Модел. и анализ информ. систем. Т. **18**, № **3** (2011) 21–41

УДК 517.928

Об асимптотике критических решений систем дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами

Нестеров П.Н.[1]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: mathematix@mail.ru

получена 2 января 2011

Ключевые слова: колебательно убывающие коэффициенты, критические решения, метод усреднения, асимптотика, связанные осцилляторы.

Предложен метод построения асимптотики некоторого набора линейно независимых решений систем дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. В качестве иллюстрации использования метода построена асимптотика решений системы двух осцилляторов с медленно убывающий связью и учетом трения в одном из осцилляторов.

1. Постановка задачи. В данной работе продолжено исследование асимптотического поведения решений линейных систем дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами, начатое в статье [1]. В упомянутой работе нами предложен метод построения асимптотики при $t \to \infty$ решений системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = \Big(A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} A_{i_1 i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} A_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R(t)\Big)x, \qquad x\in\mathbb{C}^m, \quad (1)$$

где A_0, $A_{i_1\ldots i_l}(t)$, $R(t)$ — квадратные $(m\times m)$-матрицы, а $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ — скалярные функции. Здесь

1^0. A_0 — постоянная матрица с вещественными собственными значениями.
2^0. $v_1(t)\to 0, v_2(t)\to 0,\ldots,v_n(t)\to 0$ при $t\to\infty$.
3^0. $\dot{v}_1(t),\dot{v}_2(t),\ldots,\dot{v}_n(t)\in L_1[t_0,\infty)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», государственный контракт № П1229.

4^0. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1[t_0,\infty)$ для любого набора $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{k+1} \le n$.

5^0. Элементами матриц $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены.

6^0. $R(t) \in L_1[t_0,\infty)$. (Здесь и далее запись $R(t) \in L_1[t_0,\infty)$, где $R(t)$ — матрица, означает, что $f(t) = ||R(t)|| \in L_1[t_0,\infty)$ и $||\cdot||$ — некоторая матричная норма.)

Суть метода сводится к следующему. Сначала с помощью специальных замен переменных система (1) преобразуется в систему, которая не содержит осциллирующих слагаемых в главной части. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия $1^0 - 6^0$. Тогда система* (1) *при достаточно больших t заменой*

$$x = \Big[I + \sum_{i=1}^{n} Y_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} Y_{i_1i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y, \quad (2)$$

где I — единичная матрица, а элементами матриц $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, приводится к виду

$$\dot y = \Big(A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} A_{i_1i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} A_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R_1(t)\Big)y \quad (3)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\ldots i_l}$ и матрицей $R_1(t) \in L_1[t_0,\infty)$.

Этот этап называется усреднением. Матрицы A_i $(i = 1,\ldots,n)$, в частности, определяются следующим образом:

$$A_i = \mathrm{M}\big[A_i(t)\big], \qquad \mathrm{M}\big[F(t)\big] = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(s)ds.$$

На следующем этапе усредненная система (3), если это возможно, приводится к L-диагональному виду

$$\dot z = \big(\Lambda(t) + R_2(t)\big)z, \quad (4)$$

где $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(t),\ldots,\lambda_m(t)\big)$ — диагональная матрица, а $R_2(t) \in L_1[t_0,\infty)$. Для построения асимптотики фундаментальной матрицы системы (4) при $t\to\infty$ может быть использована известная теорема Н. Левинсона (см. [2,3]). Именно, пусть для каждой пары индексов (j,k) имеет место либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_j(s) - \lambda_k(s)\big)ds \le K_1, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \quad (5)$$

либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_j(s)-\lambda_k(s)\big)ds \ge K_2\ , \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \tag{6}$$

где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (Levinson). *Если выполнены условия* (5)–(6), *то фундаментальная матрица L-диагональной системы* (4) *допускает следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$*:

$$Z(t) = \big(I + o(1)\big)\exp\Big\{\int_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds\Big\}. \tag{7}$$

Условие вещественности спектра матрицы A_0 не является ограничительным для использования указанного метода. Предположим, что матрица A_0 имеет жорданову нормальную форму. Произведем в системе (1) замену переменных

$$x = \exp\{\mathrm{i}\Re t\}y, \tag{8}$$

где $\Re$ — диагональная матрица, составленная из мнимых частей собственных значений матрицы A_0. Эта замена с ограниченными по t коэффициентами переводит матрицу A_0 в матрицу $A_0 - \mathrm{i}\Re$, у которой все собственные значения вещественны. Структура системы (1) в результате замены (8) качественно не изменяется.

В практических приложениях иногда требуется определить асимптотику не всех решений системы (1), а только некоторых. Например, тех, которые определяют характер устойчивости решений. Предположим, что в системе (1) матрица A_0 имеет ровно s чисто мнимых собственных чисел, а остальные $m-s$ собственные числа имеют отрицательные вещественные части. В этой ситуации естественно ожидать, что для $m-s$ линейно независимых решений системы (1) при $t \ge t_0$ справедливы оценки

$$|x_j(t)| \le Me^{-\nu t}, \qquad \nu > 0, \qquad j = s+1, \dots, m. \tag{9}$$

Точная асимптотика этих решений обычно не представляет значительного интереса. Таким образом, нам необходимо построить асимптотику s линейно независимых решений, чей характер поведения при $t \to \infty$ не подчиняется оценкам (9). Эти решения мы будем называть критическими.

В данной работе мы укажем алгоритм построения линейной системы дифференциальных уравнений, из которой может быть определена асимптотика s критических базисных решений $x_1(t), \dots, x_s(t)$ системы (1).

В качестве примера использования изложенного в данной работе метода в заключительной части статьи мы построим асимптотику решений при $t \to \infty$ следующей системы двух связанных осцилляторов:

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \frac{a\sin\omega t}{t^\alpha}x_2 = 0,$$
$$\ddot{x}_2 + d\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \frac{b\sin\omega t}{t^\beta}x_1 = 0.$$

2. Построение «критической» системы. С помощью подходящей замены вида

$$x = Cy \tag{10}$$

от системы (1) перейдем к двум системам вида

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= B_1 y_1 + B_{11}(t) y_1 + B_{12}(t) y_2 + R_{11}(t) y_1 + R_{12}(t) y_2, \\ \dot{y}_2 &= B_2 y_2 + B_{21}(t) y_1 + B_{22}(t) y_2 + R_{21}(t) y_1 + R_{22}(t) y_2, \end{aligned} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $y_1 \in \mathbb{C}^s$, $y_2 \in \mathbb{C}^{m-s}$. Здесь все собственные числа $(s \times s)$-матрицы B_1 чисто мнимые, а собственные числа $((m-s) \times (m-s))$-матрицы B_2 имеют отрицательные вещественные части. Матрицы $B_{ij}(t)$ подходящих размеров имеют следующий вид, обусловленный исходной системой (1):

$$B_{ij}(t) = \sum_{l=1}^{n} A_l^{(ij)}(t) v_l(t) + \ldots + \sum_{1 \le l_1 \le \ldots \le l_k \le n} A_{l_1 \ldots l_k}^{(ij)}(t) v_{l_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{l_k}(t). \tag{12}$$

Элементами матриц $A_{l_1 \ldots l_p}^{(ij)}(t)$ являются тригонометрические многочлены. Наконец, матрицы $R_{ij}(t)$ принадлежат классу $L_1[t_0, \infty)$.

