

УДК 517.9

Локальная динамика уравнения с длительным экспоненциально распределенным запаздыванием

Кащенко И.С.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: iliyask@uniyar.ac.ru

получена 2 сентября 2011

Ключевые слова: распределенное запаздывание, сингулярное возмущение, нормальная форма, локальная динамика

Изучаются свойства локальной динамики дифференциального уравнения с экспоненциально распределенным запаздыванием. Выявлены параметры, при которых имеют место критические случаи. Показано, что критические случаи имеют бесконечную размерность, в каждом критическом случае построены специальные уравнения, описывающие динамику исходной задачи, — аналоги нормальных форм.

Введение

Дифференциальные уравнения с запаздыванием служат математическими моделями для многих прикладных задач [1, 2, 3, 4]. Одним из простейших и в то же время наиболее часто встречающихся [5] уравнений с запаздыванием является скалярное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} + x = ax(t - T) + F(x, x(t - T)), \quad T > 0.$$

В ряде работ (см., например, [2, 5]) отмечалась важность исследования динамики этой задачи при условии, когда время запаздывания достаточно велико, т. е. $T \gg 1$.

В работах [6, 7, 8] изучалась динамика уравнений с двумя запаздываниями

$$\frac{dx}{dt} + x = F(x, x(t - T), x(t - T_1)), \quad T, T_1 > 0,$$

в случае, когда одно запаздывание велико, а второе фиксировано [6, 7], а также в случае, когда оба запаздывания являются большими [8].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (государственный контракт № 14.740.11.0873) и гранта Президента Российской Федерации (контракт № МК-3867.2011.1).

В настоящей работе рассматривается уравнение с распределенным на промежутке $[-T, 0]$ запаздыванием:

$$\frac{dx}{dt} + x = a \int_{-T}^0 x(t+s) dr(s) + f(x).$$

Здесь $T > 0$, а $f(x)$ — достаточно гладкая функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого.

Исследуется вопрос о локальной — в окрестности нулевого состояния равновесия — динамике уравнений такого вида в случае, когда

$$\frac{dr}{ds} = R(s) = \delta \exp(-\delta(s+T)), \quad \text{где} \quad \delta > 0.$$

Очевидно, что $\int_{-T}^0 R(s) ds = 1 + O(e^{-\delta T})$.

Отметим, что случай, когда запаздывание сконцентрировано в одной точке, является в некотором смысле „предельным“. Действительно, при $\delta \rightarrow +\infty$ функция $R(s)$ на отрезке $[-T, 0]$ стремится к дельта-функции от $s+T$, а интегральная часть уравнения, таким образом, переходит в $ax(t-T)$. В работе [9] приведены результаты для случая, когда $R(s)$ является линейной функцией.

1. Линейный анализ

Итак, рассматривается дифференциальное уравнение с экспоненциально распределенным запаздыванием

$$\dot{x} + x = a\delta \int_{-T}^0 \exp(-\delta(s+T))x(t+s) ds + f(x). \quad (1)$$

Здесь a и δ — некоторые параметры, причем $\delta > 0$. Нелинейная функция $f(x)$ является достаточно гладкой, $f(0) = f'(0) = 0$. Тем самым, в окрестности нуля $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = f_2x^2 + f_3x^3 + \dots$$

Относительно величины запаздывания T предполагаем, что $T \gg 1$.

Удобно положить $T = \varepsilon^{-1}$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда исходное уравнение (1) после замены времени преобразуется в уравнение

$$\varepsilon \dot{x} + x = \frac{a\delta}{\varepsilon} \int_{-1}^0 \exp\left(-\frac{\delta}{\varepsilon}(s+1)\right) x(t+s) ds + f(x). \quad (2)$$

Поставим задачу исследовать динамику (2) в окрестности нулевого состояния равновесия. Сначала проведем линейный анализ. Линеаризуем (2) в нуле:

$$\varepsilon \dot{x} + x = \frac{a\delta}{\varepsilon} \int_{-1}^0 \exp\left(-\frac{\delta}{\varepsilon}(s+1)\right) x(t+s) ds. \quad (3)$$

О поведении решений линейного уравнения (3), а значит, и о локальной динамике уравнения (2), в главном можно судить по расположению корней характеристического уравнения

$$\varepsilon\lambda + 1 = a\delta\varepsilon^{-1}(\lambda - \delta\varepsilon^{-1})^{-1}(e^{-\delta\varepsilon^{-1}} - e^{-\lambda}) \quad \text{либо} \quad \lambda = \delta\varepsilon^{-1}.$$

Отметим, что при достаточно малых ε равенство $\lambda = \delta\varepsilon^{-1}$ невозможно. Следовательно, характеристическое уравнение можно записать в виде

$$\varepsilon^2\lambda^2 + \varepsilon\lambda(1 - \delta) - \delta - a\delta e^{-\delta\varepsilon^{-1}} = -a\delta e^{-\lambda}. \quad (4)$$

Относительно расположения корней (4) справедливо следующее утверждение.

Лемма. Пусть $|a| < 1$. Тогда найдется такое $\gamma > 0$, что при всех достаточно малых ε для корней (4) выполнено неравенство $\operatorname{Re} \lambda < -\gamma$. При этом нулевое решение (2) асимптотически устойчиво, все решения из его достаточно малой (но не зависящей от ε) окрестности стремятся к нулю.

Если $|a| > 1$, то существует такое $\gamma > 0$, что уравнение (4) при каждом достаточно малом ε имеет корень $\lambda(\varepsilon)$ такой, что $\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon) > \gamma$. В этом случае нулевое решение исходного уравнения (2) неустойчиво, и в некоторой его (не зависящей от ε) окрестности нет устойчивых режимов.

Если же $|a| = 1$, то существует бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом, в детальном изучении нуждаются ситуации, когда a близко либо к 1, либо к -1 . Ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая, когда параметр a близок к -1 . Предположим, что

$$a = -(1 + \mu), \quad |\mu| \ll 1.$$

Принципиальным является соотношение между малыми параметрами ε и μ . Мы рассмотрим отдельно два, как будет ясно из дальнейшего, основных случая: μ имеет порядок ε^2 и μ по порядку больше, чем ε^2 . В первом случае имеем

$$a = -(1 + \varepsilon^2 a_1). \quad (5)$$

Тогда для корней, вещественная часть которых близка к нулю при малых ε , имеем асимптотическое представление

$$\lambda_n(\varepsilon) = \pi(2n+1)i \left(1 + \frac{1-\delta}{\delta}\varepsilon + \frac{(1-\delta)^2}{\delta^2}\varepsilon^2 \right) - \frac{(1+\delta^2)\pi^2(2n+1)^2}{2\delta^2}\varepsilon^2 + a_1\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \quad (6)$$

Во втором случае (μ больше по порядку, чем ε^2) будем считать, что μ имеет порядок ε^p ($0 < p < 2$), т.е.

$$a = -(1 + \varepsilon^p a_1), \quad 0 < p < 2. \quad (7)$$

В (6) корни непрерывно зависят от малого параметра. Снимем требование непрерывности. Тогда мы можем записать корни (4) следующим образом. Фиксируем произвольно $\omega > 0$. Через $\theta(\varepsilon)$ обозначим такое число из полуинтервала $[0, 2\pi)$, что выражение $\omega\varepsilon^{p/2-1} + \theta(\varepsilon)$ является нечетно кратным π . Тогда корни (4), близкие к мнимой оси при малых ε , мы можем выписать в виде асимптотического ряда

$$\begin{aligned} \lambda_n(\varepsilon) = & \left(\frac{\omega(2n+1)}{\varepsilon^{1-p/2}} + \theta(\varepsilon)(2n+1) + \frac{1-\delta}{\delta}\varepsilon^{p/2} + o(\varepsilon^{p/2}) \right) i - \\ & - \frac{(1+\delta^2)\pi^2(2n+1)^2}{2\delta^2}\varepsilon^p + a_1\varepsilon^p + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что формула (8) зависит от непрерывного параметра ω , но тем не менее уравнение (4) имеет лишь счетное число корней. При $\varepsilon \rightarrow 0$ происходит „перескакивание“ из окрестности одного корня в окрестность другого за счет разрывной функции θ . Таким образом, модуль каждого λ_n неограниченно растет при $\varepsilon \rightarrow 0$. Выбор ω влияет лишь на скорость перехода с одного корня на другой.

2. Нелинейный анализ

Пусть сначала выполнено условие (5).

Воспользуемся методом, разработанным в [6]. Рассмотрим сначала случай, когда выполнено соотношение (5). Сделаем в (2) подстановку

$$x = \varepsilon u(\tau, r) + \varepsilon^2 u_2(\tau, r) + \varepsilon^3 u_3(\tau, r) + \dots \quad (9)$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$, $r = \left(1 - \frac{1-\delta}{\delta}\varepsilon + \frac{(1-\delta)^2}{\delta^2}\varepsilon^2\right)t$, u_2 и u_3 являются периодическими по r , а u представляется в виде

$$u(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(i\pi(2n+1)r).$$

После подстановки в получившемся формальном тождестве будем приравнивать отдельно коэффициенты при одинаковых степенях ε . При ε^1 получаем верное равенство, а приравнявая коэффициенты при ε^2 , получаем

$$u_2 = \frac{f_2}{2}u^2.$$

На третьем шаге из условия разрешимости уравнения относительно u_3 получаем краевую задачу параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1+\delta^2}{2\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + (f_2^2 + f_3)u^3 \quad (10)$$

с антипериодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1). \quad (11)$$

Система (10), (11) является квазинормальной формой для исходного уравнения (2). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть краевая задача (10), (11) имеет определенное при всех $\tau \geq 0$ ограниченное решение $u_0(\tau, r)$. Тогда исходное уравнение (2) имеет асимптотическое по невязке при $t \geq 0$ решение

$$x_0(t, \varepsilon) = \varepsilon u_0 \left(\varepsilon^2(1 + o(1))t, \left(1 + \frac{1 - \delta}{\delta} \varepsilon + \frac{(1 - \delta)^2}{\delta^2} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \right) t \right) + o(\varepsilon). \quad (12)$$

Отметим, что из этой теоремы мы не можем сделать вывод о существовании у (2) точного решения с приведенной асимптотикой. Можем лишь утверждать, что если u_0 неустойчиво, то из существования точного решения следует его неустойчивость. Поэтому рассматривать нужно только устойчивые решения (10), (11). Однако, если u_0 имеет достаточно простой вид, то можно сформулировать утверждение о существовании и устойчивости у (2) соответствующего точного решения.

Теорема 2. Пусть (10), (11) имеет состояние равновесия $u_0(r)$, и только один его множитель равен по модулю 1. Тогда, при малых ε , уравнение (2) имеет периодическое решение вида (12) той же, что и $u_0(r)$ устойчивости.

Рассмотрим теперь случай, когда надкритичность μ имеет порядок ε^p , т.е. выполнено равенство (7). Согласно [10, 11], замена, аналогичная (9), имеет вид

$$x = \varepsilon^{p/2} u(\tau, r) + \varepsilon^{2p} u_2(\tau, r) + \varepsilon^{3p/2} u_3(\tau, r) + \dots,$$

где $\tau = \varepsilon^p t$, $r = \left(\omega \varepsilon^{p/2-1} + \theta(\varepsilon) - \frac{1-\delta}{\delta} \varepsilon^{p/2} + o(\varepsilon^{p/2}) \right) t$, функция u представляется в виде

$$u(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(i(2n+1)r),$$

а u_2 и u_3 являются периодическими по r . Производя стандартные действия, получим, что роль квазинормальной формы в данном случае играет краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \omega^2 \frac{1 + \delta^2}{2\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + (f_2^2 + f_3) u^3, \quad (13)$$

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + \pi). \quad (14)$$

Справедливы результаты, аналогичные теоремам 1 и 2.

Теорема 3. Пусть при некотором $\omega > 0$ краевая задача (13), (14) имеет определенное при всех $\tau \geq 0$ ограниченное решение $u_0(\tau, r)$. Тогда исходное уравнение (2) имеет асимптотическое по невязке при $t \geq 0$ решение

$$x_0(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} u_0 \left(\varepsilon^2(1 + o(1))t, \left(\omega \varepsilon^{p/2-1} + \theta(\varepsilon) + \frac{1 - \delta}{\delta} \varepsilon^{p/2} + o(\varepsilon^{p/2}) \right) t \right) + o(\varepsilon^{p/2}). \quad (15)$$

3. Выводы

Важный вывод, подтверждающий возможность мультистабильности, связан с численным определением параметров в (2). Суть вопроса состоит в том, что параметры a_1 и p , фигурирующие в (7), определяются в довольно широком диапазоне. Кроме того, положительный параметр ω выбирался совершенно произвольно. В силу того, что эти параметры существенно влияют на динамику квазинормальных форм, а значит, и на локальную динамику системы (2), получаем явное указание на возможность явления мультистабильности. Проиллюстрируем это.

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \dot{x} + x = \frac{\delta(1+\mu)}{\varepsilon} \int_{-1}^0 \exp\left(\frac{-\delta}{\varepsilon}(s+1)\right) x(t+s) ds + f_2 x^2 + f_3 x^3,$$

где параметры ε , μ , δ , f_2 и f_3 каким-то образом фиксированы, причем $\delta > 0$, а ε и μ предполагаются положительными и “достаточно малыми”. Например, $\varepsilon = 10^{-3}$, $\mu = 10^{-2}$. Будем считать, что эти величины “малы”. Представим μ в виде $\mu = \varepsilon^p a_1$. Параметр p отсюда выражается как $p = \log_{\varepsilon} \mu - \log_{\varepsilon} a_1$. Нас будут интересовать такие значения a_1 , которые не являются ни слишком малыми, ни слишком большими относительно ε . Можно, например, считать, что a_1 принадлежит интервалу $(10^{-1}, 10)$.

Для каждого из значений a_1 (для которых $0 < p < 2$) рассмотрим квазинормальную форму (13), (14), считая $\omega > 0$ произвольным параметром:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \omega^2 \frac{1+\delta^2}{2\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + (f_2^2 + f_3) u^3, \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r + \pi). \quad (16)$$

Рассмотрим постоянные по τ решения. Они определяются ОДУ

$$\omega^2 \frac{1+\delta^2}{2\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + (f_2^2 + f_3) u^3 = 0, \quad (17)$$

с краевыми условиями

$$u(r + \pi) = -u(r).$$

Уравнение (17) при $f_2^2 + f_3 > 0$ имеет периодическое решение $u_0(r; a_1)$ с ненулевым наименьшим периодом ωS . Возьмем $\omega = 2\pi S^{-1}$. Тогда $u_0(r; a_1)$ будет решением краевой задачи, а значит, и нормализованной формы (16). Отметим, что $\frac{du_0}{dr}$ ровно один раз обращается в ноль на участке длины π . Линеаризуем (16) на u_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \left(\omega^2 \frac{1+\delta^2}{2\delta^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + a_1 + 3(f_2^2 + f_3) u_0^2 \right) u, \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r + \pi).$$

У линейного оператора, стоящего в правой части, есть одно нулевое собственное значение, а все остальные отрицательны. В силу этого, $u_0(r; a_1)$ является устойчивым решением краевой задачи (16), (17). Тогда в силу теоремы 4 у исходного уравнения существуют устойчивые решения, близкие к

$$x(t) = \varepsilon^{p/2} u_0\left(\left(\frac{\omega}{\varepsilon^{1-p/2}} + \theta(\omega, \varepsilon) + o(1)\right)t; a_1\right).$$

Отсюда видно, что у исходного уравнения при $\varepsilon \rightarrow 0$ неограниченно растет количество периодических решений в окрестности состояния равновесия.

Отметим, что полученные результаты во многом повторяют результаты для „предельного“ при $\delta \rightarrow +\infty$ случая, когда запаздывание сконцентрировано в одной точке.

Список литературы

1. Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983.
2. Дмитриев А. С., Кислов В. Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
3. Кузнецов С. П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, №12. С. 1410–1428.
4. Kiliyas T., Kutzer K., Moegel A., Schwarz W. Electromic chaos generators — design and applications // International Journal of Electronics. 1995. Vol. 79, №6. P. 737–753.
5. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1981.
6. Кащенко С. А. Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 25, №8. С. 1448–1451.
7. Кащенко И. С., Кащенко С. А. Асимптотика сложных пространственно-временных структур в системах с большим запаздыванием // Известия вузов. ПНД. 2008. Т. 16, №4. С. 137–146.
8. Кащенко И. С. Нормализация в системе с двумя близкими большими запаздываниями // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, №1. С. 169–180.
9. Кащенко И. С. Нормализация уравнения с линейно-распределенным запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, №4. С. 109–116.
10. Кащенко И. С. Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 421, №5. С. 586–589.
11. Кащенко И. С. Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической Физики. 2008. Т. 48, №12. С. 2141–2150.

Local Dynamics of an Equation with Large Exponential Distributed Delay

Kashchenko I.S.

Keywords: distributed delay, singular perturbation, normal form, local dynamics

We study properties of local dynamics of a differential equation with exponentially distributed delay. In critical cases we built special evolutionary equations.

Сведения об авторе:

Кащенко Илья Сергеевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд.-физ. мат. наук, доцент кафедры математического моделирования.