы Y вида $Z \cap Y$, где Z — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(X)$.

Будем говорить, что подгруппа Y группы X отделима семейством Σ нормальных подгрупп этой группы, если для любого элемента $x \in X$, не принадлежащего подгруппе Y, среди подгрупп семейства Σ найдется подгруппа N такая, что $x \notin YN$.

Очевидно, что подгруппа Y отделима семейством Σ в том и только в том случае, когда имеет место равенство $Y = \bigcap_{N \in \Sigma} YN$, и потому семейство Σ является фильтрацией тогда и только тогда, когда этим семейством отделима единичная подгруппа группы X.

В работе [27] Б. Баумслаг и М. Третκоф указали необходимые и достаточные условия финитной аппроксимируемости HNN-расширения G, которые с использованием введенного выше определения могут быть сформулированы следующим образом.

Предложение 2.3. [27, теорема 4.2]. *Пусть $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство всех нормальных (H, K, φ)-совместимых подгрупп конечного индекса группы B.*

1. Если группа G финитно аппроксимируема, то ее единичная подгруппа отделима в группе B семейством $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

2. Если подгруппы 1, H, K отделимы в группе B семейством $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, то группа G финитно аппроксимируема.

Покажем, что условия 1 и 2 предложения 2.3 можно сформулировать в других терминах.

Как уже было отмечено во введении, класс $\mathcal{F}$ всех конечных групп является корневым. Если $S \in \mathcal{F}^*(G, B)$ и подгруппа $N \in \mathcal{F}^*(G)$ такова, что $S = N \cap B$, то по предложению 2.1 подгруппа S (H, K, φ)-совместима и является, очевидно, нормальной подгруппой конечного индекса группы B. Поэтому $S = S_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$.

Обратно, пусть подгруппа S группы B совпадает с некоторой подгруппой S_λ. Тогда группа G_S представляет собой HNN-расширение конечной группы B/S. Следовательно, она финитно аппроксимируема [27, предложение 2.1]. Согласно утверждению 2 предложения 1.2 существует подгруппа $N_S \in \mathcal{F}^*(G_S)$ такая, что $N_S \cap B/S = 1$. Тогда естественный гомоморфизм $\sigma\colon G_S \to G_S/N_S$ действует инъективно на подгруппе B/S. Поэтому снова по предложению 2.1 $S = N \cap B$, где $N = \ker(\rho_S \sigma)$. Поскольку группа G_S/N_S конечна, $N \in \mathcal{F}^*(G)$ и, значит, $S \in \mathcal{F}^*(G, B)$.

Таким образом, множество подгрупп, составляющих семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, совпадает с множеством $\mathcal{F}^*(G, B)$. Отсюда вытекает, что приводимое далее предложение 2.4 является обобщением предложения 2.3.

Предложение 2.4. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп.*

1. Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то ее единичная подгруппа отделима в группе B семейством $\mathcal{K}^*(G, B)$.

2. Если подгруппы 1, H, K отделимы в группе B семейством $\mathcal{K}^*(G, B)$, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Доказательство. Проверим сначала первое утверждение. Пусть g — произвольный неединичный элемент, принадлежащий пересечению всех подгрупп семейства $\mathcal{K}^*(G, B)$. Тогда элемент g отличен от 1 и в группе G. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, следовательно, существует подгруппа $N \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $g \notin N$. Значит, элемент g не содержится в подгруппе $N \cap B$ семейства $\mathcal{K}^*(G, B)$. Поэтому g не входит в пересечение всех подгрупп данного семейства, что противоречит выбору элемента g. Таким образом, единичная подгруппа отделима в группе B семейством $\mathcal{K}^*(G, B)$.

Докажем теперь второе утверждение. Пусть g — произвольный неединичный элемент группы G. Рассмотрим два случая: $g \in B$ и $g \notin B$.

Пусть сначала $g \in B$. Тогда g не принадлежит хотя бы одной из подгрупп семейства $\mathcal{K}^*(G, B)$ ввиду отделимости единичной подгруппы в группе B данным семейством. Обозначим эту подгруппу через S_0. Так как $S_0 = D_0 \cap B$ для подходящей подгруппы $D_0 \in \mathcal{K}^*(G)$ и элемент g группы B не содержится в S_0, то $g \notin D_0$.

Таким образом, для произвольного неединичного элемента g группы G, лежащего в B, существует подгруппа $D_0 \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $g \notin D_0$.

Пусть теперь $g \notin B$ и

$$g = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \dots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n \text{ —}$$

некоторая приведенная запись элемента g. Тогда $n \geqslant 1$ и для любого $i \in \{1, \dots, n-1\}$, если $\varepsilon_i = -1$ и $\varepsilon_{i+1} = 1$, то $g_i \notin H$, если $\varepsilon_i = 1$ и $\varepsilon_{i+1} = -1$, то $g_i \notin K$. Для каждого $i \in \{0, \dots, n\}$ определим подгруппу $S_i \in \mathcal{K}^*(G, B)$ следующим образом.

Положим $S_0 = B$. Заметим, что $G \in \mathcal{K}^*(G)$ и потому $B = G \cap B \in \mathcal{K}^*(G, B)$.

Если $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $\varepsilon_i = -1$, $\varepsilon_{i+1} = 1$, то $g_i \notin H$ и, учитывая тот факт, что подгруппа H отделима в группе B семейством $\mathcal{K}^*(G, B)$, среди подгрупп данного семейства выберем подгруппу S_i такую, что $g_i \notin HS_i$.

Если $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и если $\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_{i+1} = -1$, то $g_i \notin K$ и аналогично, пользуясь отделимостью подгруппы K в группе B семейством $\mathcal{K}^*(G, B)$, находим подгруппу $S_i \in \mathcal{K}^*(G, B)$ такую, что $g_i \notin KS_i$.

Если $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} \neq 0$, положим $S_i = B$.

Если $i = n$, то $S_i = B$.

По определению семейства $\mathcal{K}^*(G, B)$ для любой подгруппы S_i данного семейства существует подгруппа $D_i \in \mathcal{K}^*(G)$ такая, что $S_i = D_i \cap B$. Обозначим через D пересечение всех подгрупп D_i, где $i \in \{0, \dots, n\}$. В силу утверждения 1 предложения 1.2 подгруппа D принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(G)$. Обозначим $S = B \cap D$. Тогда в силу первого утверждения предложения 2.1 подгруппа S (H, K, φ)-совместима и существует гомоморфизм группы G_S на $\mathcal{K}$-группу G/D, действующий на подгруппе B/S инъективно. Из предложения 2.2 теперь следует, что группа G_S $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Подействуем гомоморфизмом ρ_S на элемент g:

$$g\rho_S = (g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \dots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n)\rho_S = (g_0 S)\tau^{\varepsilon_1}(g_1 S)\tau^{\varepsilon_2}(g_2 S) \dots (g_{n-1} S)\tau^{\varepsilon_n}(g_n S) \neq 1.$$

Действительно, если $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $\varepsilon_i = -1$, $\varepsilon_{i+1} = 1$, то в силу выбора подгруппы S_i $g_i \notin HS_i$, а потому $g_i \notin HS$ и $g_i S \notin HS/S$; если $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $\varepsilon_i = 1$ и $\varepsilon_{i+1} = -1$, то $g_i \notin KS$, значит, $g_i S \notin KS/S$. Таким образом, данная запись элемента $g\rho_S$ является приведенной и ее длина совпадает с длиной приведенной записи элемента g. Следовательно, $g\rho_S \neq 1$.

Так как группа G_S $\mathcal{K}$-аппроксимируема, существует гомоморфизм ψ этой группы на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $g\rho_S\psi \neq 1$. В силу произвольности выбора элемента g отсюда вытекает, что группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Предложение доказано. □

Заметим, что первое утверждение предложения 2.4 справедливо для произвольного класса групп.

3. Строение и некоторые свойства группы G

С этого момента и до конца статьи вновь будем считать, что связанные подгруппы H и K совпадают.

В работе [22] автором показано, что при данном предположении группа G представима в виде обобщенного свободного произведения. А именно, доказано

Предложение 3.1. [22, предложение 3]. *Пусть A — подгруппа группы G, порожденная подгруппой H и элементом t. Тогда*

1) подгруппа A является расщепляемым расширением группы H при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом t, с сопровождающим гомоморфизмом ρ, переводящим t в автоморфизм φ группы H;

2) группа G представляет собой свободное произведение своих подгрупп A и B с объединенной подгруппой H.

Таким образом, к группе G, исследуемой в данной работе, применимы все понятия, определенные для обобщенного свободного произведения двух групп, а также ряд утверждений, полученных для этой свободной конструкции. В начале параграфа 5 в терминах рассматриваемых HNN-расширений групп будут сформулированы найденные автором в [21] и [23] условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенного свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой, которые используются в данной статье для изучения аппроксимационных свойств группы G.

Введенные в предложении 3.1 обозначения A и ρ зафиксируем до конца изложения. Кроме того, всюду далее C будет обозначать ядро сопровождающего гомоморфизма ρ.

Напомним, что согласно [28] нормальные подгруппы R и S групп A и B соответственно называются H-совместимыми, если выполнено равенство $H \cap R = H \cap S$. В этом случае отображение $\varphi_{R,S}\colon HR/R \to HS/S$, действующее по правилу $(hR)\varphi_{R,S} = (h\varphi)S$, где $h \in H$, определено корректно и является изоморфизмом подгруппы HR/R фактор-группы A/R на подгруппу HS/S фактор-группы B/S. Это позволяет построить свободное произведение

$$G_{R,S} = (A/R * B/S;\ HR/R = HS/S,\ \varphi_{R,S})$$

групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и HS/S, объединенными относительно изоморфизма $\varphi_{R,S}$. Легко видеть, что существует сюръективный гомоморфизм $\rho_{R,S}\colon G \to G_{R,S}$, действие которого на подгруппах A и B совпадает с действием естественных гомоморфизмов $A \to A/R$ и $B \to B/S$.

Таким образом, по нормальной (H,φ)-совместимой подгруппе $S \leqslant B$ можно построить HNN-расширение G_S, а по H-совместимой паре нормальных подгрупп $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$ — обобщенное свободное произведение $G_{R,S}$. Обе эти конструкции будут использоваться в дальнейшем.

Предложение 3.2. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и фактор-групп, подгруппа H нормальна в группе B. Подгруппа H $\mathcal{L}$-отделима в группе B тогда и только тогда, когда она отделима в B семейством $\mathcal{L}^*(G, B)$.*

Доказательство. Если подгруппа H отделима в группе B семейством $\mathcal{L}^*(G, B)$, то она оказывается и $\mathcal{L}$-отделимой в этой группе, так как в силу замкнутости класса $\mathcal{L}$ относительно взятия подгрупп каждая подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(G, B)$ содержится в $\mathcal{L}^*(B)$.

Пусть теперь подгруппа H $\mathcal{L}$-отделима в B. Отсюда, из нормальности подгруппы H в группе B и замкнутости класса $\mathcal{L}$ относительно факторизации в силу предложения 1.3 следует $\mathcal{L}$-аппроксимируемость фактор-группы B/H.

Пусть g — элемент группы B, не принадлежащий подгруппе H. Найдем подгруппу $N \in \mathcal{L}^*(G, B)$ такую, что $g \notin HN$.

В силу утверждения 2 предложения 3.1 можем рассматривать группу G как обобщенное свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Очевидно, что A и H как подгруппы обобщенного свободного произведения H-совместимы и группа $G_{A,H}$ изоморфна фактор-группе B/H. Тогда gH — отличный от 1 элемент $\mathcal{L}$-аппроксимируемой группы $G_{A,H}$. Значит, существует гомоморфизм ψ группы $G_{A,H}$ на некоторую группу из класса $\mathcal{L}$ такой, что $(gH)\psi \neq 1$.

Пусть $\sigma = \rho_{A,H}\psi$, $N = \ker\sigma \cap B$. Тогда $N \in \mathcal{L}^*(G, B)$ и $g \notin N$. Так как $H \subseteq N$, то $HN = N$. Поэтому $g \notin HN$ и, следовательно, N — искомая подгруппа. Значит, подгруппа H отделима в группе B семейством $\mathcal{L}^*(G, B)$. Предложение доказано. □

Таким образом, если подгруппа H нормальна в группе B и корневой класс групп замкнут относительно факторизации, то ввиду предложения 3.2 справедлива следующая более удобная в применении версия предложения 2.4.

Предложение 3.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, H — нормальная подгруппа группы B.*

1. Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то семейство $\mathcal{K}^*(G, B)$ является фильтрацией.

2. Если семейство $\mathcal{K}^*(G, B)$ является фильтрацией, подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

При некоторых дополнительных условиях сформулированное в предложении 3.3 достаточное условие аппроксимируемости группы G становится и необходимым.

Предложение 3.4. *Пусть $\mathcal{L}$ — наследственный класс групп, H — нормальная подгруппа группы B, группа G $\mathcal{L}$-аппроксимируема. Если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа,

2) $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа,

3) автоморфизм φ совпадает с некоторым элементом группы $\mathrm{Aut}_B(H)$,
то подгруппа H $\mathcal{L}$-отделима в группе B.

Доказательство. $\mathcal{L}$-отделимость подгруппы H будем доказывать от противного.

Пусть подгруппа H не является $\mathcal{L}$-отделимой в группе B. Тогда существует элемент b группы B, не принадлежащий подгруппе H, такой, что для любой подгруппы N семейства $\mathcal{L}^*(B)$ справедливо включение $b \in HN$.

Предположим сначала, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа. Обозначим элемент bt группы G через g. Тогда $\hat{g}|_H \in \mathrm{Aut}_G(H)$. Ввиду того, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа, порядок элемента $\hat{g}|_H$ равен некоторому конечному числу q. Рассмотрим элемент $f = [b, g^{-q}bg^q]$. Он имеет приведенную запись длины $4q$, следовательно, отличен от 1. Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(G)$ и $N = M \cap B$. Отсюда и из наследственности класса $\mathcal{L}$ вытекает, что подгруппа N принадлежит семейству $\mathcal{L}^*(B)$, а потому $b \in HN$ и для некоторого элемента h подгруппы H выполнено сравнение $b \equiv h \pmod{N}$. Следовательно, $b \equiv h \pmod{M}$. Поэтому $f \equiv [h, g^{-q}hg^q] \pmod{M}$. Так как $\widehat{g^q}|_H = (\hat{g}|_H)^q = \mathrm{id}$, то $[h, g^{-q}hg^q] = 1$, откуда получаем включение $f \in M$. Следовательно, неединичный элемент f группы G лежит в каждой подгруппе семейства $\mathcal{L}^*(G)$, что противоречит $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы G.

Теперь будем считать, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа. Обозначим через β ограничение на подгруппу H внутреннего автоморфизма группы G, производимого элементом b. Пусть также $g_1 = t^{-1}bt$, $g_2 = b^{-1}t^{-1}btb$, $g = [g_1, g_2]$. Элемент g имеет приведенную запись длины 8, значит, $g \neq 1$. Пусть, как и выше, M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(G)$ и $N = M \cap B$. Тогда $b \in HN$ и для подходящего элемента $h \in H$ справедливо сравнение $b \equiv h \pmod{N}$, а потому $b \equiv h \pmod{M}$ и, значит, $g_1 = t^{-1}bt = t^{-1}b^{-1}bbt \equiv h\beta\varphi \pmod{M}$, $g_2 \equiv h\varphi\beta \pmod{M}$. Отсюда и из того, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа, заключаем, что $g_1 \equiv g_2 \pmod{M}$. Значит, $g \equiv 1 \pmod{M}$, что вновь противоречит $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы G.

Наконец, предположим, что автоморфизм φ совпадает с ограничением на подгруппу H внутреннего автоморфизма группы B, производимого некоторым элементом $b_0 \in B$. Рассмотрим элемент $g = t^{-1}b^{-1}tb_0^{-1}bb_0$ группы G. Так как $b^{-1} \notin H$, то элемент g имеет приведенную запись длины 2, следовательно, отличен от единицы. Пусть снова M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(G)$, $h \in H$ — такой элемент, что $b \equiv h \pmod{M}$. Тогда $t^{-1}b^{-1}tb_0^{-1}bb_0 \equiv t^{-1}h^{-1}tb_0^{-1}hb_0 \pmod{M}$. Заметим, что $t^{-1}h^{-1}t = (h^{-1})\varphi = b_0^{-1}h^{-1}b_0$. Следовательно, $g \equiv b_0^{-1}h^{-1}b_0b_0^{-1}hb_0 = 1 \pmod{M}$, откуда, как и выше, получаем противоречие с $\mathcal{L}$-аппроксимируемостью группы G.

Таким образом, подгруппа H $\mathcal{L}$-отделима в группе B. Предложение доказано. $\square$

Приведем теперь несколько предложений, касающихся свойств группы G.

Предложение 3.5. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп и если $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Пусть также подгруппа H $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Тогда группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп следует, что бесконечная циклическая группа принадлежит классу $\mathcal{K}$. Поэтому в силу утверждения 3 предложения 1.1 группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема как расширение $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы H при помощи $\mathcal{K}$-группы $\langle t\rangle$.

Пусть теперь класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Ввиду первого утверждения предложения 1.1 группа $\langle t\rangle$

$\mathcal{K}$-аппроксимируема. Поскольку группы $\langle t\rangle\rho$ и $\langle\varphi\rangle$ совпадают, из условия $\langle\varphi\rangle \in \mathcal{K}$ вытекает, что группа $\langle t\rangle\rho$ также принадлежит классу $\mathcal{K}$. Таким образом, расщепляемое расширение A $\mathcal{K}$-аппроксимируемо в силу утверждения 2 предложения 1.6. Предложение доказано. $\square$

Предложение 3.6. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп и если $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Тогда группа A $\mathcal{K}$-регулярна и $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе H.*

Доказательство. Предположим сначала, что класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу. Тогда в силу замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп группа $\langle t\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, а потому $\mathcal{K}$-регулярность и $\mathcal{K}$-квазирегулярность группы A по подгруппе H следуют из предложения 1.8.

Пусть теперь $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — $\mathcal{K}$-группа. Пусть также M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(H)$. В силу утверждения 1 предложения 1.6 подгруппа CH, где, напомним, $C = \ker\rho$, нормальна в A и $A/CH \cong \langle t\rangle\rho$. Так как группы $\langle t\rangle\rho$ и $\langle\varphi\rangle$ совпадают, то из условия $\langle\varphi\rangle \in \mathcal{K}$ вытекает, что A/CH — $\mathcal{K}$-группа. Значит, подгруппа CH принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(A)$.

Подгруппы C и H поэлементно перестановочны согласно тому же утверждению и M нормальна в H, поэтому CM — нормальная подгруппа группы CH. Заметим, что $CH/CM \cong HCM/CM \cong H/(H\cap CM)$. Отсюда и из того, что $H\cap C = 1$ следует, что фактор-группа CH/CM изоморфна $\mathcal{K}$-группе H/M. Тогда субнормальный ряд $1 \leqslant CM \leqslant CH \leqslant A$ удовлетворяет условию Грюнберга. Следовательно, в группе A существует нормальная подгруппа N такая, что $N \subseteq CM$ и $A/N \in \mathcal{K}$. При этом $N \cap H \subseteq CM \cap H = M$. Значит, группа A $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе H.

Отметим теперь, что если подгруппа M нормальна в группе A, то и подгруппа CM нормальна в A. Фактор-группа A/CM представляет собой расширение $\mathcal{K}$-группы CH/CM при помощи $\mathcal{K}$-группы A/CH и, поскольку класс $\mathcal{K}$ является корневым, сама оказывается $\mathcal{K}$-группой. Таким образом, $CM \in \mathcal{K}^*(A)$ и $H\cap CM = M$, то есть группа A $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе H. Предложение доказано. $\square$

Предложение 3.7. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп; H — нормальная $\mathcal{K}$-аппроксимируемая подгруппа группы B, являющаяся $\mathcal{K}$-отделимой в этой группе; группа B $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе H; $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех (H,φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семейству $\mathcal{K}^*(B)$. Пусть также выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа;

2) подгруппа H центральна в группе B и если $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Тогда семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией.

Доказательство. Пусть b — произвольный неединичный элемент, принадлежащий пересечению всех подгрупп семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Рассмотрим два случая: $b \notin H$ и $b \in H$.

Пусть сначала $b \notin H$. Тогда bH — отличный от единицы элемент фактор-группы B/H. Из $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы H в группе B и замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации в силу предложения 1.3 следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы B/H. Следовательно, найдется подгруппа $S/H \in \mathcal{K}^*(B/H)$ такая, что $bH \notin S/H$. Тогда подгруппа S принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(B)$ и не содержит элемент b. Кроме того, $H \subseteq S$, откуда вытекает, что $(H \cap S)\varphi = H\varphi = H = H \cap S$. Значит, подгруппа S (H, φ)-совместима, что противоречит выбору элемента b.

Пусть теперь $b \in H$.

Предположим сначала, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная группа. Так как группа H $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то существует подгруппа M семейства $\mathcal{K}^*(H)$, не содержащая элемент b. Обозначим через N пересечение образов подгруппы M относительно всех автоморфизмов из группы $\mathrm{Aut}_G(H)$. Тогда подгруппа N нормальна в группе G и, в частности, N нормальна в B. По условию группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна, поэтому число подгрупп в пересечении N также конечно. Легко видеть, что каждый автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}_G(H)$ индуцирует изоморфизм фактор-групп H/M и $H/M\alpha \cong H\alpha/M\alpha$. Поэтому подгруппа $M\alpha$ содержится в $\mathcal{K}^*(H)$. Таким образом, N является пересечением конечного числа подгрупп семейства $\mathcal{K}^*(H)$. Следовательно, в силу утверждения 1 предложения 1.2 N также содержится в $\mathcal{K}^*(H)$.

Пользуясь $\mathcal{K}$-регулярностью группы B по подгруппе H, находим подгруппу $S \in \mathcal{K}^*(B)$ такую, что $S \cap H = N$. Отсюда и из того, что подгруппа N нормальна в группе G, вытекает, что

$$(H \cap S)\varphi = N\varphi = t^{-1}Nt = N = H \cap S.$$

Следовательно, подгруппа S (H, φ)-совместима.

Так как $b \notin M$, то $b \notin N$. Значит, элемент b группы H не содержится в ее подгруппе $S \cap H$, а потому $b \notin S$, что вновь противоречит выбору b.

Теперь будем считать выполненным второе условие. В силу предложения 3.5 группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема и, значит, найдется подгруппа $M \in \mathcal{K}^*(A)$ такая, что $b \notin M$. Обозначим через N пересечение подгрупп M и H. Тогда $b \notin N$ и ввиду наследственности класса $\mathcal{K}$ подгруппа N принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(H)$. Подгруппа H центральна в группе B, а потому N нормальна в B. Теперь ввиду $\mathcal{K}$-регулярности группы B по подгруппе H находим подгруппу S семейства $\mathcal{K}^*(B)$, удовлетворяющую условию $S \cap H = N$. Так как $S \cap H = M \cap H$ и подгруппа M нормальна в группе A, имеют место следующие соотношения:

$$(H \cap S)\varphi = (H \cap M)\varphi = t^{-1}(H \cap M)t = t^{-1}Ht \cap t^{-1}Mt = H \cap M = H \cap S.$$

Значит, подгруппа S (H, φ)-совместима.

Элемент b не содержится в N, поэтому, как и выше, $b \notin S$, что противоречит выбору данного элемента. Предложение доказано. □

Предложение 3.8. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, H — нормальная подгруппа группы B, группы $\langle\varphi\rangle$ и $\mathrm{Aut}_B(H)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа. Тогда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Как уже отмечалось во введении, группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ порождается своими подгруппами $U = \langle\varphi\rangle$ и $V = \mathrm{Aut}_B(H)$. Так как $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа, то она совпадает с произведением порождающих ее подгрупп U и V. Поэтому $\mathrm{Aut}_G(H)/V \cong U/U \cap V$. Так как группы $\langle\varphi\rangle$ и $\mathrm{Aut}_B(H)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$ и этот класс замкнут относительно факторизации, получаем, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — расширение

$\mathcal{K}$-группы при помощи $\mathcal{K}$-группы. Класс $\mathcal{K}$ — корневой, значит, такое расширение снова является $\mathcal{K}$-группой, и потому группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Предложение доказано. □

4. Доказательства теорем 2, 5 и следствия 2

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 4.1. [23, теорема 1]. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, $P = (X * Y;\ U = V,\ \psi)$ — свободное произведение групп X и Y с подгруппами U и V, объединенными относительно изоморфизма $\psi\colon U \to V$. Пусть также группы X и Y входят в класс $\mathcal{K}$, U и V — нормальные подгруппы групп X и Y соответственно. Если $X/U \in \mathcal{K}$, $Y/V \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Aut}_P(U) \in \mathcal{K}$, то существует гомоморфизм группы P на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах X, Y, и, в частности, группа P $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Доказательство теоремы 2. Напомним, что в соответствии с предложением 3.1 подгруппа A группы G, порожденная подгруппой H и элементом t, является расщепляемым расширением группы H при помощи группы $\langle t\rangle$ и что C обозначает ядро сопровождающего гомоморфизма этого расширения. Так как $H \cap C = 1$, то подгруппа HC/C фактор-группы A/C изоморфна группе H и потому принадлежит классу $\mathcal{K}$.

В силу утверждения 1 предложения 1.6

$$(A/C)/(HC/C) \cong A/HC \cong \langle t\rangle\rho = \langle\varphi\rangle.$$

Кроме того, $\langle\varphi\rangle$ — подгруппа $\mathcal{K}$-группы $\mathrm{Aut}_G(H)$ и класс $\mathcal{K}$ является наследственным. Значит, $(A/C)/(HC/C) \in \mathcal{K}$.

Таким образом, A/C — расширение $\mathcal{K}$-группы HC/C при помощи $\mathcal{K}$-группы $(A/C)/(HC/C)$. Поскольку класс $\mathcal{K}$ — корневой, данное расширение является $\mathcal{K}$-группой. Следовательно, подгруппа C содержится в семействе $\mathcal{K}^*(A)$.

Как уже было отмечено выше, $H \cap C = 1$. Поэтому подгруппы $C \in \mathcal{K}^*(A)$ и $1 \in \mathcal{K}^*(B)$ H-совместимы и, значит, можем построить обобщенное свободное произведение $G_{C,1} = (A/C * B;\ HC/C = H,\ \varphi_{C,1})$ и гомоморфизм $\rho_{C,1}\colon G \to G_{C,1}$.

Определим отображение $\gamma\colon \mathrm{Aut}_G(H) \to \mathrm{Aut}_{G_{C,1}}(HC/C)$, сопоставляющее каждому элементу $\tilde{g} = \hat{g}|_H \in \mathrm{Aut}_G(H)$ элемент $\widetilde{g\rho_{C,1}} = \widehat{g\rho_{C,1}}|_{HC/C} \in \mathrm{Aut}_{G_{C,1}}(HC/C)$. Непосредственно проверяется, что данное определение корректно. Покажем, что отображение γ является изоморфизмом.

Пусть $\tilde{g} \neq 1$, то есть существует элемент h группы H такой, что $h\tilde{g} \neq h$. Так как $H \cap C = 1$, то естественный гомоморфизм $A \to A/C$, а значит, и $\rho_{C,1}$ инъективен на подгруппе H. Подействуем на элемент $h\rho_{C,1}$ группы HC/C автоморфизмом $\widetilde{g\rho_{C,1}}$:

$$h\rho_{C,1}\widetilde{g\rho_{C,1}} = (g\rho_{C,1})^{-1}h\rho_{C,1}g\rho_{C,1} = (g^{-1}hg)\rho_{C,1} = (h\tilde{g})\rho_{C,1} \neq h\rho_{C,1},$$

так как $h\tilde{g} \neq h$ и гомоморфизм $\rho_{C,1}$ инъективен на H. Следовательно, автоморфизм $\widetilde{g\rho_{C,1}}$ не является тождественным. Значит, отображение γ инъективно. Гомоморфность данного отображения очевидна, а его сюръективность следует из сюръективности гомоморфизма $\rho_{C,1}$.

Поэтому $\mathrm{Aut}_G(H) \cong \mathrm{Aut}_{G_{C,1}}(HC/C)$. Отсюда и из того, что $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, вытекает, что $\mathrm{Aut}_{G_{C,1}}(HC/C) \in \mathcal{K}$.

Теперь в силу предложения 4.1 существует гомоморфизм σ группы $G_{C,1}$ на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе B. Следовательно, композиция гомоморфизмов $\rho_{C,1}$ и σ переводит группу G на группу из класса $\mathcal{K}$, действуя инъективно на подгруппе B, а потому является искомым гомоморфизмом. Теорема доказана. $\square$

Доказательство следствия 2. Так как класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, то из условия $B \in \mathcal{K}$ следует, что $B/H \in \mathcal{K}$. Поэтому импликация $2 \Rightarrow 1$ вытекает из справедливости доказанной выше теоремы. Импликация $1 \Rightarrow 2$ имеет место в силу предложения 1.4. Следствие доказано. $\square$

Доказательство теоремы 5. Необходимость условия теоремы вытекает из предложения 3.4. Проверим достаточность.

Пусть φ — ограничение на подгруппу H внутреннего автоморфизма группы B, производимого элементом b_0 группы B.

Ввиду $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы B семейство $\mathcal{K}^*(B)$ является фильтрацией. Убедимся, что при таком выборе автоморфизма φ множества подгрупп семейств $\mathcal{K}^*(G, B)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ совпадают. Тогда достаточность условия теоремы будет вытекать из утверждения 2 предложения 3.3.

Пусть S — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(B)$. Так как φ является ограничением на подгруппу H внутреннего автоморфизма $\widehat{b_0}$ группы B, а подгруппы H и S нормальны в B, то подгруппа S (H, φ)-совместима. Значит, можем построить HNN-расширение G_S и гомоморфизм $\rho_S\colon G \to G_S$.

Группа $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ порождается подгруппой $\mathrm{Aut}_{B/S}(HS/S)$ и автоморфизмом φ_S. Так как B/S — $\mathcal{K}$-группа, то в силу предложения 1.4 группа $\mathrm{Aut}_{B/S}(HS/S)$ также принадлежит классу $\mathcal{K}$. Заметим, что автоморфизм φ_S является ограничением внутреннего автоморфизма группы B/S, производимого элементом b_0S, на подгруппу HS/S. Значит, группы $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ и $\mathrm{Aut}_{B/S}(HS/S)$ совпадают. Следовательно, $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ — $\mathcal{K}$-группа. Тогда в силу следствия 2 существует гомоморфизм σ группы G_S на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе B/S. Полагая $N = \ker(\rho_S\sigma)$, получаем, что $N \in \mathcal{K}^*(G)$ и согласно второй части предложения 2.1 $S = B \cap N$. Значит, подгруппа S принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(G, B)$. Ввиду произвольности выбора подгруппы S отсюда следует, что все подгруппы семейства $\mathcal{K}^*(B)$ содержатся в $\mathcal{K}^*(G, B)$. Справедливость противоположного включения вытекает из наследственности класса $\mathcal{K}$. Следовательно, семейства $\mathcal{K}^*(B)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ совпадают. Теорема доказана. $\square$

5. Доказательства теорем 3, 4 и следствий 3, 4, 5, 6

Для доказательства теорем 3 и 4 нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 5.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, H — нормальная подгруппа группы B, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех*

(H, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семейству $\mathcal{K}^*(B)$. Пусть также выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$;

2) $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа и если $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Тогда семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ совпадает с множеством $\mathcal{K}^*(G, B)$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $\lambda \in \Lambda$ и обозначим через S подгруппу S_λ. Так как S (H, φ)-совместима, то определено HNN-расширение G_S. Гомоморфизм ρ_S сюръективен и переводит H на HS/S. Поэтому $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ — гомоморфный образ группы $\mathrm{Aut}_G(H)$. Покажем, что он содержится в классе $\mathcal{K}$.

Если группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, то ввиду замкнутости $\mathcal{K}$ относительно факторизации $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ также является $\mathcal{K}$-группой.

Пусть теперь группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ абелева и если $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то $\langle\varphi\rangle \in \mathcal{K}$. Поскольку $S \in \mathcal{K}^*(B)$, фактор-группа B/S принадлежит классу $\mathcal{K}$. Отсюда согласно предложению 1.4 получаем, что группа $\mathrm{Aut}_{B/S}(HS/S)$ также содержится в $\mathcal{K}$. Так как группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ абелева, то и ее гомоморфный образ $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ также является абелевой группой. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то в силу предложения 1.7 $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$ по условию. Так как $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, то $\langle\varphi\rangle\rho_S$ также является $\mathcal{K}$-группой. Следовательно, согласно предложению 3.8 группа $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ содержится в $\mathcal{K}$.

Таким образом, $\mathrm{Aut}_{G_S}(HS/S)$ — $\mathcal{K}$-группа. Поэтому в силу следствия 2 существует гомоморфизм σ группы G_S на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе B/S. Полагая $N = \ker(\rho_S\sigma)$, получаем, что $N \in \mathcal{K}^*(G)$ и согласно второй части предложения 2.1 $S = B \cap N$. Значит, подгруппа S принадлежит семейству $\mathcal{K}^*(G, B)$. Ввиду произвольности выбора λ отсюда следует, что все подгруппы семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ содержатся в $\mathcal{K}^*(G, B)$. Справедливость противоположного включения вытекает из первой части предложения 2.1 и замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп. Таким образом, множества $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ совпадают. Предложение доказано. □

Доказательство теоремы 3. Покажем достаточность условий 1 — 3. В силу предложения 5.1 множества $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ совпадают. Поэтому $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G следует из предложения 3.3.

Проверим необходимость условий 1 — 3. Из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G согласно предложению 1.5 вытекает $\mathcal{K}$-отделимость в ней централизатора $C_G(H)$ подгруппы H. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации ввиду предложения 1.3 получаем $\mathcal{K}$-аппроксимируемость фактор-группы $G/C_G(H)$. Тогда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$, изоморфная $G/C_G(H)$, также $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Кроме того, $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна по условию, значит, она принадлежит классу $\mathcal{K}$ согласно утверждению 3 предложения 1.2.

Теперь в силу предложения 5.1 множество подгрупп семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ совпадает с множеством $\mathcal{K}^*(G, B)$. Поэтому ввиду утверждения 1 предложения 3.3 семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией.

$\mathcal{K}$-отделимость подгруппы H в группе B вытекает из предложения 3.4. Теорема доказана. $\square$

Доказательство следствия 3. Необходимость условия сразу же вытекает из теоремы 3. Проверим достаточность.

Согласно условию теоремы $B/H \in \mathcal{K}$, откуда следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость фактор-группы B/H и, ввиду предложения 1.3, $\mathcal{K}$-отделимость подгруппы H в группе B. Также из того, что $H \in \mathcal{K}^*(B)$, в силу предложения 1.8 вытекает $\mathcal{K}$-регулярность группы B по подгруппе H. Поэтому можно воспользоваться предложением 3.7, согласно которому семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ всех (H,φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семейству $\mathcal{K}^*(B)$, является фильтрацией. Теперь достаточность условия следует из теоремы 3. Следствие доказано. $\square$

Доказательство следствия 4. Необходимость условий утверждений 1 и 2 вытекает из теоремы 3. Проверим их достаточность.

Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то согласно предложению 1.7 он включает и все полициклические группы, а значит, и все конечно порожденные нильпотентные группы. Поэтому группа B принадлежит классу $\mathcal{K}$. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации следует, что подгруппа H содержится в семействе $\mathcal{K}^*(B)$, а потому выполнены условия следствия 3, согласно которому группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Если же $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то ввиду предложения 1.10 группа B $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе H. Поэтому согласно предложению 3.7 семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ всех (H,φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семейству $\mathcal{K}^*(B)$, является фильтрацией и группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 3. Следствие доказано. $\square$

Доказательство теоремы 4. Сначала покажем достаточность условий утверждений 1 и 2. Согласно условию теоремы либо класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, либо $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — $\mathcal{K}$-группа. Поэтому ввиду предложения 5.1 множества подгрупп, составляющих семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\mathcal{K}^*(G,B)$, совпадают. Значит, из того, что подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B и семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией, в силу предложения 3.3 вытекает $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G.

Теперь докажем необходимость условий обоих утверждений.

$\mathcal{K}$-отделимость подгруппы H в группе B следует из предложения 3.4.

Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то как и выше, из предложения 5.1 вытекает, что семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ совпадает с множеством $\mathcal{K}^*(G,B)$. Значит, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией в силу предложения 3.3.

Если же класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — конечная группа, то из $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G ввиду утверждения 1 предложения 3.1 и утверждения 3 предложения 1.6 следует, что группа $\langle\varphi\rangle$, совпадающая с $\langle t\rangle\rho$, содержится в $\mathcal{K}$. Поэтому снова можно воспользоваться предложениями 5.1 и 3.3. Теорема доказана. $\square$

Доказательства следствий 5 и 6. Необходимость условий вторых утверждений в обоих следствиях сразу же вытекает из теоремы 4. Для доказательства достаточности заметим, что в силу центральности подгруппы H в группе B группа $\mathrm{Aut}_B(H)$

состоит лишь из тождественного отображения группы H, а потому $\mathrm{Aut}_G(H)$ совпадает со своей подгруппой, порожденной автоморфизмом φ, и, следовательно, является абелевой. В остальном проверка достаточности условий всех утверждений следствий 5 и 6 полностью аналогична доказательствам достаточности в следствиях 3 и 4 соответственно. Необходимо только заменить в указанных доказательствах ссылки на теорему 3 и следствие 3 ссылками на теорему 4 и ее следствие 5. □

6. Доказательства остальных теорем и следствий

Теоремы 1, 6, 7 и 8 с использованием доказанных выше вспомогательных утверждений сводятся к результатам, полученным автором для обобщенных свободных произведений двух групп в статьях [21] и [23]. Воспользуемся утверждением 2 предложения 3.1 и переформулируем указанные результаты в терминах HNN-расширений с совпадающими связанными подгруппами.

Приводимое далее предложение 6.1 является следствием теоремы 2 работы [21], а предложения 6.2, 6.3 и 6.4 вытекают из теорем 3, 4 и 5 соответственно статьи [23].

Предложение 6.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, H — ретракт в группе B. Пусть группы A и B $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, группа A $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе H. Тогда группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Предложение 6.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемые группы, H — конечная нормальная подгруппа группы B. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. Группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

2. Существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе H.

3. Группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Предложение 6.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемые группы. И пусть подгруппа H является нормальной циклической или центральной в группе B.*

1. Если $H \neq B$ и группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группах A и B.

2. Если подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группах A и B, группа B $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе H, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Предложение 6.4. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, группы A и B аппроксимируются $\mathcal{K}$-группами без кручения, подгруппа H нормальна в группе B и имеет конечный ранг Гирша–Зайцева. Тогда следующие два условия равносильны и при выполнении любого из них группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

1. Группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

2. Существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе H.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теорем и следствий.

Доказательство теоремы 1. Пусть либо класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, либо $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\langle\varphi\rangle$ — $\mathcal{K}$-группа. При выполнении любого из этих условий в силу предложения 3.5 группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Так как фактор-группа A/H изоморфна $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группе $\langle t\rangle$, то ввиду предложения 1.3 подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A. Согласно предложению 3.6 группа A $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе H. Теперь группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу предложения 6.1. Справедливость последней части второго утверждения теоремы вытекает из утверждения 1 предложения 3.1 и утверждения 3 предложения 1.6. Теорема доказана. □

Доказательство следствия 1 опирается на следующий результат.

Предложение 6.5. [10, теорема 1]. *Группа Баумслага–Солитера $BS(1,n)$ аппроксимируется классом $\mathcal{F}_\pi$ конечных π-групп тогда и только тогда, когда существует такое π-число $s > 1$, что $(s,n) = 1$ и порядок элемента $\bar{n}$ группы $\mathbb{Z}_s$ также является π-числом. В частности, группа $BS(1,n)$ аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда p делит число $n-1$.*

Очевидно, что группа $E(n)$ является HNN-расширением своей подгруппы B, порожденной элементами a, b и изоморфной группе $BS(1,n)$, с совпадающими связанными бесконечными циклическими подгруппами, порожденными элементами a и a^{-1}. Хорошо известно и нетрудно показать (см., например, [19, § Д.1]), что нормальное замыкание элемента b в группе B является локально циклической группой без кручения. Отсюда следует, что группа B двуступенно разрешима и не имеет кручения, а подгруппа $\langle a\rangle$ представляет собой ее ретракт. Поэтому утверждение 1 вытекает непосредственно из теоремы 1.

Заметим далее, что в силу сказанного выше каждый гомоморфный образ группы B оказывается разрешимой группой и потому класс $\mathcal{F}_\pi$ в формулировке предложения 6.5 можно заменить на $\mathcal{FS}_\pi$. Отсюда и из равенства $|\varphi| = 2$ заключаем, что утверждения 2 и 3 следуют из указанного предложения и теоремы 1. Следствие доказано. □

Доказательство теоремы 6. Справедливость импликаций $1 \Rightarrow 3$ и $2 \Rightarrow 3$ вытекает из предложения 1.4. Покажем, что импликации $3 \Rightarrow 1$ и $3 \Rightarrow 2$ также имеют место.

Так как класс $\mathcal{K}$ является наследственным, то из условия $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$ следует, что $\langle\varphi\rangle \in \mathcal{K}$. Поэтому согласно предложению 3.5 группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Значит, выполнены условия предложения 6.2. Отсюда заключаем, что проверяемые импликации верны. Теорема доказана. □

Доказательство следствия 7. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то согласно предложению 1.7 группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Ввиду предложения 1.4 группа $\mathrm{Aut}_B(H)$ также содержится в $\mathcal{K}$. Тогда согласно предложению 3.8 $\mathrm{Aut}_G(H)$ — $\mathcal{K}$-группа и группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 6.

Пусть теперь класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп. Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то в силу теоремы 6 группа $\mathrm{Aut}_G(H)$, а потому и ее подгруппа $\langle\varphi\rangle$, принадлежит классу $\mathcal{K}$. Если же, наоборот, $\langle\varphi\rangle$ — $\mathcal{K}$-группа, то, как и выше, ввиду предложения 3.8 группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ также содержится в классе $\mathcal{K}$, а потому группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 6. Следствие доказано. □

Доказательство теоремы 7. Так как H — бесконечная циклическая группа, то либо φ — тождественное отображение группы H, либо φ переводит каждый элемент группы H в обратный. В первом случае справедливость утверждения теоремы доказана Д. Тьеджо [41, теорема 4.2]. Рассмотрим второй случай и сведем его к предложению 6.3.

Предположим сначала, что группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Отсюда следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость ее подгруппы A. Так как $\langle t\rangle\rho = \langle\varphi\rangle$ и порядок φ конечен, то в силу утверждения 1 предложения 3.1 и утверждения 3 предложения 1.6 группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Из предложения 3.4 вытекает $\mathcal{K}$-отделимость подгруппы H в группе B.

Пусть теперь подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе B и, если класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. В силу предложения 3.5 группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Так как фактор-группа A/H изоморфна $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группе $\langle t\rangle$, то ввиду предложения 1.3 подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A. Согласно предложению 3.6 группа A $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе H. Поэтому $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G следует из утверждения 2 предложения 6.3. Теорема доказана. $\square$

Для *доказательства следствия 8* достаточно заметить, что в силу утверждения 1 предложения 1.1 бесконечная циклическая группа, являющаяся базой HNN-расширения $BS(m, \pm m)$, аппроксимируется любым корневым классом, а $\mathcal{K}$-отделимость связанной подгруппы ввиду предложения 1.3 равносильна $\mathcal{K}$-аппроксимируемости фактор-группы $\langle b\rangle/\langle b^{\pm m}\rangle \cong \mathbb{Z}_m$. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то в силу предложения 1.7 группа $\mathbb{Z}_m$ содержится в $\mathcal{K}$ и, в частности, $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Если же класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, то ввиду утверждения 3 предложения 1.2 группа $\mathbb{Z}_m$ аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда она является $\mathcal{K}$-группой. Следствие доказано. $\square$

Доказательство теоремы 8. Так как класс $\mathcal{K}$ является корневым и содержит хотя бы одну непериодическую группу, то существует нееднничная группа без кручения, лежащая в $\mathcal{K}$. Из характеризации корневых классов, полученной в [40], и данного замечания вытекает, что класс всех $\mathcal{K}$-групп без кручения также является корневым. Поэтому в силу предложения 3.5 группа A аппроксимируется $\mathcal{K}$-группами без кручения. Теперь утверждение теоремы следует из предложения 6.4. Теорема доказана. $\square$

Доказательство следствия 9. Легко видеть, что класс всех $\mathcal{K}$-групп без кручения замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому в силу предложения 1.11 существует гомоморфизм группы B на некоторую $\mathcal{K}$-группу без кручения, инъективный на H. Тогда согласно предложению 1.4 группа $\mathrm{Aut}_B(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Так как $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то ввиду предложения 1.7 группа $\langle\varphi\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Следовательно, в силу предложения 3.8 $\mathrm{Aut}_G(H)$ также принадлежит классу $\mathcal{K}$, и группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема согласно теореме 8. Следствие доказано. $\square$

7. Примеры

Как уже было отмечено во введении, в теоремах 1, 4 и следствиях 5, 6 не рассматривается случай, когда класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп, а группа $\langle\varphi\rangle$ бесконечна. Приведем примеры, показывающие, что в данном случае HNN-расширение G может быть как $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, так и не $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.

Пусть p — простое число, большее 2, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп, H — свободная абелева группа ранга 3 с базисом $\{h_1; h_2; h_3\}$, F — конечная циклическая группа порядка p с порождающим f, B — прямое произведение групп H и F, автоморфизм φ группы H переводит h_1 в h_1h_2, h_2 в h_2, h_3 в h_3^α, где $\alpha \in \{-1; 1\}$. Тогда B — конечно порожденная абелева группа, подгруппа H центральна в группе B, является ретрактом в ней и принадлежит семейству $\mathcal{F}_p^*(B)$.

Таким образом, выполняются все условия теорем 1, 4 и следствий 5, 6, за исключением одного: определенный выше автоморфизм φ имеет бесконечный порядок, а потому группа $\langle\varphi\rangle$ не является конечной. Действительно, для любого натурального числа n справедливы соотношения $h_1\varphi^n = h_1h_2^n \neq h_1$.

Если $\alpha = 1$, то субнормальный ряд $1 \leqslant \mathrm{sgp}\{h_2, h_3\} \leqslant H \leqslant A$ группы A является центральным, а потому A — нильпотентная группа. Группа A представляет собой расширение конечно порожденной группы без кручения при помощи конечно порожденной группы без кручения. Значит, она также конечно порождена и не имеет кручения. Известно [33, теорема 2.1], что любая конечно порожденная нильпотентная группа, периодическая часть которой является p-группой, аппроксимируется конечными p-группами. Следовательно, группы A и B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы.

Фактор-группы A/H и B/H изоморфны $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемым группам $\langle t\rangle$ и $\langle f\rangle$ соответственно, поэтому подгруппа H $\mathcal{F}_p$-отделима в группах A и B ввиду предложения 1.3.

Таким образом, группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема в силу утверждения 2 предложения 3.1 и следствия 5 работы [23].

Пусть теперь $\alpha = -1$. Обозначим через γ произвольный гомоморфизм группы A на некоторую конечную p-группу, через s — порядок элемента $t\gamma$, через r — порядок элемента $h_3\gamma$. Тогда числа s и r являются нечетными. Подействуем гомоморфизмом γ на элемент h_3:

$$h_3\gamma = (t\gamma)^{-s}h_3\gamma(t\gamma)^s = (t^{-s}h_3t^s)\gamma = \left(h_3^{(-1)^s}\right)\gamma = (h_3^{-1})\gamma = (h_3\gamma)^{-1}.$$

Тогда $(h_3\gamma)^2 = 1$. Таким образом, $(h_3\gamma)^2 = 1$, $(h_3\gamma)^r = 1$, числа 2 и r взаимно просты, значит, $h_3\gamma = 1$. Следовательно, элемент h_3 под действием каждого гомоморфизма группы A на конечную p-группу переходит в единицу. Поэтому группа A, а значит, и группа G, не аппроксимируется конечными p-группами.

Список литературы

1. *Азаров Д. Н.* Аппроксимируемость свободного произведения групп с одной объединенной подгруппой некоторыми классами конечных групп: Дис. канд. физ.-мат. наук. Иваново, 2000. [*Azarov D. N.* Approksimiruemost svobodnogo proizvedeniya grupp s odnoy

obedinennoy podgruppoy nekotorymi klassami konechnykh grupp: Dis. kand. fiz.-mat. nauk. Ivanovo, 2000. (in Russian)].

2. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сб. 2010. Т. 11. Вып. 3. С. 11–21. [*Azarov D. N.* On the residual finiteness of p-groups // Chebyshevskii Sb. 2010. V. 11. No. 3. P. 11–21 (in Russian)].

3. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами нисходящих HNN-расширений групп // Чебышевский сб. 2012. Т. 13. Вып. 1. С. 9–19. [*Azarov D. N.* On the virtual residuality of descending HNN-extensions of groups by finite p-groups // Chebyshevskii Sb. 2012. V. 13. No. 1. P. 9–19 (in Russian)].

4. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54. № 6. С. 1203–1215. [English transl.: *Azarov D. N.* On the residual finiteness of the HNN-extensions and generalized free products of finite rank groups // Sib. Math. J. 2013. V. 54. No. 6. P. 959–967].

5. *Азаров Д. Н., Гольцов Д. В.* О почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп некоторыми классами конечных групп // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер. "Естественные, общественные науки". 2012. Вып. 2. С. 86–91. [*Azarov D. N., Goltsov D. V.* O pochti approksimiruemosti obobshchennykh svobodnykh proizvedeny i HNN-rasshireny grupp nekotorymi klassami konechnykh grupp // Vestnik Ivan. gos. un-ta. Ser. "Estestvennye, obshchestvennye nauki". 2012. Vyp. 2. S. 86–91 (in Russian)].

6. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 5 (2002). С. 6–10. [*Azarov D. N., Tieudjo D.* Ob approksimiruemosti svobodnogo proizvedeniya grupp s obedinennoy podgruppoy kornevym klassom grupp // Nauch. tr. Ivan. gos. un-ta. Matematika. Vyp. 5 (2002). S. 6–10 (in Russian)].

7. *Варламова И. А., Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости конечными группами групп Баумслага–Солитера // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер. "Естественные, общественные науки". 2012. Вып. 2. С. 107–114. [*Varlamova I. A., Moldavanskii D. I.* Ob approksimiruemosti konechnymi gruppami grupp Baumslaga-Solitera // Vestnik Ivan. gos. un-ta. Ser. "Estestvennye, obshchestvennye nauki". 2012. Vyp. 2. S. 107–114 (in Russian)]

8. *Гольцов Д. В.* О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Чебышевский сб. 2013. Т. 14. Вып. 3. С. 34–41. [*Goltsov D. V.* O pochti approksimiruemosti kornevymi klassami obobshchennykh svobodnykh proizvedeny i HNN-rasshireny grupp // Chebyshevskii Sb. 2013. T. 14. Vyp. 3. S. 34–41 (in Russian)].

9. *Гудовщикова А. С., Соколов Е. В.* Два замечания о классе конечных разрешимых π-групп // Вестн. молодых ученых ИвГУ. 2012. Вып. 12. С. 3–4. [*Gudovshchikova A. S., Sokolov E. V.* Dva zamechaniya o klasse konechnykh razreshimykh π-grupp // Vestn. molodykh uchenykh IvGU. 2012. Vyp. 12. S. 3–4 (in Russian)].

10. *Иванова О. А., Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными π-группами некоторых групп с одним определяющим соотношением // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2008. Вып. 6. С. 51–58. [*Ivanova O. A., Moldavanskii D. I.* Approksimiruemost

konechnymi π-gruppami nekotorykh grupp s odnim opredelyayushchim sootnosheniem // Nauch. tr. Ivan. gos. un-ta. Matematika. 2008. Vyp. 6. S. 51–58 (in Russian)].

11. *Коптева А. А., Соколов Е. В.* Некоторые аппроксимационные свойства HNN-расширений групп // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер. “Естественные, общественные науки”. 2013. Вып. 2. С. 78–88. [*Kopteva A. A., Sokolov E. V.* Nekotorye approksimatsionnye svoystva HNN-rasshireny grupp // Vestnik Ivan. gos. un-ta. Ser. “Estestvennye, obshchestvennye nauki”. 2013. Vyp. 2. S. 78–88. (in Russian)].

12. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. 448 с. [*Lyndon R., Schupp P.* Combinatorial group theory. Springer-Verlag, 1977. 339 p.].

13. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60. [*Maltsev A. I.* O gomomorfizmakh na konechnye gruppy // Uchen. zap. Ivan. gos. ped. in-ta. 1958. T. 18. S. 49–60 (in Russian)].

14. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами некоторых HNN-расширений групп // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”. 2003. Вып. 3. С. 102–116. [*Moldavanskii D. I.* Approksimiruemost konechnymi p-gruppami nekotorykh HNN-rasshireny grupp // Vestnik Ivan. gos. un-ta. Ser. “Biologiya, Khimiya, Fizika, Matematika”. 2003. Vyp. 3. S. 102–116 (in Russian)].

15. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”. 2000. Вып. 3. С. 129–140. [*Moldavanskii D. I.* Approksimiruemost konechnymi p-gruppami HNN-rasshireny // Vestnik Ivan. gos. un-ta. Ser. “Biologiya, Khimiya, Fizika, Matematika”. 2000. Vyp. 3. S. 129–140 (in Russian)].

16. *Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширений нильпотентных групп // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”. 2006. Вып. 3. С. 128–132. [*Moldavanskii D. I.* Ob approksimiruemosti konechnymi p-gruppami HNN-rasshireny nilpotentnykh grupp // Vestnik Ivan. gos. un-ta. Ser. “Biologiya, Khimiya, Fizika, Matematika”. 2006. Vyp. 3. S. 128–132 (in Russian)].

17. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”. 2002. Вып. 3. С. 123–133. [*Moldavanskii D. I.* Finitnaya approksimiruemost nekotorykh HNN-rasshireny grupp // Vestnik Ivan. gos. un-ta. Ser. “Biologiya, Khimiya, Fizika, Matematika”. 2002. Vyp. 3. S. 123–133 (in Russian)].

18. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44. № 6. С. 842–845. [*Moldavanskii D. I.* Finitnaya approksimiruemost niskhodyashchikh HNN-rasshireny grupp // Ukr. mat. zhurn. 1992. T. 44. No. 6. S. 842–845 (in Russian)].

19. *Соколов Е. В.* Отделимость подгрупп некоторыми классами конечных групп. LAP Lambert Academic Publishing, 2012. 124 с. ISBN 978-3-8465-8581-8. [*Sokolov E. V.* Otdelimost podgrupp nekotorymi klassami konechnykh grupp. LAP Lambert Academic Publishing, 2012. 124 s. ISBN 978-3-8465-8581-8 (in Russian)].

20. *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. “Естественные, общественные науки”. 2012. Вып. 2. С. 139–141. [*Tumanova E. A.* Approksimiruemost konechnymi p-gruppami HNN-rasshireny

grupp // Vestn. Ivan. gos. un-ta. Ser. “Estestvennye, obshchestvennye nauki”. 2012. Vyp. 2. S. 139–141 (in Russian)].

21. *Туманова Е. А.* Некоторые достаточные условия аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Научно-исследовательская деятельность в классическом университете: ИвГУ — 2013: Сборник статей по итогам научной конференции. Иваново, 28 января–8 февраля 2013 г. Иваново: ИвГУ, 2013. С. 9–12. [*Tumanova E. A.* Nekotorye dostatochnye usloviya approksimiruemosti obobshchennykh svobodnykh proizvedeny kornevymi klassami grupp // Nauchno-issledovatelskaya deyatelnost v klassicheskom universitete: IvGU — 2013: Sbornik statey po itogam nauchnoy konferentsii. Ivanovo, 28 yanvarya–8 fevralya 2013 g. Ivanovo: IvGU, 2013. S. 9–12 (in Russian)].

22. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. “Естественные, общественные науки”. 2013. Вып. 2. С. 94–102. [*Tumanova E. A.* Ob approksimiruemosti konechnymi π-gruppami HNN-rasshireny grupp // Vestn. Ivan. gos. un-ta. Ser. “Estestvennye, obshchestvennye nauki”. 2013. Vyp. 2. S. 94–102 (in Russian)].

23. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Материалы XII Международной конференции “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”, посвященной восьмидесятилетию профессора В. Н. Латышева. Тула, 21–25 апреля 2014 г. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. С. 97–100. [English transl.: *Tumanova E. A.* Certain residually root (class of groups) generalized free products with normal amalgamation // Proceedings of XII International Conference “Algebra and Number Theory: Modern Problems and Application”, dedicated to 80-th anniversary of Professor V. N. Latyshev. Tula, 21–25 April 2014. Tula: TSPU, 2014. P. 191–193].

24. *Andreadakis S., Raptis E., Varsos D.* A characterization of residually finite HNN-extensions of finitely generated Abelian groups // Arch. Math. 1988. V. 50. No. 6. P. 495–501.

25. *Andreadakis S., Raptis E., Varsos D.* Residual finiteness and Hopficity of certain HNN extensions // Arch. Math. 1986. V. 47. P. 1–5.

26. *Aschenbrenner M., Friedl S.* A criterion for HNN extensions of finite p-groups to be residually p // J. Pure Appl. Algebra. 2011. V. 215. No. 9. P. 2280–2289.

27. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN-extensions // Comm. Algebra. 1978. V. 6. P. 179–194.

28. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.

29. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68. P. 199–201.

30. *Borisov A. M., Sapir M.* Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms // Invent. Math. 2005. V. 160. No. 2. P. 341–356.

31. *Cohen D. E.* Residual finiteness and Britton’s lemma // J. Lond. Math. Soc. 1977. V. 16. P. 232–234.

32. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* On various rank conditions in infinite groups // Algebra and Discrete Mathematics. 2007. No. 4. P. 23–43.

33. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.

34. *Hsu T., Wise D.* Ascending HNN extensions of polycyclic groups are residually finite // J. Pure Appl. Algebra. 2003. V. 182. No. 1. P. 65–78.

35. *Raptis E., Varsos D.* Residual properties of HNN-extensions with base group an Abelian group // J. Pure Appl. Algebra. 1989. V. 59. No. 3. P. 285–290.

36. *Raptis E., Varsos D.* Some residual properties of certain HNN extensions // Bull. Greek Math. Soc. 1987. V. 28. P. 81–87.

37. *Raptis E., Varsos D.* The residual finiteness of HNN-extensions and generalized free products of nilpotent groups: A characterization // J. Aust. Math. Soc. Ser. A. 1992. V. 53. No. 3. P. 408–420.

38. *Raptis E., Varsos D.* The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. abelian group // J. Pure Appl. Algebra. 1991. V. 76. No. 2. P. 167–178.

39. *Rhemtulla A. H., Shirvani M.* The residual finiteness of ascending HNN-extensions of certain soluble groups // Ill. J. Math. 2003. V. 47. No. 1–2. P. 477–484.

40. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // ArXiv math.GR:1308.1039.

41. *Tieudjo D.* On root-class residuality of some free constructions // JP Journal of Algebra, Number Theory and applications. 2010. V. 18. No. 2. P. 125–143.

42. *Varsos D.* The residual nilpotence of the fundamental group of certain graphs of groups // Houston J. Math. 1996. V. 22. No. 2. P. 233–248.

On the Root-class Residuality of HNN-extensions of Groups

Tumanova E. A.

Ivanovo State University, Ermak str., 39, Ivanovo, 153025, Russia

Keywords: HNN-extension, root class of groups, root-class residuality

Let $\mathcal{K}$ be an arbitrary root class of groups. This means that $\mathcal{K}$ contains at least one non-unit group, is closed under taking subgroups and direct products of a finite number of factors and satisfies the Gruenberg condition: if $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ is a subnormal series of a group X such that $X/Y \in \mathcal{K}$ and $Y/Z \in \mathcal{K}$, there exists a normal subgroup T of X such that $T \subseteq Z$ and $X/T \in \mathcal{K}$. In this paper we study the property 'to be residually a $\mathcal{K}$-group' of an HNN-extension in the case when its associated subgroups coincide. Let $G = (B,\ t;\ t^{-1}Ht = H,\ \varphi)$. We get a sufficient condition for G to be residually a $\mathcal{K}$-group in the case when $B \in \mathcal{K}$ and H is normal in B, which turns out to be necessary if $\mathcal{K}$ is closed under factorization. We also obtain criteria for G to be residually a $\mathcal{K}$-group provided that $\mathcal{K}$ is closed under factorization, B is residually a $\mathcal{K}$-group, H is normal in B and satisfies at least one of the following conditions: $\mathrm{Aut}_G(H)$ is abelian (we denote by $\mathrm{Aut}_G(H)$ the group of all automorphisms of H which are the restrictions on this subgroup of all inner automorphisms of G); $\mathrm{Aut}_G(H)$ is finite; φ coincides with the restriction on H of an inner automorphism of B; H is finite; H is infinite cyclic; H is of finite Hirsh-Zaitsev rank (i. e. H possesses a finite subnormal series all factors of which are either periodic or infinite cyclic). Besides, we find a sufficient condition for G to be residually a $\mathcal{K}$-group in the case when B is residually a $\mathcal{K}$-group and H is a retract of B ($\mathcal{K}$ is not necessarily closed under the factorization in this statement).

Сведения об авторе:
Туманова Елена Александровна,
Ивановский государственный университет
аспирант