Для изучения системы (11) воспользуемся результатами, изложенными в работе [4]. Введем некоторые обозначения. Будем говорить, что функция $f(t)$ принадлежит классу $\mathcal{A}$, если

$$\int_t^{t+1} |f(s)| ds \to 0, \qquad t \to \infty.$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{y} = F(t, y) + R(t, y), \qquad y \in \mathbb{C}^m. \tag{13}$$

Пусть

1. $F(t, 0) = 0$; функция $F(t, y)$ непрерывна по переменной t;
2. $F(t, y) = A(t) y + f(t, y)$, где

$$\begin{aligned} &|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le \omega(r) |y_1 - y_2|, \\ &\lim_{r \to 0} \omega(r) = 0, \quad |y_j| \le r, \ j = 1, 2; \end{aligned}$$

3. Линейная система

$$\dot{y} = A(t) y \tag{14}$$

экспоненциально дихотомична на правой полуоси $t \ge 0$, т.е. выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|U(t) P_1 U^{-1}(s)\| &\le K e^{-\alpha(t-s)}, \qquad 0 \le s \le t, \\ \|U(t) P_2 U^{-1}(s)\| &\le K e^{-\alpha(s-t)}, \qquad 0 \le t \le s. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $U(t)$ — матрица Коши системы (14) ($U(0) = I$), и $P_1 + P_2 = I$, $P_j^2 = P_j$, $j = 1, 2$. Кроме того, пусть $\operatorname{rank} P_1 = k$;

4. $R(t, 0) \in \mathcal{A}$;
5. $|R(t, y_1) - R(t, y_2)| \le \gamma(t) |y_1 - y_2|$, $|y_j| \le r$, $j = 1, 2$, и $\gamma(t) \in \mathcal{A}$.

Имеет место следующий результат (см. [4]).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1 – 5. Тогда при достаточно больших* t_0 *в некоторой окрестности нуля пространства* $\mathbb{C}^m$ *существует многообразие* $S(t_0)$ *размерности* k*, обладающее свойствами:*

а) Решение $y(t)$ *с начальным условием* $y(t_0) \in S(t_0)$ *стремится к нулю при* $t \to \infty$.

б) Решение $y(t)$ *с начальным условием* $|y(t_0)| \le \rho_0$ *и* $y(t_0) \notin S(t_0)$ *покидает* r_0*-окрестность нуля* $|y| \le r_0$ *в некоторый момент времени* $t^* \ge t_0$.

в) Для решений $y(t)$ *и* $z(t)$ *с начальными условиями* $y(t_0)$ *и* $z(t_0)$*, принадлежащими многообразию* $S(t_0)$*, справедлива оценка*

$$|y(t) - z(t)| \le C_\mu e^{-\mu(t-t_0)} |P_1 y(t_0) - P_1 z(t_0)|, \qquad t \ge t_0,$$

где C_μ *— некоторая положительная постоянная, а* $\mu \in (0, \alpha)$.

Из теоремы 3 следует, что если у системы (13) имеется нулевое решение, то при достаточно больших t_0 все решения из некоторой окрестности нуля с начальными условиями на многообразии $S(t_0)$ стремятся к нулю с экспоненциальной скоростью. Если, кроме того, система (13) линейна по y, то многообразие $S(t_0)$ представляет собой k-мерное линейное подпространство пространства $\mathbb{C}^m$. Возвращаясь к нашей системе (11), легко устанавливаем следующий результат. У системы (11) имеются $m - s$ линейно независимых решений, для которых справедливы оценки (9). Действительно, чтобы воспользоваться теоремой 3 применительно к системе (11) произведем в этой системе замену вида

$$y = e^{-\alpha_0} z, \qquad \alpha_0 > 0$$

такую, что у матрицы

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} + \alpha_0 I$$

имеются s собственных чисел с положительными вещественными частями и $m - s$ собственных чисел с отрицательными вещественными частями.

Факт существования у системы (11) $m - s$ базисных решений, для которых справедливы оценки (9), легко установить также, если воспользоваться результатами, изложенными в [5] (см. также [6]). Именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть элементами матрицы* $A(t)$ *являются локально интегрируемые на* $[0, \infty)$ *функции. Предположим, что линейная система*

$$\dot{y} = A(t) y$$

обладает экспоненциальной дихотомией на полуоси $t \ge 0$*. Тогда, если матрица* $R(t)$ *принадлежит классу* $\mathcal{A}$*, то возмущенная система*

$$\dot{y} = \big[A(t) + R(t)\big] y$$

также обладает экспоненциальной дихотомией на полуоси $t \ge 0$.

Для доказательства этой леммы нужно воспользоваться [5, Proposition 2, p. 22] и применить схему, использованную при доказательстве теоремы 3. Таким образом, экспоненциальная дихотомия является грубой по отношения к возмущениям из класса $\mathcal{A}$.

В дальнейшем нам потребуется одно свойство решений с начальными условиями на многообразии $S(t_0)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия 1 – 3 теоремы 3, а условия 4, 5 заменены следующими требованиями:*

4. $R(t,0) \in L_1[t_0,\infty)$;

5. $|R(t,y_1) - R(t,y_2)| \le \gamma(t)|y_1 - y_2|$, $|y_j| \le r$, $j = 1,2$, *и* $\gamma(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Тогда справедливы все утверждения теоремы 3 и, дополнительно, все решения с начальными условиями на многообразии $S(t_0)$ *принадлежат классу* $L_1[t_0,\infty)$.

Перед тем как установить справедливость этой теоремы, приведем один известный результат (см. [6,7]).

Лемма 2. *Пусть*

$$f(t) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}\gamma(s)ds, \qquad \alpha > 0.$$

Тогда

- *если* $\gamma(t) \in \mathcal{A}$, *то* $f(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$;
- *если* $\gamma(t) \in L_1[t_0,\infty)$, *то* $f(t) \in L_1[t_0,\infty)$.

Доказательство теоремы 4. Интересующие нас решения с начальными условиями на многообразии $S(t_0)$ являются решениями интегрального уравнения

$$y(t) = U(t)P_1U^{-1}(t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)\big[f(s,y) + R(s,y)\big]ds, \tag{16}$$

где

$$G(t,s) = \begin{cases} U(t)P_1U^{-1}(s), & s \le t, \\ -U(t)P_2U^{-1}(s), & t \le s. \end{cases}$$

Из (15) следует, что

$$||G(t,s)|| \le Ke^{-\alpha|t-s|}.$$

Покажем, что для любого достаточно малого

$$y_0 = P_1U^{-1}(t_0)y(t_0) \tag{17}$$

при достаточно больших t_0 у этого интегрального уравнения существует единственное ограниченное при $t \ge t_0$ решение. Это решение стремится к нулю при $t \to \infty$ и принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$. Начальные условия всех таких решений при различных y_0 и определяют соответствующее многообразие $S(t_0)$. Обозначим правую часть уравнения (16) как результат применения оператора $T(y_0)$ к функции $y(t)$

при фиксированном y_0. В [4] показано, что если считать оператор $T(y_0)$ определенным на пространстве $C_0[t_0,\infty)$ — непрерывных на промежутке $[t_0,\infty)$ функций, стремящихся к нулю при $t\to\infty$, с введенной на нем нормой

$$|y|_{C_0}=\max_{t\geq t_0}|y(t)|, \tag{18}$$

то оператор $T(y_0)$ при достаточно малых y_0 и достаточно большом t_0 переводит некоторый шар $|y|_{C_0}\leq r_0$ пространства $C_0[t_0,\infty)$ в себя и является в этом шаре сжимающим. В наших предположениях определим оператор $T(y_0)$ на пространстве $C_0[t_0,\infty)\cap L_1[t_0,\infty)$ с нормой

$$|y|_{C_0\cap L_1}=|y|_{C_0}+|y|_{L_1}=\max_{t\geq t_0}|y(t)|+\int\limits_{t_0}^{\infty}|y(s)|ds. \tag{19}$$

Несложно установить, что пространство $C_0[t_0,\infty)\cap L_1[t_0,\infty)$ с введенной на нем нормой (19) является банаховым. Покажем, что оператор $T(y_0)$ переводит это пространство в себя. Имеем

$$|(Ty)(t)|\leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|y(t_0)|+\left|\int\limits_{t_0}^{\infty}G(t,s)\big[f(s,y)-f(s,0)+\right.$$
$$\left.+R(s,y)-R(s,0)+R(s,0)\big]ds\right|\leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|y(t_0)|+K\omega(r)\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}|y(s)|ds+$$
$$+K\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}\gamma(s)|y(s)|ds+K\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}|R(s,0)|ds. \tag{20}$$

Заметим, что в силу леммы 2 последние три слагаемых в правой части этой цепочки неравенств принадлежат классу $L_1[t_0,\infty)$. Следовательно, $(Ty)(t)\in L_1[t_0,\infty)$, и, кроме того, на основании той же леммы $(Ty)(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Таким образом, $(Ty)(t)\in C_0[t_0,\infty)\cap L_1[t_0,\infty)$.

Покажем, что оператор T является сжимающим в некотором шаре $|y|_{C_0\cap L_1}\leq r_0$. Из (16) следует, что

$$|Tx-Ty|_{C_0\cap L_1}=|Tx-Ty|_{C_0}+|Tx-Ty|_{L_1}\leq K\max_{t\geq t_0}\Bigg\{\omega(r)\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}|x(s)-y(s)|ds+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}\gamma(s)|x(s)-y(s)|ds\Bigg\}+K\int\limits_{t_0}^{\infty}\Bigg\{\omega(r)\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}|x(s)-y(s)|ds+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}\gamma(s)|x(s)-y(s)|ds\Bigg\}dt\leq\Bigg\{\frac{2K}{\alpha}\omega(r)+K\max_{t\geq t_0}\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}\gamma(s)ds\Bigg\}|x-y|_{C_0}+$$
$$+K\omega(r)\int\limits_{t_0}^{\infty}\Bigg\{|x(s)-y(s)|\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}|dt\Bigg\}ds+K\int\limits_{t_0}^{\infty}\Bigg\{\gamma(s)|x(s)-y(s)|\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}dt\Bigg\}ds\leq$$

$$\leq \left\{ \frac{2K}{\alpha}\omega(r) + K \max_{t\geq t_0} \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}\gamma(s)ds \right\} |x-y|_{C_0} +$$

$$+ \left\{ \frac{2K}{\alpha}\omega(r) + \frac{2K}{\alpha} \max_{t\geq t_0} \gamma(t) \right\} |x-y|_{L_1}.$$

Поскольку $\omega(r) \to 0$ при $r \to 0$ и $\gamma(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то, выбирая r достаточно малым, а t_0 достаточно большим, мы можем добиться выполнения неравенства

$$|Tx - Ty|_{C_0 \cap L_1} \leq q|x-y|_{C_0 \cap L_1}, \qquad 0 \leq q < 1,$$

коль скоро $|x|_{C_0\cap L_1} \leq r_0$ и $|y|_{C_0\cap L_1} \leq r_0$. Осталось показать, что оператор T переводит шар $|y|_{C_0\cap L_1} \leq r_0$ в себя. Заметим, что

$$|Ty|_{C_0\cap L_1} \leq |Ty - T0|_{C_0\cap L_1} + |T0|_{C_0\cap L_1},$$

но

$$|T0|_{C_0\cap L_1} = |T0|_{C_0} + |T0|_{L_1} \leq K|y_0| + K \max_{t\geq t_0} \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}|R(s,0)|ds +$$

$$+ K|y_0| \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha s} ds + K \int\limits_{t_0}^{\infty} \left\{ \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}|R(s,0)|ds \right\} dt$$

и поэтому может быть сделано сколько угодно малым, если $|y_0| \leq \rho_0$ и t_0 достаточно велико. В частности, можно считать, что

$$|T0|_{C_0\cap L_1} \leq (1-q)r_0.$$

Но тогда

$$|Ty|_{C_0\cap L_1} \leq q|y|_{C_0\cap L_1} + (1-q)r_0 \leq qr_0 + (1-q)r_0 = r_0,$$

и поэтому оператор T переводит шар $|y|_{C_0\cap L_1} \leq r_0$ в себя, если только $|y_0| \leq \rho_0$ и начальный момент времени t_0 достаточно велик. Итак, нами установлено, что для любого $|y_0| \leq \rho_0$ у интегрального уравнения (16), а следовательно, и у системы (13) существует и единственно ограниченное при $t \geq t_0$ решение. Это решение принадлежит пространству $C_0[t_0,\infty) \cap L_1[t_0,\infty)$ и удовлетворяет равенству (17). Как уже было отмечено, начальные условия всех таких решений и образуют многообразие $S(t_0)$. □

Сформулируем еще один вариант теоремы 4, представляющий интерес при практическом использовании соответствующих результатов.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия 1 – 3 теоремы 3, а условия 4, 5 заменены следующими требованиями:*

4. $||R(t,0)|| \leq \varphi(t)$, *где функция* $\varphi(t)$ *монотонно убывает при* $t \geq t_0$ *и стремится к нулю при* $t \to \infty$. *Кроме того, пусть существует* $\beta \in (0,\alpha)$ *такое, что*

$$\varphi(t_1)e^{\beta t_1} \leq \varphi(t_2)e^{\beta t_2}, \qquad t_0 \leq t_1 \leq t_2. \tag{21}$$

5. $|R(t,y_1)-R(t,y_2)|\le\gamma(t)|y_1-y_2|$, $|y_j|\le r$, $j=1,2$, *и* $\gamma(t)\to 0$ *при* $t\to\infty$.

Тогда справедливы все утверждения теоремы 3 и, дополнительно, существует такое $L>0$, *что все решения с начальными условиями на многообразии* $S(t_0)$ *при достаточно больших* t_0 *допускают следующую оценку:*

$$|y(t)|\le L\varphi(t),\qquad t\ge t_0. \tag{22}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы повторяет основные этапы доказательства теоремы 4. В качестве области определения оператора $T(y_0)$, заданного правой частью (16), выберем множество

$$\mathcal{W}=\bigl\{y\in C_0[t_0,\infty):\ |y(t)|\le L\varphi(t),\ t\ge t_0\bigr\}. \tag{23}$$

Множество $\mathcal{W}$ с нормой (18) является банаховым пространством. Константу $L>0$ и величину t_0 в определении этого множества выберем позднее. Покажем, что оператор $T(y_0)$ переводит пространство $\mathcal{W}$ в себя при подходящем выборе этих величин. Из неравенств (20) следует, что

$$|(Ty)(t)|\le Ke^{-\alpha(t-t_0)}|y(t_0)|+KL\omega(r)\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}\varphi(s)ds+ \\ +|\gamma|_{C_0}KL\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}\varphi(s)ds+K\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}\varphi(s)ds, \tag{24}$$

коль скоро $|y|_{C_0}\le r$. Далее, учитывая (21) и монотонное стремление к нулю функции $\varphi(t)$, имеем

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}\varphi(s)ds=\int\limits_{t_0}^{t}e^{-\alpha(t-s)}\varphi(s)ds+\int\limits_{t}^{\infty}e^{-\alpha(s-t)}\varphi(s)ds\le \\ \le\varphi(t)\int\limits_{t_0}^{t}e^{(\beta-\alpha)(t-s)}ds+\varphi(t)\int\limits_{t}^{\infty}e^{-\alpha(s-t)}ds\le\left(\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)\varphi(t).$$

Наконец, вновь используя (21), заключаем, что

$$e^{-\alpha(t-t_0)}|y(t_0)|=e^{-\alpha(t-t_0)}\frac{\varphi(t_0)|y(t_0)|}{\varphi(t_0)}\le\frac{r}{\varphi(t_0)}e^{(\beta-\alpha)(t-t_0)}\varphi(t)\le\frac{r}{\varphi(t_0)}\varphi(t).$$

Учитывая полученные неравенства в (24), приходим к выводу, что

$$|(Ty)(t)|\le K\left[\frac{r}{\varphi(t_0)}+\Bigl(L\omega(r)+L|\gamma|_{C_0}+1\Bigr)\left(\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)\right]\varphi(t).$$

Выберем теперь L и t_0 настолько большими, а величину r настолько малой, что

$$K\left[\frac{r}{\varphi(t_0)} + \Big(L\omega(r) + L|\gamma|_{C_0} + 1\Big)\left(\frac{1}{\alpha-\beta} + \frac{1}{\alpha}\right)\right] \le L.$$

Возможность такого выбора очевидна. Для завершения доказательства теоремы осталось лишь установить сжимаемость оператора $T(y_0)$ в некотором шаре $|y|_{C_0} \le r_0$ пространства $\mathcal{W}$. Для этого достаточно повторить соответствующие шаги из теоремы 4 с учетом введенной на пространстве $\mathcal{W}$ нормы. $\square$

Замечание. *Пусть в условиях теоремы 5*

$$||R(t,0)|| \le Ne^{-\beta t}, \qquad t \ge t_0,$$

где $\beta > \alpha$. Тогда несложно показать, что все решения с начальными условиями на многообразии $S(t_0)$ при достаточно больших t_0 допускают следующую оценку:

$$|y(t)| \le Le^{-\alpha t}, \qquad t \ge t_0. \tag{25}$$

Вернемся теперь к основной задаче этого раздела — построению системы дифференциальных уравнений, описывающей поведение критических решений системы (1). Используемый нами метод во многом повторяет основные этапы алгоритма построения центрального многообразия для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [8]). Будем искать критические решения системы (11) в виде

$$y_2(t) = H(t)y_1(t), \tag{26}$$

где $H(t)$ — некоторая $((m-s)\times s)$-матрица, подлежащая определению. Подставим представление (26) во второе уравнение системы (11) и учтем первое уравнение этой системы. Приходим к выводу, что интересующая нас матрица $H(t)$ является решением следующего нелинейного матричного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned}\dot H = B_2H - HB_1 + B_{22}(t)H - HB_{11}(t) - HB_{12}(t)H +\\ + B_{21}(t) + R_{21}(t) - HR_{11}(t) + R_{22}(t)H - HR_{12}(t)H.\end{aligned} \tag{27}$$

Рассмотрим это уравнение, ограничиваясь лишь постоянной линейной частью. Имеем

$$\dot H = B_2H - HB_1. \tag{28}$$

Легко проверить, что любое решение этого уравнения с начальным условием $H(0) = C$ описывается формулой

$$H(t) = e^{B_2t}Ce^{-B_1t}. \tag{29}$$

Матричное дифференциальное уравнение (27) можно представить в виде системы (13) для нахождения элементов $h_{ij}(t)$ матрицы $H(t)$. В силу формулы (29) и условий на спектр матриц B_1 и B_2 соответствующая линейная система (14) будет обладать экспоненциальной дихотомией с проектором $P_1 = I$. Следовательно, на основании теоремы 3 все решения матричного уравнения (27) из некоторой окрестности нуля при достаточно больших t_0 стремятся к нулю при $t \to \infty$. В силу (12) будем искать эти решения в следующем виде:

$$H(t) = \sum_{i=1}^{n} H_i(t)v_i(t) + \ldots + \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} H_{i_1 \ldots i_k}(t) v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t) + Y(t). \qquad (30)$$

Элементами матриц $H_{i_1 \ldots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены, а $Y(t) = o(1)$ — некоторая матрица из класса $L_1[t_0, \infty)$. Подставляя представление (30) в уравнение (27) и собирая слагаемые при $v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_l}(t)$ $(l \le k)$, мы получаем следующие неоднородные дифференциальные уравнения для определения матриц $H_{i_1 \ldots i_l}(t)$:

$$\dot{H}_{i_1 \ldots i_l} = B_2 H_{i_1 \ldots i_l} - H_{i_1 \ldots i_l} B_1 + G_{i_1 \ldots i_l}(t). \qquad (31)$$

Здесь $G_{i_1 \ldots i_l}(t)$ — некоторая известная матрица, элементами которой являются тригонометрические многочлены:

$$G_{i_1 \ldots i_l}(t) = \sum_j g_j^{(i_1 \ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\lambda_j t}.$$

Интересующее нас решение уравнения (31) будем искать в виде

$$H_{i_1 \ldots i_l}(t) = \sum_j \beta_j^{(i_1 \ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\lambda_j t}. \qquad (32)$$

Подставляя (32) в (31) и собирая члены при одинаковых показателях экспоненты, получаем следующие уравнения для нахождения матриц $\beta_j^{(i_1 \ldots i_l)}$:

$$B_2 \beta_j^{(i_1 \ldots i_l)} - \beta_j^{(i_1 \ldots i_l)} (B_1 + \mathrm{i}\lambda_j I) = -g_j^{(i_1 \ldots i_l)}. \qquad (33)$$

Поскольку спектры матриц B_2 и $B_1 + \mathrm{i}\lambda_j I$ не пересекаются, то эти уравнения однозначно разрешимы при любой правой части (см., например, [9]).

Наконец, для нахождения матрицы $Y(t)$ получаем нелинейное матричное уравнение

$$\begin{aligned} \dot{Y} = B_2 Y - Y B_1 + \Phi_1(t) Y + Y \Phi_2(t) - Y B_{12}(t) Y + \\ + \Psi_1(t) + Y \Psi_2(t) + \Psi_3(t) Y - Y R_{12}(t) Y. \end{aligned} \qquad (34)$$

Здесь матрицы $\Phi_j(t)$ $(j = 1, 2)$ суть матрицы вида (12), а матрицы $\Psi_j(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ принадлежат классу $L_1[t_0, \infty)$. Это уравнение можно записать в виде системы (13) для нахождения элементов $y_{ij}(t)$ матрицы $Y(t)$. В силу леммы 1 линейная часть этого уравнения

$$\dot{Y} = B_2 Y - Y B_1 + \Phi_1(t) Y + Y \Phi_2(t) + Y \Psi_2(t) + \Psi_3(t) Y, \qquad (35)$$

т.е. система вида (14), обладает экспоненциальной дихотомией с проектором $P_1 = I$.

Предположим далее, что в исходной системе (1) матрица $R(t)$ из класса $L_1[t_0,\infty)$ ограничена по норме при $t \geq t_0$, т.е.

$$||R(t)|| \leq M, \qquad t \geq t_0. \tag{36}$$

Представим уравнение (34) в виде системы (13) следующим образом. Линейная часть этой системы (т.е. система (14)) определяется уравнением (35), вектор-функция $f(t,y)$ состоит из элементов матрицы

$$-YB_{12}(t)Y - YR_{12}(t)Y,$$

наконец вектор-функция $R(t,y)$ не зависит от элементов y_{ij} матрицы $Y(t)$ и состоит из элементов матрицы $\Psi_1(t)$. Полученная таким образом система удовлетворяет условиям теоремы 4. Следовательно, матрица $Y(t)$ в (30) принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$.

Пусть далее $H(t)$ — решение уравнения (27) с начальным условием $H(t_0) = 0$, где $t_0 \gg 1$. Как мы только что установили, это решение может быть представлено в виде (30). Учтем соотношение (26) в первом уравнении системы (11). В результате получим следующую s-мерную систему дифференциальных уравнений вида (1):

$$\dot{y}_1 = B_1 y_1 + \hat{B}_{11}(t)y_1 + \hat{R}_{11}(t)y_1. \tag{37}$$

Здесь матрица $\hat{B}_{11}(t)$ есть матрица вида (12), а матрица $\hat{R}_{11}(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$. Без ограничения общности можно считать, что матрица B_1 есть матрица жорданова вида D_0, единственным собственным числом которой является ноль. Действительно, в системе (37) можно сперва осуществить преобразование, приводящее матрицу B_1 к жордановой форме, а затем воспользоваться заменой типа (8).

Используя теперь теорему 1, с помощью замены типа (2) систему (37) приводим к виду

$$\dot{z} = \Big(D_0 + \sum_{i=1}^{n} D_i v_i(t) + \sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq n} D_{i_1 i_2} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq n} D_{i_1\ldots i_k} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + \hat{R}(t)\Big) z \tag{38}$$

с постоянными матрицами $D_{i_1\ldots i_l}$ и матрицей $\hat{R}(t) \in L_1[t_0,\infty)$. Система (38) и является искомой «критической» системой. Дальнейшее асимптотическое исследование системы (38) связано с необходимостью приведения этой системы к L-диагональному виду (4). Если это удается сделать, то мы можем построить асимптотику фундаментальной матрицы системы (37), а следовательно, получить асимптотики для s компонент интересующих нас решений системы (11). Учитывая связь (26) между компонентами y_1 и y_2 вектора y в системе (11) и возвращаясь к исходной системе (1), мы, таким образом, можем получить асимптотические формулы для критических базисных решений.

3. Метод Колесова–Майорова. Одним из недостатков метода построения «критической» системы, описанного в предыдущем пункте, является необходимость осуществления преобразования (10), приводящего матрицу A_0 к блочно-диагональному виду. Этого недостатка лишен метод, предложенный Ю.С. Колесовым и В.В. Майоровым в работе [10] применительно к задаче исследования устойчивости решений линейных систем с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами.

Попытаемся построить асимптотику s критических решений системы (1) следующим образом. Положим

$$S(t) = S_0(t) + \sum_{i=1}^{n} S_i(t)v_i(t) + \ldots + \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} S_{i_1 \ldots i_k}(t) v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t), \tag{39}$$

где элементами $(m \times s)$-матриц $S_0(t)$ и $S_{i_1 \ldots i_l}(t)$ являются некоторые тригонометрические многочлены. Пусть $(s \times s)$-матрица $Z(t)$ суть фундаментальная матрица системы (38), в которой матрица $\hat{R}(t) \equiv 0$, а постоянные матрицы $D_{i_1 \ldots i_l}$ подлежат определению. Предположим далее, что интересующие нас s критических решений системы (1) расположены по столбцам $(m \times s)$-матрицы

$$X(t) = S(t)Z(t). \tag{40}$$

Подставим теперь представление (40) в исходную систему (1) и применим к обеим частям полученного равенства справа матрицу $Z^{-1}(t)$. Соберем затем слагаемые при одинаковых произведениях $v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_l}(t)$ $(l \le k)$, игнорируя члены, принадлежащие классу $L_1[t_0, \infty)$. Приравнивая «свободные» члены, получаем следующее уравнение для определения матрицы $S_0(t)$ и постоянной матрицы D_0:

$$\dot{S}_0(t) = A_0 S_0(t) - S_0(t) D_0. \tag{41}$$

Пусть по столбцам $(m \times s)$-матрицы $X_0(t)$ расположены s линейно независимых решений системы

$$\dot{x} = A_0 x,$$

отвечающих чисто мнимым собственным значениям матрицы A_0. Очевидно, что матрицу $X_0(t)$ можно представить в виде

$$X_0(t) = S_0(t) e^{D_0 t},$$

где по столбцам матрицы $S_0(t)$ стоят некоторые тригонометрические многочлены, а $(s \times s)$-матрица D_0 — верхняя жорданова матрица с единственным собственным числом, равным нулю, причем кратность его элементарных делителей совпадает с кратностями элементарных делителей собственных чисел матрицы A_0, лежащих на мнимой оси. Построенные таким образом матрицы $S_0(t)$ и D_0 удовлетворяют уравнению (41).

Пусть нулевые строки матрицы D_0 имеют номера $l_1 < l_2 < \ldots < l_p$. Обозначим через $K(D_0)$ совокупность $(s \times s)$-матриц, у которых ненулевые элементы могут быть только в строках с этими номерами. Собирая теперь слагаемые при $v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_l}(t)$, получаем следующие уравнения для определения матриц $S_{i_1 \ldots i_l}(t)$ и $D_{i_1 \ldots i_l}$:

$$\dot{S}_{i_1 \ldots i_l}(t) = A_0 S_{i_1 \ldots i_l}(t) + F_{i_1 \ldots i_l}(t) - S_0(t) D_{i_1 \ldots i_l}. \tag{42}$$

Здесь $F_{i_1\dots i_l}(t)$ — некоторая известная $(m \times s)$-матрица, элементами которой являются тригонометрические многочлены. В [10] показано, что из уравнений вида (42) можно определить матрицы $D_{i_1\dots i_l} \in K(D_0)$ и матрицы $S_{i_1\dots i_l}(t)$, элементами которых являются тригонометрические многочлены.

Обозначим через $A(t)$ главную часть системы (1), т.е. $(m \times m)$-матрицу

$$A(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t)v_i(t) + \ldots + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} A_{i_1\dots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t).$$

Далее, через $D(t)$ обозначим главную часть системы (38), т.е. $(s \times s)$-матрицу

$$D(t) = D_0 + \sum_{i=1}^{n} D_i v_i(t) + \ldots + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} D_{i_1\dots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t).$$

В силу определения матриц $S_{i_1\dots i_l}(t)$ и матриц $D_{i_1\dots i_l}$ имеет место следующее тождество:

$$A(t)S(t) - \dot S(t) = S(t)D(t) + Y(t), \tag{43}$$

где $Y(t)$ — некоторая матрица из класса $L_1[t_0,\infty)$.

Через $P(t)$ будем далее обозначать $(m \times m)$-матрицу, первыми s столбцами которой являются столбцы матрицы $S(t)$, а в качестве остальных $m-s$ столбцов взяты произвольные базисные векторы из корневого подпространства матрицы A_0, отвечающего ее собственным числам с отрицательными вещественными частями. Очевидно, что при достаточно больших t матрица $P(t)$ невырождена, а обратная к ней матрица ограничена, поскольку

$$|\det P(t)| \ge p_0 > 0, \qquad t \gg 1.$$

В системе (1) осуществим замену

$$x = P(t)y, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad y_1 \in \mathbb{C}^s, \quad y_2 \in \mathbb{C}^{m-s}. \tag{44}$$

Используя тождество (43), нетрудно установить, что в результате этой замены исходная система преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot y_1 &= D(t)y_1 + B_{12}(t)y_2 + R_{11}(t)y_1 + R_{12}(t)y_2, \\ \dot y_2 &= B_2 y_2 + B_{22}(t)y_2 + R_{21}(t)y_1 + R_{22}(t)y_2, \end{aligned} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Здесь собственные числа $((m-s)\times(m-s))$-матрицы B_2 имеют отрицательные вещественные части, матрицы $B_{12}(t)$ и $B_{22}(t)$ суть матрицы вида (12), а матрицы $R_{ij}(t)$ $(i,j=1,2)$ принадлежат классу $L_1[t_0,\infty)$.

Будем искать решения системы (45) в виде (26). Для нахождения матрицы $H(t)$ получаем уравнение вида (27), в котором

$$B_1 = D_0, \quad B_{11}(t) = D(t) - D_0, \quad B_{21}(t) = 0.$$

Предположим, что в исходной системе (1) матрица $R(t)$ из класса $L_1[t_0,\infty)$ ограничена по норме при $t \geq t_0$, т.е. выполнено неравенство (36). Из теоремы 4 тогда следует, что все решения $H(t)$ уравнения (27) с начальными условиями из некоторой окрестности нуля при $t_0 \gg 1$ принадлежат классу $L_1[t_0,\infty)$.

Пусть далее $H(t)$ — решение уравнения (27) с начальным условием $H(t_0) = 0$, где $t_0 \gg 1$. Учтем соотношение (26) в первом уравнении системы (45). В результате получим s-мерную систему дифференциальных уравнений вида (38) с постоянными матрицами $D_{i_1\dots i_l}$ и матрицей $\hat{R}(t) \in L_1[t_0,\infty)$, которая и является искомой «критической» системой.

4. Пример. Рассмотрим следующую систему двух связанных осцилляторов:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \frac{a\sin\omega t}{t^\alpha} x_2 = 0,\\ &\ddot{x}_2 + d\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \frac{b\sin\omega t}{t^\beta} x_1 = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Здесь $\omega > 0$, $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, a и b — произвольные (ненулевые) действительные параметры, $d > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Система (46) исследовалась в работе [11] в предположении, что $d = 0$ и

$$\alpha + \beta > 1. \tag{47}$$

Установлено, что в том случае, когда

$$\omega \neq \omega_1 + \omega_2, \quad \omega \neq \omega_2 - \omega_1 \quad \omega \neq \omega_1 - \omega_2, \tag{48}$$

все решения системы (46) при условии (47) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + O\big(t^{-\alpha}\big) + O\big(t^{1-\alpha-\beta}\big),\\ x_2(t) &= C_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) + O\big(t^{-\beta}\big) + O\big(t^{1-\alpha-\beta}\big), \end{aligned}$$

где $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ — произвольные действительные постоянные. Если же хотя бы одно из неравенств в (48) обращается в равенство, то у системы (46) могут существовать неограниченные решения. В этом случае говорят, что в системе (46) имеет место параметрический резонанс.

Исследуем динамику решений системы (46) при условии, что коэффициент $d > 0$. От системы (46) перейдем к системе четырех уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= B_1 y_1 + B_{12}(t) y_2,\\ \dot{y}_2 &= B_2 y_2 + B_{21}(t) y_1, \end{aligned} \qquad y_1 = \begin{pmatrix} x_1\\ \dot{x}_1\end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} x_2\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}. \tag{49}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -\omega_1^2 & 0\end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -\omega_2^2 & -d\end{pmatrix},\\ &B_{12}(t) = \frac{1}{t^\alpha}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -a\sin\omega t & 0\end{pmatrix}, \quad B_{21}(t) = \frac{1}{t^\beta}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ -b\sin\omega t & 0\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{50}$$

В системе (49) сначала осуществим замену

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ \mathrm{i}\omega_1 & -\mathrm{i}\omega_1\end{pmatrix}, \quad E = \mathrm{diag}(1,1), \tag{51}$$

а затем — замену

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}(t) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{C}(t) = \mathrm{diag}\left(e^{\mathrm{i}\omega_1 t}, e^{-\mathrm{i}\omega_1 t}\right), \tag{52}$$

где $\mathbb{O}$ — нулевая (2×2)-матрица. В результате этих замен, предварительно разложив функцию $\sin\omega t$ по формуле Эйлера, приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \hat{B}_{12}(t)w_2, \\ \dot{w}_2 &= B_2 w_2 + \hat{B}_{21}(t)w_1, \end{aligned} \qquad w_1, w_2 \in \mathbb{C}^2, \tag{53}$$

где

$$\hat{B}_{12}(t) = -\frac{a}{4\omega_1}\frac{1}{t^\alpha}\begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t} - e^{\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t} & 0 \\ e^{\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t} - e^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}_{21}(t) = \frac{\mathrm{i}b}{2}\frac{1}{t^\beta}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t} - e^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t} & e^{\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t} - e^{-\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t} \end{pmatrix},$$

а матрица B_2 определена в (50).

Критические решения системы (53) будем искать в виде

$$w_2 = H(t)w_1. \tag{54}$$

Здесь (2×2)-матрица $H(t)$ является решением матричного уравнения

$$\dot{H} = B_2 H - H\hat{B}_{12}(t)H + \hat{B}_{21}(t) \tag{55}$$

и $H(t) = o(1)$ при $t \to \infty$. В частности, этим свойством обладает решение уравнения (55) с начальным условием $H(t_0) = \mathbb{O}$, где $t_0 \gg 1$. Интересующее нас решение уравнения (55) будем искать в виде разложения (30), в котором $n = 2$ и

$$v_1(t) = t^{-\alpha}, \qquad v_2(t) = t^{-\beta}.$$

Для нахождения матрицы $H_1(t)$, элементами которой являются тригонометрические многочлены, получаем уравнение

$$\dot{H}_1 = B_2 H_1.$$

Следовательно, $H_1(t) \equiv \mathbb{O}$. Используя индукцию, легко показать, что все матрицы вида $H_{1\ldots1}(t)$ также суть нулевые. Для нахождения матрицы $H_2(t)$ получаем уравнение

$$\dot{H}_2 = B_2 H_2 + \frac{\mathrm{i}b}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t} - e^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t} & e^{\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t} - e^{-\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t} \end{pmatrix}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$H_2(t) = e^{\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t}\Gamma_1 + e^{\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t}\Gamma_2 + e^{-\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t}\Gamma_3 + e^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t}\Gamma_4,$$

где

$$\Gamma_1 = \frac{\mathrm{i}b}{2\gamma_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{i}(\omega+\omega_1) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_2 = \frac{\mathrm{i}b}{2\gamma_2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \mathrm{i}(\omega-\omega_1) \end{pmatrix},$$
$$\Gamma_3 = \frac{\mathrm{i}b}{2\bar\gamma_1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \mathrm{i}(\omega+\omega_1) \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_4 = \frac{\mathrm{i}b}{2\bar\gamma_2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \mathrm{i}(\omega-\omega_1) & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$\gamma_1 = -(\omega+\omega_1)^2 + \omega_2^2 + \mathrm{i}(\omega+\omega_1)d, \qquad \gamma_2 = -(\omega-\omega_1)^2 + \omega_2^2 + \mathrm{i}(\omega-\omega_1)d, \tag{56}$$

а величины $\bar\gamma_1$ и $\bar\gamma_2$ комплексно сопряжены величинам γ_1 и γ_2 соответственно. Легко показать, что все матрицы вида $H_{22}(t), H_{222}(t), \ldots, H_{2\ldots2}(t)$ являются нулевыми. Из (55) следует, что матрица $H_{12}(t)$ также является нулевой.

Используя теорему 5, мы заключаем, что решения уравнения (55), стремящиеся к нулю при $t \to \infty$, имеют следующее асимптотическое представление:

$$H(t) = H_2(t)t^{-\beta} + O\big(t^{-(\alpha+2\beta)}\big) + O\big(t^{-(\beta+1)}\big). \tag{57}$$

Для нахождения критических решений системы (53) получаем следующую систему:

$$\dot w_1 = \hat B_{12}(t)H(t)w_1 = \Big[A_1(t)t^{-(\alpha+\beta)} + O\big(t^{-2(\alpha+\beta)}\big) + O\big(t^{-(\alpha+\beta+1)}\big)\Big]w_1. \tag{58}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_1(t) = -\frac{ab\mathrm{i}}{8\omega_1}\frac{1}{t^{\alpha+\beta}}\Bigg[&\begin{pmatrix} \gamma_1^{-1}+\bar\gamma_2^{-1} & 0 \\ 0 & -\bar\gamma_1^{-1}-\gamma_2^{-1} \end{pmatrix} + e^{2\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ e^{2\mathrm{i}\omega t}\begin{pmatrix} -\gamma_1^{-1} & 0 \\ & \gamma_2^{-1} \end{pmatrix} + e^{2\mathrm{i}\omega_1 t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\bar\gamma_2^{-1}-\gamma_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} + e^{2\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t}\begin{pmatrix} 0 & -\gamma_2^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ e^{-2\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t}\begin{pmatrix} 0 & -\bar\gamma_1^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-2\mathrm{i}\omega t}\begin{pmatrix} -\bar\gamma_2^{-1} & 0 \\ & \bar\gamma_1^{-1} \end{pmatrix} + e^{-2\mathrm{i}\omega_1 t}\begin{pmatrix} 0 & \bar\gamma_1^{-1}+\gamma_2^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ e^{-2\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar\gamma_2^{-1} & 0 \end{pmatrix}\Bigg]. \end{aligned}$$

Для исследования системы (58) воспользуемся теоремой 1. Осуществим в системе (58) усредняющую замену вида

$$w_1 = \Big[E + Y_1(t)t^{-(\alpha+\beta)} + \ldots\Big]z.$$

В результате этого преобразования получим усредненную систему вида (3)

$$\dot z = \Big[A_1 t^{-(\alpha+\beta)} + O\big(t^{-2(\alpha+\beta)}\big) + O\big(t^{-(\alpha+\beta+1)}\big)\Big]z, \tag{59}$$

где $A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big]$.

Предположим сначала, что имеет место неравенство (47). В этом случае система (58) имеет L-диагональный вид, и для ее фундаментальной матрицы $W_1(t)$ при $t \to \infty$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$W_1(t) = E + o(1).$$

Возвращаясь теперь к исходной системе (46) и учитывая равенства (54),(57), получаем асимптотическое представление для ее решений при $t \to \infty$:

$$x_1(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \gamma) + o(1),$$
$$x_2(t) = C_1 t^{-\beta}\Big[|\varphi| \sin\big((\omega + \omega_1)t + \gamma + \delta_1\big) + |\psi| \cos\big((\omega - \omega_1)t - \gamma + \delta_2\big) + o(1)\Big],$$

где C_1, γ — произвольные действительные постоянные, и

$$\varphi = \frac{\mathrm{i}b}{2\gamma_1}, \quad \psi = -\frac{\mathrm{i}b}{2\bar{\gamma}_2}. \tag{60}$$

Кроме того,

$$\sin\delta_1 = \frac{\operatorname{Im}\varphi}{|\varphi|}, \ \ \cos\delta_1 = \frac{\operatorname{Re}\varphi}{|\varphi|}, \ \ \sin\delta_2 = \frac{\operatorname{Re}\psi}{|\psi|}, \ \ \cos\delta_2 = \frac{\operatorname{Im}\psi}{|\psi|}. \tag{61}$$

Пусть далее

$$\alpha + \beta \le 1. \tag{62}$$

Необходимо рассмотреть два случая.

а). $\omega \ne \omega_1$.

В этой ситуации

$$A_1 = \big[A_1(t)\big] = -\frac{ab\mathrm{i}}{8\omega_1}\begin{pmatrix} \gamma_1^{-1} + \bar{\gamma}_2^{-1} & 0 \\ 0 & -\bar{\gamma}_1^{-1} - \gamma_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа λ_1, λ_2 матрицы A_1

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = -\frac{ab\mathrm{i}}{8\omega_1}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\bar{\gamma}_2}\right) \tag{63}$$

различны при условии $\operatorname{Im}\lambda_1 \ne 0$. Известно, что в этой ситуации система (59) может быть приведена к L-диагональному виду (4) (см., например, [2,3]), где

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1 + o(1), \bar{\lambda}_1 + o(1)\big) t^{-(\alpha+\beta)}. \tag{64}$$

Фундаментальная матрица $W_1(t)$ системы (58) имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$W_1(t) = \big(E + o(1)\big) \exp\Big\{\int_{t^*}^{t} \Lambda(s) ds\Big\}.$$

Для решений системы (46) получаем следующие асимптотические формулы при $t \to \infty$:

$$x_1(t) = C_1 \exp\{\nu(t) \operatorname{Re}\lambda_1 (1 + o(1))\}\big[\sin\big(\omega_1 t + \nu(t) \operatorname{Im}\lambda_1(1 + o(1))\big) + o(1)\big],$$
$$x_2(t) = C_1 t^{-\beta} \exp\{\nu(t) \operatorname{Re}\lambda_1 (1 + o(1))\}\Big[|\varphi| \sin\big((\omega + \omega_1)t + \nu(t) \operatorname{Im}\lambda_1(1 + o(1))\big) +$$
$$+ |\psi| \cos\big((\omega - \omega_1)t + \nu(t) \operatorname{Im}\lambda_1(1 + o(1))\big) + o(1)\Big], \tag{65}$$

где C_1 — произвольная действительная постоянная,

$$\nu(t) = \begin{cases} \ln t, & \alpha+\beta = 1, \\ \dfrac{t^{1-(\alpha+\beta)}}{1-(\alpha+\beta)}, & \alpha+\beta < 1, \end{cases} \tag{66}$$

а величины φ и ψ определяются формулами (60). Несложные, но довольно утомительные вычисления приводят к следующей формуле:

$$\operatorname{Re}\lambda_1 = \frac{abd\bigl(3\omega^4 + (d^2 - 2\omega_1^2 - 2\omega_2^2)\omega^2 - d^2\omega_1^2 - (\omega_1^2-\omega_2^2)^2\bigr)}{4\bigl(d^2(\omega-\omega_1)^2 + (\omega^2 - 2\omega\omega_1 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2\bigr)\bigl(d^2(\omega+\omega_1)^2 + (\omega^2 + 2\omega\omega_1 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2\bigr)}.$$

Из асимптотических представлений (65) следует, что $x_1(t)$ растет по абсолютной величине, если $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$, и убывает, если $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$. Решение $x_2(t)$ растет по абсолютной величине, если $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$ и $\alpha+\beta < 1$, а также в том случае, когда $\operatorname{Re}\lambda_1 > \beta$ и $\alpha+\beta = 1$. Наконец, $x_2(t)$ убывает по абсолютной величине, если $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$, а также в том случае, когда $\operatorname{Re}\lambda_1 < \beta$ и $\alpha+\beta = 1$.

Если $\operatorname{Re}\lambda_1 = 0$, то асимптотические формулы (65) справедливы лишь при условии, что

$$\frac{1}{2} < \alpha+\beta \le 1.$$

Этот факт следует непосредственно из вида системы (58).

б). $\omega = \omega_1$.

В этой ситуации

$$A_1 = \bigl[A_1(t)\bigr] = -\frac{ab\mathrm{i}}{8\omega_1}\begin{pmatrix} \gamma_1^{-1} + \bar\gamma_2^{-1} & -\gamma_2^{-1} \\ \bar\gamma_2^{-1} & -\bar\gamma_1^{-1} - \gamma_2^{-1} \end{pmatrix},$$

где в силу (56)

$$\gamma_1 = -4\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 d\mathrm{i}, \qquad \gamma_2 = \omega_2^2. \tag{67}$$

Формулы для собственных чисел λ_1, λ_2 будут различаться в зависимости от знака величины

$$\eta = (\omega_2^2 - 4\omega_1^2)\bigl(32\omega_1^4 + (8d^2 - 20\omega_2^2)\omega_1^2 + 3\omega_2^4\bigr). \tag{68}$$

Именно,

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \dfrac{ab(-2\omega_1\omega_2 d \pm \mathrm{i}\sqrt{\eta})}{8\omega_1\omega_2\bigl[4d^2\omega_1^2 + (\omega_2^2 - 4\omega_1^2)^2\bigr]}, & \eta \ge 0, \\ \dfrac{ab(-2\omega_1\omega_2 d \pm \sqrt{-\eta})}{8\omega_1\omega_2\bigl[4d^2\omega_1^2 + (\omega_2^2 - 4\omega_1^2)^2\bigr]}, & \eta < 0. \end{cases} \tag{69}$$

Собственные числа λ_1, λ_2 различны при условии, что $\eta \ne 0$. В этой ситуации система (59) может быть приведена к L-диагональному виду (4), где

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\bigl(\lambda_1 + o(1), \lambda_2 + o(1)\bigr)t^{-(\alpha+\beta)}. \tag{70}$$

Фундаментальная матрица $W_1(t)$ системы (58) имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$W_1(t) = \bigl(P + o(1)\bigr)\operatorname{diag}\Bigl(\exp\bigl\{\bigl(\lambda_1 + o(1)\bigr)\nu(t)\bigr\}, \exp\bigl\{\bigl(\lambda_2 + o(1)\bigr)\nu(t)\bigr\}\Bigr). \tag{71}$$

Здесь по столбцам матрицы P стоят собственные векторы матрицы A_1, а функция $\nu(t)$ определяется формулой (66). Мы не будем выписывать асимптотические формулы для решений системы (46). При необходимости заинтересованный читатель может их с легкостью построить самостоятельно. Остановимся лишь на описании качественного поведения решений этой системы.

Из формул (69), (71) следует, что $x_1(t)$ растет по абсолютной величине при условии, что $ab < 0$, а также в том случае, когда $ab > 0$, $\eta < -4\omega_1^2\omega_2^2 d^2$. Решение $x_1(t)$ убывает, если $ab > 0$ и $\eta > 0$, а также в том случае, когда $ab > 0$ и $-4\omega_1^2\omega_2^2 d^2 < \eta < 0$. Учитывая формулы (54) и (57), мы можем сделать выводы о поведении решения $x_2(t)$. В случае, когда $\alpha + \beta < 1$, $x_2(t)$ растет по абсолютной величине, если растет решение $x_1(t)$. Если $\alpha + \beta = 1$, то величина $x_2(t)$ растет в том случае, когда $ab < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_2 > \beta$, а также в том случае, когда $ab > 0$, $\eta < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_1 > \beta$. Решение $x_2(t)$ убывает при условии, что $\alpha + \beta < 1$ и решение $x_1(t)$ убывает. Если же $\alpha + \beta = 1$, то $x_2(t)$ убывает в том случае, когда убывает решение $x_1(t)$, а также в случае, когда $ab < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_2 < \beta$. Кроме того, решение $x_2(t)$ убывает, если $\alpha + \beta = 1$, $ab > 0$, $\eta < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_1 < \beta$.

Анализируя характер поведения решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ системы (46) во всех рассмотренных выше случаях, мы можем сделать следующий вывод. Если $\alpha + \beta < 1$, то характер поведения решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ одинаков (либо оба растут по абсолютной величине, либо убывают). В случае, когда $\alpha + \beta = 1$, качественное поведение решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ может различаться.

Список литературы

1. *Нестеров П.Н.* Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №6. С. 731–742.

2. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 475 с.

3. *Eastham M.S.P.* The asymptotic solution of linear differential systems. Oxford: Clarendon Press, 1989.

4. *Nesterov P.* Method of averaging for systems with main part vanishing at infinity // Math. Nachr. 2011. Vol. 284, №11-12. P. 1496–1514.

5. *Coppel W.A.* Dichotomies in stability theory. New York: Springer-Verlag, 1978.

6. *Trofimchuk S., Pinto M.* L_p-perturbations of invariant subbundles for linear systems // J. Dynam. Differential Equations. 2002. Vol. 14. P. 743–761.

7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

8. *Wiggins S.* Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York: Springer-Verlag, 1996.

9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.

10. *Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, №10. С. 1778–1788.

11. *Nesterov P.* On the asymptotics for solutions of system of two linear oscillators with slowly decreasing coupling // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2009. Vol. 89, №6. P. 466–480.

On Asymptotics for Critical Solutions of Systems of Differential Equations with Oscillatory Decreasing Coefficients

Nesterov P.N.

Keywords: oscillatory decreasing coefficients, critical solutions, method of averaging, asymptotics, coupled oscillators.

In this paper we propose a method for constructing the asymptotics for a set of linear independent solutions of systems of differential equations with oscillatory decreasing coefficients. We illustrate this method by constructing the asymptotics for solutions of a system of two oscillators with slowly decreasing coupling and friction in one of the oscillators.

Сведения об авторе:
Нестеров Павел Николаевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент