

УДК 517.5

Об операторах дифференцирования и интегрирования

Морозов А. Н.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: moroz@uniyar.ac.ru

получена 1 декабря 2010

Ключевые слова: оператор дифференцирования, первообразная функция, квазинорма

На основе операторного подхода к дифференцированию рассматривается распространение понятия первообразной на более широкие классы функций.

1. Введение и основные обозначения

Понятия производной и интеграла (первообразной) являются одними из основополагающих понятий в математике в целом и теории функций в частности. На протяжении своей истории они не раз обобщались и распространялись на новые функциональные классы. В работах автора [1] — [3] рассмотрено распространение k -й производной с пространств W_p^k на пространства, являющиеся в определённом смысле их преемниками и имеющие нижний индекс меньше единицы. Это распространение было связано с исследованием кусочно-полиномиальных приближений в соответствующих пространствах L_p . В данной статье введённые производные при $k = 1$ сопоставляются с понятием первообразной.

В 70—80-е годы прошлого века произошёл всплеск интереса к пространствам, построенным на основе L_p ($0 < p < 1$), и исследованию в них основных характеристик функций и соотношений. (В большой степени это было связано с получением фундаментальных результатов о свойствах модулей непрерывности в пространствах L_p (см., например, [4], [5]).) К концу XX века по данной тематике накопился большой фактический материал; стало понятно, что не все надежды оправдались. Некоторые привычные важные конструкции оказались практически бесполезными в случае $0 < p < 1$. Новая волна исследований была посвящена обсуждению характеристик функций и методов, плодотворных во всех случаях (см., например, [6], [7]). В уже упоминавшихся работах [1] — [3] получены новые утверждения о кусочно-полиномиальных и локальных приближениях функций, в том числе асимптотические формулы для величин наилучших приближений, справедливые для всех $p > 0$. Данные асимптотические формулы неразрывно связаны с определённой гладкостью

приближаемых функций. При $p \geq 1$ — с наличием обычных производных нужного порядка, при $0 < p < 1$ — с некоторым распространением этих производных. Рассмотрение обратной операции приводит в свою очередь к распространению операции интегрирования на более широкие классы функций, что может иметь как теоретический, так и практический интерес.

Как обычно, $L_p[I]$ обозначает пространство действительных функций, интегрируемых в степени p ($0 < p < \infty$) по Лебегу на отрезке $I = [a; b]$, с величиной элементов

$$\|f\|_{L_p[I]} = \left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}};$$

$C[I]$ — пространство непрерывных на отрезке I функций,

$$\|f\|_{C[I]} = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

Когда неясность исключена, сокращаем обозначения до L_p и $\|f\|_p$ или соответственно до C и $\|f\|_\infty$.

Ещё, чтобы избежать постоянных оговорок, для значений индекса, меньших единицы, будет использоваться буква r , т. е. всюду ниже $0 < r < 1$, а $1 \leq p \leq \infty$.

Основой для дальнейших построений являются пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке I функций $C^1[I]$ и

$$W_p^1[I] = \left\{ f : f \text{ абсолютно непрерывна на отрезке } I, f' \in L_p[I] \right\}$$

с нормами $\|f\|_p + \|f'\|_p$. Нормы на пространствах W_p^1 и C^1 могут быть преобразованы к виду

$$\|f\|_p + \sup_{t>0} t^{-1} \omega_1(f, t)_p,$$

где

$$\omega_1(f, t)_p = \sup_{0 < \delta < t} \left\| \Delta_\delta^1 f \right\|_{L_p[a, b-\delta]}$$

— модуль непрерывности в L_p ,

$$\Delta_\delta^1 f(x) = f(x + \delta) - f(x).$$

Хорошо известно, что

$$\sup_{t>0} t^{-1} \omega_1(f, t)_p = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \omega_1(f, t)_p = \|f'\|_p.$$

Главные идеи данной статьи проиллюстрируем следующим рассуждением. Рассмотрим оператор $V : C \mapsto C^1$, $(Vf)(x) = \int_a^x f(t) dt$ (с любым используемым определением интеграла). Причём пространство C^1 здесь отождествим с факторпространством C^1/M , где M — подпространство постоянных функций. Пусть на пространстве C задана норма $\|f\|_1$, а на пространстве C^1 — норма $\left\| \int_a^x F'(t) dt \right\|_1 + \|F'\|_1$.

Получаем, что $\|f\|_1 \leq \|Vf\|_{C^1} \leq (b-a+1)\|f\|_1$.

Из левого неравенства следует, что оператор V обратим, а из правого — что может быть однозначно распространён с C на его замыкание в метрике, порождаемой $\|\cdot\|_1$ (т. е. на пространство L_1), при этом областью значений V будет пространство, являющееся замыканием C^1 в определённой на нём метрике (т. е. W_1^1/M). Относящиеся к этому рассуждению теоремы см., например, в [8] на с. 204 и 240 соответственно.

Пусть $\Lambda : C^1 \mapsto C$ — обратный по отношению к V линейный оператор, тогда $(\Lambda f)(x) = f'(x)$. Ясно, что можно было начинать обсуждаемое построение не с оператора V , а с оператора Λ . Такое построение является и более естественным. Распространение V равносильно распространению Λ .

Пространства W_p^1 можно рассматривать как замыкания пространства C^1 в метриках, порождаемых нормами

$$\|\cdot\|_p + \sup_{t>0} t^{-1} \omega_1(\cdot, t)_p,$$

а построение производной в пространствах W_p^1 — как распространение непрерывного линейного оператора Λ с пространства C^1 , т. е. построение $\Lambda : W_p^1 \mapsto L_p$.

2. Пространства Y_r^1

В отмеченную схему распространения операторов дифференцирования и интегрирования можно включить более обширные пространства (подробнее относительно дифференцирования см. [1]–[3]). При этом, конечно, в силу известных теорем нельзя ожидать дальнейшего сохранения формулы Ньютона—Лейбница.

На пространстве C^1 рассмотрим семейство квазинорм (определение и основные свойства квазинорм см., например, [9], с. 79)

$$\|f\|_{H_r^1} = \|f\|_r + |f|_r, \text{ где } |f|_r = \sup_{t>0} t^{-1} \omega_1(f, t)_r.$$

Определим (см. [1]) для каждого r ($0 < r < 1$) пространство Y_r^1 как пополнение C^1 в метрике, порождаемой квазинормой пространства H_r^1 .

О существовании метрики, ассоциированной с квазинормой, см. [9], с. 80. Так, метрику на H_r^1 определяет функционал

$$\|\cdot\|_r^r + |\cdot|_r^r.$$

Отметим, что

$$|f|_r^r = \sup_{t>0} t^{-r} \omega_1(f, t)_r^r = \sup_{t>0} \left(t^{-r} \int_a^{b-t} |\Delta_t^1 f(x)|^r dx \right).$$

Применим результаты [1]–[2] в нашем случае.

Теорема [1]. На всех пространствах Y_r^1 определён линейный оператор $\Lambda : Y_r^1 \mapsto L_r$ и выполняется

- 1) $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \omega_1(f, t)_r = \|\Lambda f\|_r,$
- 2) если $f \in W_1^1[J], J \subset I$, тогда $\Lambda f|_J = f'.$

Определение. Функция f имеет первообразную в широком смысле, если для некоторого r найдётся функция $F \in Y_r^1$ такая, что $f = \Lambda F$.

Функцию F назовём первообразной. Понятно, что если $f = \Lambda F$, то $f = \Lambda (F + \phi)$, где $\phi \in \text{Ker} \Lambda$ — ядру оператора Λ . Отметим, что пространство $\text{Ker} \Lambda$ заметно отличается от пространства постоянных функций M (см. ниже).

Рассмотрим несколько утверждений с обсуждаемыми понятиями.

Теорема. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} l(x), & \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ h(x), & \text{если } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

где $l(x) \in C^1[-1; 0]$, $h(x) \in C^1[0; 1]$.

Тогда $f \in Y_r^1[-1; 1]$ для всех $0 < r < 1$.

Доказательство. Поскольку $C^1 \subset W_1^1 \subset Y_r^1$, то для доказательства достаточно построить последовательность функций из W_1^1 , сходящуюся к $f(x)$ по метрике пространства H_r^1 . Без потери общности можно считать, что $l(0) = 0$. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} l(x), & -1 \leq x \leq 0, \\ nh(\frac{1}{n})x, & 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ h(x), & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Обозначим $g_n = f_n - f$, $c_0 = \max_{0 \leq x \leq 1} |h(x)|$, $c_1 = \max_{0 \leq x \leq 1} |h'(x)|$. Тогда

$$\|g_n\|_r^r = \int_0^{\frac{1}{n}} \left| nh(\frac{1}{n})x - h(x) \right|^r dx \leq 2 \frac{c_0^r}{n}.$$

Оценим для разных t значение выражения $t^{-r} \int_{-1}^{1-t} |\Delta_t^1(g_n)(x)|^r dx$.

При $t \geq \frac{1}{n}$ получаем

$$t^{-r} \int_{-t}^{\frac{1}{n}} |g_n(x+t) - g_n(x)|^r dx = 2 t^{-r} \int_0^{\frac{1}{n}} |g_n(x)|^r dx \leq 2 \frac{c_0^r}{n^{1-r}}.$$

При $0 < t < \frac{1}{n}$ получаем

$$t^{-r} \int_{-t}^{\frac{1}{n}} |g_n(x+t) - g_n(x)|^r dx = t^{-r} \left(\int_{-t}^0 |g_n(x+t)|^r dx + \int_0^{\frac{1}{n}-t} |g_n(x+t) - g_n(x)|^r dx + \right.$$

$$+ \int_{\frac{1}{n}-t}^{\frac{1}{n}} |g_n(x)|^r dx \leq t^{-r} \left(t c_0^r + \left(\frac{1}{n} - t \right) t^r (n^r c_0^r + c_1^r) + t c_0^r \right) \leq 3 \frac{c_0^r}{n^{1-r}} + \frac{c_1^r}{n},$$

учтя, что на $[0; \frac{1}{n} - t]$ выполняется

$$|g_n(x+t) - g_n(x)|^r = |nh(\frac{1}{n})t + (h(x) - h(x+t))|^r \leq n^r c_0^r t^r + c_1^r t^r.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Если функция f кусочно непрерывно дифференцируема, тогда $f \in Y_r^1$ для всех $0 < r < 1$.

Подразумевается, что существует набор точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m+1} = b$ такой, что при каждом фиксированном i , $1 \leq i \leq m+1$, функция может быть доопределена в точке x_i или точке x_{i-1} до условия $f \in C^1[x_{i-1}; x_i]$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы, функция $f_n \in W_1^1$ получается из функции f заменой около каждой точки x_i , $1 \leq i \leq m$, значений f на линейную функцию, соединяющую значения $f(x_i)$ и $f(x_i + \frac{1}{n})$ (или $f(x_i)$ и $f(x_i - \frac{1}{n})$). Тогда

$$\|f_n - f\|_r^r \leq \frac{2mc_0^r}{n}, \quad \text{где } c_0 = \|f\|_\infty,$$

$$|f_n - f|_r^r \leq m \left(3 \frac{c_0^r}{n^{1-r}} + \frac{c_1^r}{n} \right), \quad \text{где } c_1 = \|f'\|_\infty.$$

Следствие 2. Если функция f кусочно постоянна, тогда $f \in \text{Ker} \Lambda$.

Доказательство. По следствию 1 $f \in Y_r^1$ для всех $0 < r < 1$. Тогда по теореме [1] $\Lambda f = 0$.

Очень важный класс образуют степенные функции и близкие к степенным. При $k = 1$ результаты [2] дают следующее утверждение.

Теорема [2]. Пусть $f \in L_r[a; b] \cap C^1[a; b - \epsilon]$ для любого $\epsilon > 0$, f' неотрицательна на $[a, b]$ и не убывает, тогда если конечна величина $\|f'\|_r$, то $f \in Y_r^1[a, b]$. При этом

$$\sup_{t>0} t^{-1} \omega_1(f, t)_r = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \omega_1(f, t)_r.$$

Замечание. Ясно, что утверждение остаётся справедливым, если условие на производную изменить на « f' неположительна на $[a, b]$ и не возрастает». В том случае, когда особенность функции находится на левом краю отрезка, условия на производную также нужно соответствующим образом изменить. Так, для функции f с условиями « f' неположительна на $(a; b]$ и не убывает» получаем те же свойства относительно выражения

$$t^{-r} \int_{a+t}^b |f(x-t) - f(x)|^r dx,$$

что имеет функция из условия теоремы [2] относительно выражения

$$t^{-r} \int_a^{b-t} |f(x+t) - f(x)|^r dx.$$

С другой стороны, замена $x - t = y$ в первом выражении делает их равносильными.

Поэтому каждая функция вида $\frac{1}{x^\alpha}$ имеет первообразную в широком смысле на $[0; 1]$. Можно доказать более сильное утверждение.

Предложение. Пусть неотрицательная функция $h \in L_r[0; 1] \cap C^1[-\epsilon; 1]$ для любого $\epsilon > 0$, h' неположительна на $(0, 1]$ и не убывает, а величина $\|h'\|_r$ конечна. Определим

$$f(x) = \begin{cases} h(-x), & \text{если } x \in [-1; 0], \\ h(x), & \text{если } x \in (0; 1]. \end{cases}$$

Тогда $f \in Y_r^1[-1; 1]$.

Доказательство. По теореме [2] и замечанию $f \in Y_r^1[-1; 0]$ и $f \in Y_r^1[0; 1]$. Из доказательства теоремы [2] следует, что в качестве последовательности, сходящейся к h по метрике пространства $H_r^1[0; 1]$, можно взять

$$h_n(x) = \begin{cases} h(\frac{1}{n}), & \text{если } x \in [0; \frac{1}{n}], \\ h(x), & \text{если } x \in (\frac{1}{n}; 1]. \end{cases}$$

Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} h_n(-x), & \text{если } x \in [-1; 0], \\ h_n(x), & \text{если } x \in (0; 1]. \end{cases}$$

Тогда

$$\|f - f_n\|_{L_r[-1; 1]}^r \leq 2 \|h - h_n\|_{L_r[0; 1]}^r.$$

Оценим $\|f - f_n\|_r^r$. Заметим, что

$$\|\Delta_t^1(f - f_n)\|_{L_r[-1; 1-t]}^r = \|\Delta_t^1(f - f_n)\|_{L_r[-1; -t]}^r + \|\Delta_t^1(f - f_n)\|_{L_r[-t; 0]}^r + \|\Delta_t^1(f - f_n)\|_{L_r[0; 1-t]}^r.$$

Таким образом,

$$t^{-r} \|\Delta_t^1(f - f_n)\|_{L_r[-1; 1-t]}^r \leq 2 \|h - h_n\|_{L_r[0; 1]}^r + t^{-r} \|\Delta_t^1(f - f_n)\|_{L_r[-t; 0]}^r.$$

Рассмотрим для разных t значение выражения $t^{-r} \int_{-t}^0 |\Delta_t^1(f - f_n)(x)|^r dx$.

Для $t \geq \frac{2}{n}$ получаем

$$t^{-r} \|\Delta_t^1(f - f_n)\|_{L_r[-t; 0]}^r = 2 t^{-r} \int_0^{\frac{1}{n}} |(h - h_n)(x)|^r dx \leq 2 \|h - h_n\|_{L_r[0; 1]}^r.$$

Такая же оценка подходит для $\frac{1}{n} \leq t < \frac{2}{n}$.

Пусть $0 < t < \frac{1}{n}$. В этом случае на $[-t; 0]$ выражение $\Delta_t^1(f - f_n)$ равно $h(x+t) - h(-x)$. В силу симметрии графиков функций $h(x+t)$ и $h(-x)$ относительно прямой $x = -\frac{t}{2}$ (это следует из равенства $h(x+t) = h(-(2(-\frac{t}{2}) - x))$) выполняется

$$t^{-r} \int_{-t}^0 |\Delta_t^1(f - f_n)(x)|^r dx = 2 t^{-r} \int_{-\frac{t}{2}}^0 |h(x+t) - h(-x)|^r dx = 2 t^{-r} \int_{-\frac{t}{2}}^0 (h(-x) - h(x+t))^r dx.$$

С другой стороны, значения выражения $h(-x) - h(x+t)$ на $[-\frac{t}{2}; 0]$ по условию равны значениям выражения $h(x) - h(-x+t)$ на $[0; \frac{t}{2}]$.

Сопоставим на $[0; \frac{t}{2}]$ функции $h(-x+t)$ и $h(x+t)$. Их значения равны при $x = 0$, первая — возрастает, вторая — убывает. Таким образом

$$t^{-r} \int_{-t}^0 |\Delta_t^1(f - f_n)(x)|^r dx \leq 2 t^{-r} \int_0^{\frac{t}{2}} (h(x) - h(x+t))^r dx \leq 2 \|h - h_n\|_{L_r[0;1]}^r.$$

Предложение доказано.

Замечание. Если в формулировке предложения взять «неположительная функция $h \in L_r[0; 1] \cap C^1[-\epsilon; 1]$ для любого $\epsilon > 0$, h' неотрицательна на $(0, 1]$ и не возрастает», то утверждение и доказательство полностью сохраняются (только вместо разности $f - f_n$ нужно рассмотреть $f_n - f$). Из этого следует, например, что функция $f(x) = \ln|x|$ принадлежит пространствам $Y_r^1[-1; 1]$ для всех $0 < r < 1$ и является первообразной функции $\frac{1}{x}$ на $[-1; 1]$.

3. Заключение

Рассмотрение пространств Y_r^1 дополняет сложившуюся систематизацию пространств «гладких» функций. Результаты статьи [3] фактически показывают, что функции из этих пространств почти всюду имеют производную (быть может, более слабую, чем классическая). Пока нет квазинормы (метрики), отделяющей эти пространства от H_r^1 , но такая ситуация встречается и в используемой систематизации.

С точки зрения теории приближения функций пространства Y_r^1 прямо продолжают шкалу пространств W_p^1 , которые могут быть описаны как состоящие из функций, приближаемых с порядком $O(\frac{1}{n})$ кусочно-постоянными функциями на равномерных разбиениях в метрике пространства L_p . Функции из пространств Y_r^1 приближаются с таким же порядком в метриках пространств L_r . Более точные формулировки даны в [3].

Интегрируемость функции (возведённой в ту или иную степень) — «нулевой» пункт в шкале «гладкости» (относительно пространства L_p с соответствующим показателем). Распространение оператора интегрирования в пространствах L_r показывает, что аппроксимационные задачи в этих пространствах на соответствующих классах функций несильно отличаются от аппроксимационных задач в пространстве L_1 .

Список литературы

1. Морозов А. Н. Кусочно-полиномиальные приближения и дифференцируемость в пространствах L_p ($0 < p < 1$) // Модел. и анализ информ. систем. 2005. Т. 12, № 1. С. 18–21.
2. Морозов А. Н. Операторы дифференцирования в пространствах L_p // Математика, кибернетика, информатика: Труды международной научной конференции, посвящённой памяти профессора А. Ю. Левина (25 – 26 июня 2008 г., Ярославль). Ярославль, 2008. 196 с.
3. Морозов А. Н. Описание пространств дифференцируемых функций при помощи локальных приближений // Модел. и анализ информ. систем. 2009. Т. 16, № 1. С. 7–15.
4. Брудный Ю. А. Пространства, определяемые с помощью локальных приближений // Тр. ММО. 1971. Т. 24. С. 69–132.
5. Стороженко Э. А., Освальд П. Теорема Джексона в пространствах $L_p(R^n)$, $0 < p < 1$ // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 1. С. 630–639.
6. Ditzian Z. Polynomial Approximation and $w_\varphi^r(f, t)$ Twenty Years Later // Surveys in Appr. Theory. 2007. V. 3. P. 106–151.
7. Руновский К. В. Приближение семействами линейных полиномиальных операторов : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2010. 21 с.
<http://mech.math.msu.su/snark/files/vak/aro8.pdf>
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 750 с.
9. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение / пер. с англ. В. С. Крючкова и П. И. Лизоркина. М.: Мир, 1980. 264 с.

On Differential and Antidifferential Operators

Morozov A. N.

Keywords: differential operator, antiderivative, quasinorm

On the basis of the operator approach to differentiation we extend the concept of an antiderivative notion to wider classes of functions.

Сведения об авторе:

Морозов Анатолий Николаевич,

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент