Модел. и анализ информ. систем. Т. **18**, № **3** (2011) 12–20

УДК 517.929

Основные квазинормальные формы для двухкомпонентных систем параболических уравнений

Кащенко С.А.[1]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

получена 1 сентября 2011

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздыванием, квазинормальная форма, малый параметр

Приводится перечень основных квазинормальных форм, которые возникают при анализе динамики нелинейных сингулярно возмущенных параболических уравнений в случаях, близких к критическим в задачах об устойчивости.

Введение. Рассматривается вопрос о локальной – в окрестности нулевого состояния равновесия – динамике двух типов нелинейных систем параболических уравнений

$$a(\alpha) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = (D_0 + \varepsilon D_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_0 + \varepsilon^\alpha A_1)u + F(u, u)$$

и

$$b(\alpha) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = (D_0 + \varepsilon D_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_0 + \varepsilon^\alpha A_1)u + F(u, \frac{\partial u}{\partial x})$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x).$$

Здесь $u = (u_1, u_2)$, матрица диффузии $D(\varepsilon) = D_0 + \varepsilon D_1$ при всех достаточно малых ε имеет собственные значения с положительными вещественными частями, достаточно гладкая нелинейная вектор-функция $F(u)$ имеет в нуле порядок малости выше первого. Относительно нелинейной вектор-функции $F(u, v)$ предполагаем, что она линейна по каждому аргументу (тем самым, $F(0, v) = F(u, 0) = 0$). Параметры ε и α положительны, причем параметр ε является достаточно малым, т.е. $0<\varepsilon\ll 1$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (государственные контракты №П2223, № 14.740.11.0873)

Важную роль играет расположение корней характеристического уравнения линеаризованной на нулевом состоянии равновесия системы

$$\det(A_0 + \varepsilon^\alpha A_1 - n^2(D_0 + \varepsilon D_1) - \lambda I) = 0, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пусть

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det A_0, \quad a_0 = \mathrm{Sp} A_0 = a_1 + a_4.$$

Предполагается, что среди его корней нет таких, вещественные части которых положительны и отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$, но есть корни, стремящиеся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\Delta \geqslant 0, \quad a_0 \leqslant 0.$$

В том случае, когда оба собственных значения D_0 имеют положительные вещественные части, характеристическое уравнение при ε=0 может иметь не более четырех корней на мнимой оси. Тогда при малых ε исходная краевая задача имеет устойчивое локальное инвариантное многообразие, размерность которого совпадает с количеством таких корней, а поведение всех решений при $t \to \infty$ из достаточно малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля определяется поведением решений только на этом инвариантном многообразии. Исходная краевая задача на нем может быть записана в виде специальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений – нормальной формы. Эти результаты хорошо известны, и на них здесь не останавливаемся.

Ниже предполагаем, что рассматриваемые системы являются сингулярно возмущенными, то есть матрица D_0 имеет нулевое собственное значение. В этом случае теория инвариантных интегральных многообразий, вообще говоря, места не имеет, и метод нормальных форм непосредственно неприменим. В [1–5] был разработан специальный метод построения так называемых квазинормальных форм (КНФ) – специальных нелинейных эволюционных уравнений, не содержащих малый параметр. Динамика таких уравнений определяет поведение решений исходных краевых задач.

В §1 приведен перечень КНФ в случаях, когда матрица D_0 нулевая: D_0=0. В §2 предполагается, что у D_0 одно собственное значение нулевое, а другое – положительное, а в §3 матрица D_0 имеет вид $D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В работах [1–5] приведены явные формулы для всех фигурирующих ниже коэффициентов и получены формулы, связывающие решения исходных краевых задач и решения КНФ. Отметим лишь особую роль фигурирующего ниже вещественного параметра $\varkappa$. Этот параметр изменяется от $-\infty$ до ∞, и все уравнения следует рассматривать для каждого значения $\varkappa$. Тем самым можно говорить о том, что КНФ в данном случае являются семейства уравнений.

Отметим еще, что вместо периодических краевых условий можно рассматривать краевые условия Дирихле ($u(t,0)$=$u(t,1)$=0) или Неймана $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=1} = 0\right)$. Соответствующие изменения для КНФ (по сравнению с периодическими краевыми условиями) несущественны, поэтому приводить их отдельно не будем. В наиболее интересной ситуации такие КНФ приведены в [1].

§ **1.** Малая диффузия

1.1. Случай простого нулевого собственного значения матрицы A_0.

Здесь ξ – вещественная 2π-периодическая по y скалярная переменная; все параметры вещественны.

$$a(\alpha): \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \varkappa^2 d\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \gamma\xi + \delta\xi^2,$$

$$b(\alpha): \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \varkappa^2 d\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \gamma\xi + \varkappa\delta\xi\frac{\partial\xi}{\partial y},$$

где $d \geqslant 0$. Если $d=0$, то вместо слагаемого $\varkappa^2 d\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}$ имеем $\varkappa^4 d_1\frac{\partial^4\xi}{\partial y^4}$ и $d_1 \geqslant 0$.

Если $\delta=0$, то

$$a(\alpha): \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \varkappa^2 d\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \gamma\xi + \delta_1\xi^3,$$

$$b(\alpha): \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \varkappa^2 d\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \gamma\xi + \varkappa^2\left[\delta_1\xi^2\frac{\partial\xi}{\partial y} + \delta_2\xi\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right].$$

Через τ обозначено медленное время $\tau=\varepsilon^\alpha t$; $y = (\varkappa\varepsilon^{(\alpha-1)/2} + \theta)x$ (при $\alpha=1$ имеем $\varkappa=1$, $\theta=0$). При $0<\alpha<1$ вместо

$$\varkappa\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{стоит оператор} \qquad L_n = \left(\varkappa_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \varkappa_n\frac{\partial}{\partial y_n}\right).$$

1.2. Случай пары чисто мнимых собственных значений матрицы A_0.

Здесь ξ – комплексная 2π-периодическая по y скалярная переменная; все параметры комплексны.

$$a(\alpha): \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \varkappa^2 d\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \gamma\xi + \delta|\xi|^2\xi,$$

$$b(\alpha): \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \varkappa^2 d\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \gamma\xi + \varkappa^2\left[\delta_1\xi\left|\frac{\partial\xi}{\partial y}\right|^2 + \delta_2|\xi|^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \delta_3\xi^2\frac{\partial^2\bar\xi}{\partial y^2} + \delta_4\bar\xi\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right].$$

1.3. Случай нулевого собственного значения матрицы A_0.

Здесь ξ – комплексная 2π-периодическая по y скалярная переменная; все параметры вещественны.

$$a(\alpha), b(\alpha) \text{ при } 0<\alpha<1: \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \varkappa^2 d\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \gamma\xi + \delta|\xi|^2\xi,$$

$$a(1), b(1): \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\tau} = d\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + 2i\theta\frac{\partial\xi}{\partial y} - \theta^2\xi\right] + \gamma\xi + \delta|\xi|^2\xi.$$

Замечание. Случай пары чисто мнимых собственных значений у $A(z_0)$ при $z_0{>}0$ для двухкомпонентных систем не реализуется.

1.4. Случай пары чисто мнимых собственных значений A_0 и нулевого собственного значения $\mathbf{A}(\mathbf{z_0})$ при $z_0{>}0$.

Здесь 2π-периодические по y переменные ξ и η – комплексные.

$$a(\alpha): \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial\tau} = \varkappa^2 d_1\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \gamma_1\xi + \xi[\delta_1|\xi|^2 + \delta_2|\eta|^2], \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial\tau} = \varkappa^2 d_2\left[\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - 2i\theta\dfrac{\partial\eta}{\partial y} - \theta^2\eta\right] + \gamma_2\eta + \eta[\delta_3|\xi|^2 + \delta_4|\eta|^2], \end{cases}$$

$$b(\alpha): \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial\tau} = \varkappa^2 d_1\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \gamma_1\xi + \delta_0\xi|\eta|^2 + \\ \qquad + \varkappa^2\left[\delta_1\xi\left|\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right|^2 + \delta_2|\xi|^2\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \delta_3\xi^2\dfrac{\partial^2\bar\xi}{\partial y^2} + \delta_4\bar\xi\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right], \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial\tau} = \varkappa^2 d_2\left[\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - 2i\theta\dfrac{\partial\eta}{\partial y} - \theta^2\eta\right] + \gamma_2\eta + \eta[\delta_5|\xi|^2 + \delta_6|\eta|^2]. \end{cases}$$

§ 2. Контрастные структуры

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D_0(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$a_1{=}0$, $\quad \mathrm{Sp}A_0{=}a_4{\leqslant}0$, $\quad \Delta{=}\det A{\geqslant}0$.

2.1. Случай $1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\Delta \neq 0$, $a_4 \neq 0$, ξ и все параметры вещественные.

$$a(\alpha): \qquad \varkappa^2\frac{\partial^3\xi}{\partial\tau\partial y^2} = \varkappa^4\frac{\partial^4\xi}{\partial y^4} + \varkappa^2 a_{11}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \Delta\xi + \delta\varkappa^4\left[\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)^2 - M\left(\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)^2\right)\right]$$

с периодическими краевыми условиями $\xi(\tau, y+2\pi) \equiv \xi(\tau, y)$ и $M(\xi(\tau,y)) = 0$. Здесь приняты обозначения

$$M(f(\tau,y)) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau,y)dy.$$

$$b(\alpha): \qquad \varkappa^2\frac{\partial^3\xi}{\partial\tau\partial y^2} = \varkappa^4\frac{\partial^4\xi}{\partial y^4} + \varkappa^2 a_{11}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \Delta\xi + \delta\varkappa^5\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\frac{\partial^3\xi}{\partial y^3}$$

с теми же краевыми условиями.

2.2. Случай $0 < \alpha < 1/2$, $\Delta \neq 0$, $a_4 \neq 0$, ξ и все параметры вещественные.

2.2.1. Быстро осциллирующие структуры.

В этом случае получаем те же уравнения, что и в п. 2.1, но без слагаемого $\Delta\xi$. Поэтому их можно записать в виде параболических уравнений относительно $w = \varkappa^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{11} w + \delta \varkappa^2 f,$$

для $a(\alpha)$:
$$f = w^2 - M(w^2),$$

для $b(\alpha)$:
$$f = \varkappa w \frac{\partial w}{\partial y}.$$

2.2.2. Медленно осциллирующие структуры.

$a(\alpha)$:
$$\varkappa^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial y^2} = \varkappa^2 a_{11} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \Delta\xi + \delta \varkappa^4 \left[\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)^2 - M \left(\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right],$$

$b(\alpha)$:
$$\varkappa^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial y^2} = \varkappa^2 a_{11} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \Delta\xi + \delta \varkappa^5 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3}.$$

2.2.3. Структуры для $a(\alpha)$, зависящие и от медленно, и от быстро осциллирующих пространственных переменных.

$$\varkappa_1^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial y_1^2} = \varkappa_1^4 \frac{\partial^4 \xi}{\partial y_1^4} + \varkappa_1^2 a_{11} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \delta \varkappa_1^2 \left[\varkappa_1^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1^2} \right)^2 - \varkappa_1^2 M \left(\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1^2} \right)^2 \right) + 2\varkappa_2^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y_2^2} \right],$$

$$\varkappa_2^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tau \partial y_2^2} = \varkappa_2^2 a_{11} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y_2^2} + \Delta\eta +$$
$$+ \delta \varkappa_2^2 \left[\varkappa_2^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y_2^2} \right)^2 - \varkappa_2^2 M \left(\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y_2^2} \right)^2 \right) + \varkappa_1^2 M \left(\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1^2} \right)^2 \right) - \varkappa_1^2 M \left(M \left(\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1^2} \right)^2 \right) \right) \right].$$

2.3. Случай $0 < \alpha \leqslant 1$, $\Delta = -a_2 a_3 = 0$.

Пусть $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$. Тогда

$a(1)$:
$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial x^2} - a_4 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} - a_4 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (a_{11} - a_4) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_3 a_{21} \xi +$$
$$+ \delta \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_4 \xi \right)^2 + (\delta_1 + \delta_2) a_3 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_4 \xi \right) \xi + \delta_3 a_3^2 \xi^2;$$

$b(1)$:
$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial x^2} - a_4 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} - a_4 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (a_{11} - a_4) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_3 a_{21} \xi + \delta \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_4 \xi \right) \times$$
$$\times \left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} - a_4 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \delta_1 a_3 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a_4 \xi \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \delta_2 a_3 \left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} - a_4 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \xi + \delta_3 a_3^2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial x};$$

а для $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ при $0<\alpha<1$ верны формулы из раздела 1.1.

2.4. Случай $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$.

$$a(1):\quad \frac{\partial^3\xi}{\partial\tau\partial x^2} - a_4\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} - a_4\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + a_{11}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - a_4\xi\right) + \\ + a_2a_{21}\xi + \delta\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - a_4\xi\right)^2 + \varkappa a_2\xi^2;$$

$$b(1):\quad \frac{\partial^3\xi}{\partial\tau\partial x^2} - a_4\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} - a_4\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + a_{11}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - a_4\xi\right) + \\ + a_2a_{21}\xi + \delta\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - a_4\xi\right)\left(\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} - a_4\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) + \varkappa a_2\xi\frac{\partial\xi}{\partial x};$$

а для $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ при $0<\alpha<1$ верны формулы из раздела 1.1.

2.5. Пусть $a_2 = a_3 = 0$. Тогда для $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ при $0<\alpha\leqslant 1$ верны формулы из раздела 1.1.

§ 3. Сингулярно возмущенные системы при $D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$D(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -d_1 & d_2 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2), \qquad d_1 > 0, \quad d_2 > 0.$$

$1/2<\alpha\leqslant 1$, $a_3 \geqslant 0$, $\Delta \geqslant 0$, $a_0 = a_1 + a_4 \leqslant 0$.

3.1. Пусть $a_3 = 0$, $\Delta = 0$, $a_0 < 0$. Тогда

$$a(1):\quad a_4\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = d_1\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} + (d_1a_2 + a_{21})\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + (a_{11}a_4 - a_{21}a_2)\xi + \delta_1\xi^2 - \delta_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\xi^2),$$

$$a(\alpha)\ (1/2<\alpha<1):\quad a_4\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \varkappa^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varkappa^2 d_1\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + a_{21}\xi - \delta_2\xi^2).$$

$$b(1):\quad a_4\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = d_1\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} + (d_1a_2 + a_{21})\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + (a_{11}a_4 - a_{21}a_2)\xi + \delta_1\xi\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{1}{2}\delta_2\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\xi^2),$$

$$b(\alpha)\ (1/2<\alpha<1):\quad a_4\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \varkappa^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(\varkappa^2 d_1\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + a_{21}\xi - \frac{1}{2}\delta_2\varkappa\frac{\partial}{\partial y}(\xi^2)\Big).$$

3.2. Пусть $a_4 = 0$, $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$. Тогда

$$a(1):\quad a_1\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = d_1\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} + (d_1a_2 + a_{21})\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + (a_1a_{22} - a_2a_{21})\xi + \\ + \delta_1\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + a_2\xi\right)^2 + \delta_2{a_1}^2\xi^2 - \delta_3\xi\Big(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + a_2\xi\Big),$$

$$a(\alpha)\ (1/2<\alpha<1):\quad a_1\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \varkappa^4 d_1\frac{\partial^4\xi}{\partial y^4} - a_{21}\varkappa^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \delta_1\varkappa^4\Big(\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\Big)^2.$$

$b(1):$
$$a_1\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=d_1\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4}+(d_1a_2+a_{21})\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+(a_1a_{22}-a_2a_{21})\xi+\delta_1\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+a_2\xi\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}+a_2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)+\delta_2\xi\frac{\partial\xi}{\partial x}-\delta_3\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+a_2\xi\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}-\delta_4\xi\left(\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}+a_2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right),$$

$b(\alpha)$ $(1/2<\alpha<1)$:
$$a_1\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=\varkappa^4d_1\frac{\partial^4\xi}{\partial y^4}-a_{21}\varkappa^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\delta_1\varkappa^5\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\frac{\partial^3\xi}{\partial y^3}.$$

3.3. Пусть $a_3>0$, $\Delta=0$, $a_0=0$. Тогда

$a(1):$
$$2{a_3}^{3/2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t\partial s}=\varepsilon\Big[-d_1a_3\frac{\partial^4\xi}{\partial s^4}+{a_3}^{3/2}d_2\frac{\partial^3\xi}{\partial s^3}+a_1(d_1a_1+d_2a_3)\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}+$$
$$+a_3a_{21}\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}-{a_3}^{3/2}a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial s}-\delta_1\xi+a_3P(\xi,\eta,\alpha)-a_1P(\xi,\eta,\beta)+$$
$$+{a_3}^{3/2}\frac{\partial}{\partial s}P(\xi,\eta,\beta)-M\big(a_3P(\xi,\eta,\alpha)-a_1P(\xi,\eta,\beta)\big)\Big],$$
$$\xi(t,s+2\pi)\equiv\xi(t,s),\qquad M(\xi)=0.$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=(A_0+\varepsilon^\alpha A_1)\eta+\varepsilon\left[F(\eta,\eta)+f_1M\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)^2\right)\right]+f_2M(\xi^2).$$

Здесь приняты обозначения
$$P(\xi,\eta,\nu)=p_1\left(\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)^2+p_2\xi^2+p_3\xi\frac{\partial\xi}{\partial s}+p_4\eta_1\xi+p_5\eta_1\frac{\partial\xi}{\partial s}+p_6\eta_2\frac{\partial\xi}{\partial s}.$$

$a(\alpha)$ $(1/2<\alpha<1)$:
$${a_3}^{3/2}\varkappa\frac{\partial^2\xi}{\partial\tau\partial s}=-d_1a_4\varkappa^4\frac{\partial^4\xi}{\partial s^4}+a_3a_{21}\varkappa^2\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}+$$
$$+\delta_1\varkappa^3\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)^2+a_3\varkappa^2(\delta_2\eta_1+\delta_3\eta_2)\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2},$$
$$\xi(\tau,s+2\pi)\equiv\xi(\tau,s),\qquad M(\xi)=0.$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=(A_0+\varepsilon^\alpha A_1)\eta+\varepsilon^\alpha\left[F(\eta,\eta)+d_1M\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)^2\right)\right].$$

Здесь $\tau=\varepsilon^{\gamma_0}t$, $\gamma_0=(3\alpha+1)/2$, $s=(\varkappa\varepsilon^{(\alpha-1)/2}+\theta)(\sqrt{a_3}t+x)$, $\varkappa\neq0-$ произвольно фиксировано, $\theta=\theta(\varkappa\varepsilon)\in[0,1)$ и дополняет до целого выражение $\varkappa\varepsilon^{(\alpha-1)/2}$.

$b(1):$
$$2{a_3}^{3/2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t\partial s}=\varepsilon\Big[-d_1a_3\frac{\partial^4\xi}{\partial s^4}+{a_3}^{3/2}d_2\frac{\partial^3\xi}{\partial s^3}+a_1(d_1a_1+d_2a_3)\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}+$$
$$+a_3a_{21}\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}-{a_3}^{3/2}a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial s}-a_1[a_1a_{21}+a_3a_{22}]\xi+a_3Q(\xi,\eta,\alpha)-a_1Q(\xi,\eta,\beta)+$$
$$+{a_3}^{1/2}\frac{\partial}{\partial s}Q(\xi,\eta,\beta)-M(a_3Q(\xi,\eta,\alpha)-a_1Q(\xi,\eta,\beta))\Big],$$

$$\xi(t, s+2\pi) \equiv \xi(t,s), \qquad M(\xi) = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (A_0 + \varepsilon^{\alpha} A_1)\eta + \varepsilon g M\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2\right),$$

где

$$Q(\xi,\eta,\nu) = q_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}\frac{\partial \xi}{\partial s} + q_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}\xi + q_3\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2 + q_4 \frac{\partial \xi}{\partial s}\xi + q_5\eta_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} + \\ + q_6\eta_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} + q_7\eta_1 \frac{\partial \xi}{\partial s} + q_8\eta_2 \frac{\partial \xi}{\partial s},$$

$b(\alpha)$ $(1/2<\alpha<1)$:

$$2{a_3}^{3/2}\varkappa \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial s} = -d_1 a_4 \varkappa^4 \frac{\partial^4 \xi}{\partial s^4} + a_3 a_{21}\varkappa^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} + \\ + \delta\varkappa^4 \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}\right)\right) + {a_3}^{1/2}[q_5\eta_1 + q_6\eta_2]\frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3},$$

$$\xi(\tau, s+2\pi) \equiv \xi(\tau,s), \qquad M(\xi) = 0.$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = A_0\eta + \varepsilon^{\alpha}\left[A_1\eta + F(\eta,\eta) + gM\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2\right)\right].$$

Общее замечание. При $\alpha < 1$ следует рассмотреть все уравнения с заменой

$$\varkappa \frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{на} \qquad \left(\varkappa_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \varkappa_n \frac{\partial}{\partial y_n}\right).$$

Список литературы

1. Кащенко С. А. О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // ДАН. 1988. Т. 299, № 5. С. 1049–1053.

2. Кащенко С. А. Пространственные особенности высокомодовых бифуркаций двухкомпонентных систем с малой диффузией // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 2. С. 262–270.

3. Kashchenko S. A. Normalization in the Systems with Small Diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6. No. 6. P. 1093-1109.

4. Kashchenko S. A. Bifurcational Features in Systems of Nonlinear Parabolic Equations with Weak Diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15. No. 11. P. 3595—3606.

5. Кащенко И. С. Мультистабильность в нелинейных параболических системах с малой диффузией // ДАН. 2010. Т. 435. № 2. С. 164–167.

Principal Quasinormal Forms for Two-Component Systems of Parabolic Equations

Kaschenko S.A.

Keywords: delay differential equation, quasinormal form, small parameter

The article includes principal quasinormal forms of singular pertubed parabolic equations systems in critical cases.

Сведения об авторе:
Кащенко Сергей Александрович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического моделирования