

УДК 514.17+517.51

О гипотезе Лассака для выпуклого тела

Невский М.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: mnevsk@uniyar.ac.ru

получена 23 мая 2011

Ключевые слова: выпуклое тело, ширина, осевой диаметр, гомотетия, симплекс, интерполяция, проектор

В 1993 г. М. Лассак сформулировал (в эквивалентном виде) следующую гипотезу. Если в выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят куба $[0, 1]^n$, то $\sum_{i=1}^n 1/w_i \geq 1$. Здесь w_i — ширина C в направлении i -й координатной оси. В статье даётся новое доказательство этого утверждения для $n = 2$. Также мы показываем, что для n -мерного симплекса, в который можно вписать транслят $[0, 1]^n$, справедливо $\sum_{i=1}^n 1/w_i = 1$.

1. Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \dots, x_n)$. Положим $Q_n := [0, 1]^n$. Под *транслятом* будем понимать результат параллельного переноса.

В этой статье C — выпуклое тело в \mathbb{R}^n , т. е. компактное выпуклое подмножество \mathbb{R}^n с непустой внутренностью. Через σC обозначим результат гомотетии C относительно центра тяжести с коэффициентом σ . Ниже $w_i(C)$ есть i -я ширина C , т. е. ширина C в направлении i -й координатной оси. Символом $d_i(C)$ обозначим i -й осевой диаметр C , представляющий собой максимальную длину отрезка, содержащегося в C и параллельного оси x_i . Очевидно, $w_i(C) \geq d_i(C)$. Здесь $1 \leq i \leq n$.

В 1993 г. М. Лассак [4] сформулировал следующую интересную гипотезу (мы приводим её в эквивалентном виде).

(Н1) Пусть в выпуклое тело C можно вписать транслят Q_n . Тогда

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i(C)} \geq 1. \quad (1)$$

Если $n = 1$, то C — отрезок единичной длины и (1) является равенством. В двумерной ситуации (1) доказано в [4]. Некоторые вычисления названы в том доказательстве простыми, но скучными (easy but tedious), и опущены. К настоящему

времени установлен ряд близких к (Н1) утверждений, но не эквивалентных (Н1). Из результата П. Скотта [5; теорема 1] следует, что если в C можно вписать транслят Q_n , то

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)} \geq 1. \quad (2)$$

Так как $w_i(C) \geq d_i(C)$, то это неравенство слабее, чем (1). Как доказал автор, оно остаётся справедливым и в следующей более общей ситуации (см. [2; следствие 4]).

Лемма 1. Пусть C содержит некоторый транслят Q_n и не содержит никакого транслята σQ_n при $\sigma > 1$. Тогда имеет место (2).

Нетрудно показать, что если в условии леммы 1 заменить (2) на (1), то получившееся утверждение станет неверным. В предположениях (Н1) в [3] получено соотношение

$$\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i(C)} + \frac{n-2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)} \geq 1. \quad (3)$$

Очевидно, что (3) сильнее, чем (2), но слабее, чем (1). Мы воспользуемся оценкой (3) при доказательстве теоремы 2.

Опишем содержание статьи. В пункте 2 даётся иное, нежели в [4], доказательство двумерного варианта (1). Для некоторых плоских C прямым способом доказывалось более сильное неравенство. Для других $C \subset \mathbb{R}^2$ соотношение (1) получается с помощью леммы 1. В пункте 3 доказывалось, что если $n \in \mathbb{N}$ и S — n -мерный симплекс, в который можно вписать транслят Q_n , то справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i(S)} = 1.$$

Таким образом, в частном случае, когда C — симплекс, верно утверждение, более сильное, чем (Н1). В пункте 4 формулируется гипотеза, эквивалентная (Н1). Там же приводится оценка для нормы интерполяционного проектора по вершинам симплекса $S \subset Q_n$ через величины $w_i(S)$.

2. Случай $n = 2$

Ясно, что в формулировке (Н1) слово *транслят* можно опустить, что приводит к эквивалентному утверждению. Пусть C — выпуклое тело в \mathbb{R}^2 , в которое вписан квадрат Q_2 . Положим $w_i := w_i(C)$. Существуют такие точки $a, b, g, h \in C$, что $b_1 - h_1 = w_1$, $g_2 - a_2 = w_2$ и, кроме того, $a_1, b_2, g_1, h_2 \in [0, 1]$. Обозначим через R прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям, имеют длины w_1 и w_2 и содержат a, b, g, h . Пусть u, v, s, t — точки, расположенные симметрично поочерёдно g, h, a, b на противоположных сторонах R . Это означает, что $u_1 = g_1$, $v_2 = h_2$, $s_1 = a_1$, $t_2 = b_2$ и $v_1 - h_1 = b_1 - t_1 = w_1$, $s_2 - a_2 = g_2 - u_2 = w_2$. Точки a, \dots, t будем называть *отмеченными*. Некоторые из них могут совпадать. Положим $\Delta := |(a_1 - u_1)(b_2 - v_2)|$. Если $\Delta = 0$, то $w_1 = d_1(C)$ или $w_2 = d_2(C)$.

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} \geq 1. \quad (4)$$

Если при обходе границы R отмеченные точки встречаются в порядке a, v, b, s, g, t, h, u или в порядке a, u, b, v, g, s, h, t , то

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} \geq 1 + \frac{\Delta}{w_1 w_2}. \quad (5)$$

Доказательство. Обозначим через Z выпуклую оболочку Q_2 и точек a, b, g, h . Так как $Q_2 \subset Z \subset C$ и Q_2 вписан в C , то Q_2 вписан в Z . Проведём через a, b, g, h и вершины квадрата прямые, параллельные координатным осям. Эти прямые делят R на ≤ 25 прямоугольников, 9 из которых разбивают Q_2 . Площадь центрального прямоугольника S из последних девяти равна Δ . Заметим, что сумма площадей прямоугольников D_1, D_2, D_3, D_4 , расположенных в углах R , равна $(w_1 - 1)(w_2 - 1)$. Далее $|Y|$ обозначает площадь Y .

Пусть при обходе контура R отмеченные точки следуют в порядке a, v, b, s, g, t, h, u или в порядке a, u, b, v, g, s, h, t . Из выпуклости Z вытекает, что площадь каждого D_i не превосходит суммы площадей двух смежных прямоугольников, принадлежащих Q_2 и примыкающих к границе этого квадрата. Взятые вместе с S , эти четыре пары внешних для Q_2 прямоугольников покрывают Q_2 (без внутренних пересечений). Сравнивая площади, получаем

$$(w_1 - 1)(w_2 - 1) = |D_1| + |D_2| + |D_3| + |D_4| \leq 1 - |S| = 1 - \Delta,$$

откуда следует (5) и тем более (4).

Рассмотрим другие возможные варианты следования отмеченных точек на границе R , а именно a, u, v, b, g, s, t, h или a, b, v, s, g, h, t, u . Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят в указанных случаях к соотношениям

$$(w_1 - 1)(w_2 - 1) = |D_1| + |D_2| + |D_3| + |D_4| \leq 1 + |S| = 1 + \Delta.$$

Этот подход даёт лишь

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} \geq 1 - \frac{\Delta}{w_1 w_2} \quad (6)$$

— неравенство, более слабое, чем (4). Тем не менее, и в рассматриваемой ситуации (4) имеет место. Докажем это. Пусть x и y — вершины Q_2 , расположенные на границе Z между a, h и b, g соответственно; l_1, l_2 — граничные отрезки Z , примыкающие к x ; l_3, l_4 — граничные отрезки Z , примыкающие к y . Считаем, что l_1 и l_3 направлены от x и y в одну и ту же полуплоскость относительно прямой (xy) . Обозначим через p и q вершины R , расположенные между точками u, v и s, t соответственно. Положим $F := \text{conv}(p, Z)$, $G := \text{conv}(q, Z)$. Каждый из внутренних углов выпуклого многоугольника Z при вершинах x и y не превосходит π . Это означает, что хотя бы одно из множеств F и G не содержит транслята σQ_2 при $\sigma > 1$. Допустим, этим

свойством обладает F . Так как $Q_2 \subset F$, то к выпуклому телу $F \subset \mathbb{R}^2$ применима лемма 1. Из неё следует, что

$$\frac{1}{d_1(F)} + \frac{1}{d_2(F)} \geq 1.$$

Для получения (4) осталось учесть равенства $d_i(F) = w_i(F) = w_i$.

В случае, когда какие-то из отмеченных точек совпадают, теорема доказывается по той же схеме с очевидными модификациями. \square

Неравенства $|D_1| + |D_2| + |D_3| + |D_4| \leq 1 \pm |S|$, приводящие к оценкам (5) – (6), можно наглядно проиллюстрировать с помощью рисунков. Этот путь не лишён занимательности.

Заметим, что гарантировать для всех C выполнение (5) нельзя. Точнее, если отмеченные точки следуют при прохождении границы R в порядке a, u, v, b, g, s, t, h или a, b, v, s, g, h, t, u (см. вторую часть доказательства теоремы 1), то (5) может не выполняться. Приведём пример. Пусть C — треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$. Очевидно, квадрат Q_2 вписан в C . Так как $w_1 = w_2 = 2$, то (4) является равенством. В данном случае $R = [0, 2]^2$. Возьмём $a = (1, 0)$, $b = (2, 0)$, $g = (0, 2)$, $h = (0, 1)$. Тогда $u = (0, 0)$, $v = (2, 1)$, $s = (1, 2)$, $t = u = (0, 0)$, $\Delta = |(a_1 - u_1)(b_2 - v_2)| = 1$. Значит, правая часть (5) равна $5/4$, что превышает левую часть (равную 1).

3. Случай, когда C — симплекс

В этом пункте $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим ситуацию, когда выпуклое тело C представляет собой невырожденный n -мерный симплекс, т. е. выпуклую оболочку $n+1$ точек (вершин симплекса) с непустой внутренностью. В статье [2; теорема 3] было доказано следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть S — невырожденный симплекс в \mathbb{R}^n . Неравенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq 1 \tag{7}$$

эквивалентно тому, что S содержит транслят Q_n . Равенство в (7) имеет место тогда и только тогда, когда S содержит транслят Q_n и каждая $(n-1)$ -мерная грань S содержит вершину этого транслята.

С помощью этого утверждения, а также неравенства (3) нетрудно установить справедливость (Н1) в случае $C = S$. Более того, в этой ситуации неравенство в (1) становится равенством.

Теорема 2. Пусть в n -мерный симплекс S можно вписать транслят Q_n . Тогда

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i(S)} = 1, \tag{8}$$

$$w_1(S) = d_1(S), \quad \dots, \quad w_n(S) = d_n(S). \tag{9}$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\sum_{i=1}^n 1/w_i(S) \geq 1$. Для $n = 1$ это следует из равенства $w_1(S) = 1$. Для $n = 2$ достаточно воспользоваться (4). Пусть $n \geq 3$. Применим к выпуклому телу S неравенство (3):

$$\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i(S)} + \frac{n-2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \geq 1. \quad (10)$$

Так как в S можно вписать транслят Q_n , то к S также применима вторая часть леммы 2. Тем самым, $\sum_{i=1}^n 1/d_i(S) = 1$. С учетом этого (10) даёт

$$\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i(S)} + \frac{n-2}{n} \geq 1,$$

откуда и следует $\sum_{i=1}^n 1/w_i(S) \geq 1$. Теперь используем соотношения $w_i(S) \geq d_i(S)$, благодаря которым $1/d_i(S) \geq 1/w_i(S)$. Имеем:

$$1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i(S)} \geq 1.$$

Ясно, что в этой цепочке оба неравенства обращаются в равенства. Первое из этих равенств даёт (9), а второе совпадает с (8). \square

Из соображений подобия немедленно получаем следующий результат.

Следствие. Пусть в симплекс $S \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят σQ_n при некотором $\sigma > 0$. Тогда для любого $i = 1, \dots, n$ верно $w_i(S) = d_i(S)$.

Для $n = 1$ и $n = 2$ верно и утверждение, обратное к приведённому следствию. Минимальное n , для которого это обратное утверждение не верно, равно 3. Действительно, пусть S — правильный тетраэдр с длинами рёбер $\sqrt{2}$, вписанный в Q_3 . Таковым является, например, тетраэдр с вершинами $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$. Каждый из трёх отрезков, соединяющих центры скрещивающихся рёбер S , параллелен одной из координатных осей и имеет длину 1. Поэтому для любого $i = 1, 2, 3$ верно $d_i(S) = w_i(S) = 1$. Максимальное σ , при котором S содержит транслят σQ_3 , равно $1/3$. При этом куб $(1/3)Q_3$ располагается в S таким образом, что каждая грань S содержит ровно одну из его вершин. Четыре вершины куба $(1/3)Q_3$ не принадлежат границе S . Это означает, что в S нельзя вписать транслят σQ_3 ни при каком $\sigma > 0$.

Заметим также, что если в выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят Q_n и для него выполнены равенства (8) – (9), то C не обязательно является симплексом. Пример: $n = 2$, C — квадрат с вершинами $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$.

4. Заключительные замечания

4.1. Приведём очевидное неуплощаемое неравенство, противоположное (1). Если в выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят Q_n , то $w_i(C) \geq 1$, поэтому

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i(C)} \leq n. \quad (11)$$

Равенство в (11) эквивалентно условию $w_1(C) = \dots = w_n(C) = 1$, которое выполняется тогда и только тогда, когда C есть транслят Q_n .

4.2. Сформулируем в дополнение к (Н1) ещё одну гипотезу.

(Н2) Пусть в выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят Q_n . Тогда существует выпуклое тело C' , содержащее транслят Q_n , не содержащее транслята σQ_n при $\sigma > 1$, и такое, что $d_i(C') = w_i(C)$, $i = 1, \dots, n$.

Покажем, что (Н2) эквивалентна (Н1). Действительно, в предположении справедливости (Н2) утверждение (Н1) сразу получается с помощью леммы 1. Именно таким способом выше была доказана вторая часть теоремы 1. Допустим теперь, что справедлива гипотеза (Н1). Зафиксируем выпуклое тело C , удовлетворяющее условию (Н1). Для $w_i = w_i(C)$ рассмотрим набор точек

$$z^{(1)} = (w_1, 0, \dots, 0), \quad z^{(2)} = (0, w_2, \dots, 0), \quad \dots, \quad z^{(n)} = (0, 0, \dots, w_n).$$

Положим $C' := \text{conv}(z^{(1)}, \dots, z^{(n)}, Q_n)$. Нетрудно показать, что выпуклое тело C' удовлетворяет условию (Н2). Поэтому из (Н1) следует (Н2). К сожалению, вопрос о справедливости (Н2) при $n > 2$ является открытым.

4.3. Рассматриваемые в настоящей статье величины $w_i(C)$ в случае, когда $C = S$ — симплекс, могут быть использованы для оценивания нормы интерполяционного проектора по вершинам S . Приведём результат такого рода. Пусть $C(Q_n)$ — пространство непрерывных функций $f : Q_n \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|$; $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — пространство многочленов от n переменных степени ≤ 1 . Для невырожденного n -мерного симплекса S , принадлежащего Q_n , рассмотрим интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, узлы которого совпадают с вершинами S . Обозначим через $\|P\|$ норму P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$. В этих предположениях справедливы оценки

$$\|P\| \geq \frac{2}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} - 1 \right) + 1 \geq \frac{2}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i(S)} - 1 \right) + 1. \quad (12)$$

Левое неравенство доказано в [1; следствие 4.11]; правое неравенство вытекает из соотношений $w_i(S) \geq d_i(S)$. Заметим, что если в S можно вписать транслят куба σQ_n при некотором $0 < \sigma < 1$, то правое неравенство в (12) можно заменить на равенство (см. следствие пункта 3).

Список литературы

1. Невский М.В. Об одном свойстве n -мерного симплекса // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 580–593.
2. Nevskii M. Properties of axial diameters of a simplex // Discrete Comput. Geom. 2011. V. 46, № 2. P. 301–312.
3. Lassak M. Relationships between widths of a convex body and of an inscribed parallelepiped // Bull. Austral. Math. Soc. 2001. V. 63. P. 133–140.

4. Lassak M. Approximation of convex bodies by rectangles // *Geom. Dedic.* 1993. V. 47. P. 111–117.
5. Scott P.R. Lattices and convex sets in space // *Quart. J. Math. Oxford.* 1985. V. 36, № 2. P. 359–362.

On the Lassak Conjecture for a Convex Body

Nevskii M.V.

Keywords: convex body, width, axial diameter, homothety, simplex, interpolation, projection

In 1993 M. Lassak formulated (in the equivalent form) the following conjecture. *If we can inscribe a translate of the cube $[0, 1]^n$ into a convex body $C \subset \mathbb{R}^n$, then $\sum_{i=1}^n 1/w_i \geq 1$.* Here w_i denotes the width of C in the direction of the i th coordinate axis. The paper contains a new proof of this statement for $n = 2$. Also we show that if a translate of $[0, 1]^n$ can be inscribed into the n -dimensional simplex, then for this simplex holds $\sum_{i=1}^n 1/w_i = 1$.

Сведения об авторе:

Невский Михаил Викторович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

кандидат физико-математических наук, доцент,

декан математического факультета