Модел. и анализ информ. систем. Т. **18**, № **3** (2011) 82–100

УДК 519.16 + 514.172.45

Гиперграфы специального вида и анализ свойств релаксаций разрезного многогранника

Николаев А.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: Awern@yandex.ru

получена 1 октября 2010

Ключевые слова: гиперграфы, релаксации разрезного многогранника, корневой полуметрический многогранник, распознавание целочисленности.

Исследуется связь между классом гиперграфов специального вида и свойствами точек релаксаций $M_{n,k}$ разрезного многогранника. Устанавливается, что при достаточно больших n в многогранниках $M_{n,4}$ и $M_{n,5}$ имеются точки, в любом разложении которых по вершинам многогранника $M_{n,3}$ нет ни одной целой вершины.

Рассмотрим множество 3-однородных смешанных гиперграфов [1] вида $G = (V, E, A)$, где

- V – множество вершин, $V = N_n = \{1, ..., n\}$;
- E – множество неориентированных ребер, $E = \{(i, j, k)\} \subseteq N_n \times N_n \times N_n$;
- A – множество ориентированных ребер, $A = \{((i, j), k)\} \subseteq N_n \times N_n \times N_n$, где пара вершин (i, j) – начало ребра, вершина k – конец ребра.

Введем операцию *инвертирования i-й вершины* гиперграфа $G = (V, E, A)$, которая преобразует все ребра, инцидентные этой вершине, следующим образом:

$$(i, j, k) \to ((j, k), i), \quad ((j, k), i) \to (i, j, k), \quad ((i, j), k) \to ((i, k), j).$$

Результатом операции инвертирования является новый 3-однородный смешанный гиперграф $G' = Inv_i G = (V, E', A')$.

Аналогично определим операцию *инвертирования подмножества вершин* гиперграфа G, так, что $Inv_{i,j,k}(G) = Inv_i(Inv_j(Inv_k(G)))$.

Нетрудно убедиться, что $Inv_i(Inv_j(G)) = Inv_j(Inv_i(G))$ и операция инвертирования подмножества вершин гиперграфа G не зависит от порядка инвертирования отдельных вершин.

Введем класс G_I гиперграфов $G = (V, E, A)$, для которых множество неориентированных ребер E не пусто и остается непустым при всех возможных инверсиях.

$$G = (V, E, A) \in G_I \Leftrightarrow \begin{cases} E \neq \oslash, \\ \forall W \subseteq V: \ G' = Inv_W(G) = (V, E', A'), \ \text{где } E' \neq \oslash. \end{cases}$$

Таким образом, класс гиперграфов G_I замкнут относительно операции инвертирования вершин:

$$G = (V, E, A) \in G_I \ \Rightarrow \ \forall W \subseteq V : Inv_W(G) \in G_I.$$

Теорема 1. *Задача распознавания вида: «Верно ли, что гиперграф G не принадлежит классу G_I?» является NP-полной.*

Доказательство. Рассмотрим задачу следующего вида: «Для заданного 3 - однородного гиперграфа $\overline{G} = (V, E)$ определить, можно ли так раскрасить вершины гиперграфа в два разных цвета, чтобы ни одно ребро не было монохромным (не содержало три вершины одного цвета)?». Эта задача известна как *задача о 2-раскрашиваемости 3-однородного гиперграфа* и является NP-полной [2].

Множество 3-однородных гиперграфов $\overline{G} = (V, E)$ является подмножеством множества 3-однородных смешанных гиперграфов $G = (V, E, A)$. Нетрудно заметить, что на нем задача распознавания вида: «Верно ли, что гиперграф G не принадлежит классу G_I?» эквивалентна задаче о 2-раскрашиваемости 3-однородного гиперграфа, достаточно сопоставить множества инвертированных и неинвертированных вершин двум различным цветам. Таким образом, рассматриваемая задача распознавания включает задачу о 2-раскрашиваемости 3-однородного гиперграфа в качестве своего частного случая и также является NP-полной. **Теорема 1 доказана.**

Далее гиперграфы приведенного вида используются для описания свойств точек релаксаций разрезного многогранника.

В работе [3] определен класс многогранников $M_n \subseteq R^{4n^2}$, $n \in N$, позже названных *корневыми полуметрическими* [4]. Задающие M_n линейные ограничения имеют вид:

$$x_{i,j} + y_{i,j} + z_{i,j} + t_{i,j} = 1, \tag{1}$$

$$x_{i,j} + y_{i,j} = x_{k,j} + y_{k,j}, \tag{2}$$

$$x_{i,j} + z_{i,j} = x_{i,l} + z_{i,l}, \tag{3}$$

$$x_{i,j} = x_{j,i}, \ t_{i,j} = t_{j,i}, \ y_{i,j} = z_{j,i}, \tag{4}$$

$$y_{i,i} = z_{i,i} = 0, \tag{5}$$

$$x_{i,j} \geq 0, \ y_{i,j} \geq 0, \ z_{i,j} \geq 0, \ t_{i,j} \geq 0, \tag{6}$$

где i, j, k, l независимо пробегают значения $1, ..., n$.

Заметим, что координаты точек многогранника M_n удобно представлять в виде блочной матрицы (Таблица 1).

Ограничения (4) задают симметрию относительно главной диагонали в матрице из блоков, и, значит, достаточно ограничиться рассмотрением лишь половины матрицы координат ($i \leq j$).

$x_{i,j}$	$y_{i,j}$
$z_{i,j}$	$t_{i,j}$

Таблица 1. Блок координат

Многогранники этого класса обладают рядом особенностей, обусловливающих значительный интерес к ним (см. [4,5,6]). В частности, в работе [7] установлена полиномиальная разрешимость задачи следующего вида: для заданной линейной целевой функции f требуется выяснить, достигается ли $\max\{f(u) : u \in M_n\}$ в целой вершине многогранника M_n (задача распознавания целочисленности).

Многогранник M_n^Z, порождаемый целыми вершинами из M_n, называется разрезным многогранником, так как известная NP-полная задача о максимальном разрезе (как, впрочем, и ряд других) сводится к оптимизации линейной функции на M_n^Z. Поэтому M_n является релаксационным многогранником задачи о разрезе, или релаксацией разрезного многогранника.

Определим, следуя [4], релаксации разрезного многогранника более высоких уровней. С этой целью выберем натуральное k ($k < n$) и рассмотрим систему неравенств S, задающую многогранник M_k^Z; обозначим через Θ число этих неравенств. Далее, для каждого k-элементного подмножества $\nu = \{\nu_1, ..., \nu_k\}$ множества N_n рассмотрим систему S_ν, получающуюся из системы неравенств S заменой переменных $x_{i,j}$, $y_{i,j}$, $z_{i,j}$ и $t_{i,j}$, соответственно, на x_{ν_i,ν_j}, y_{ν_i,ν_j}, z_{ν_i,ν_j} и t_{ν_i,ν_j}. Дополним систему (1)-(6) совокупностью всех $\Theta \cdot C_n^k$ указанных неравенств, а многогранник, который задается расширенной системой ограничений, обозначим через $M_{n,k}$.

Многогранники M_1 и M_2 не имеют нецелочисленных вершин и совпадают с M_1^Z и M_2^Z соответственно, а значит, и релаксации $M_{n,1}$ и $M_{n,2}$ будут совпадать с самим многогранником M_n. Таким образом, $M_{n,3}$ – первая, отличная от M_n, релаксация разрезного многогранника. $M_{n,3}$ задается системой (1)-(6) и дополнительными ограничениями:

$$x_{i,j} + t_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} \le 2, \tag{7}$$

$$x_{i,j} + t_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} \le 2, \tag{8}$$

$$y_{i,j} + z_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} \le 2, \tag{9}$$

$$y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} \le 2, \tag{10}$$

для каждой тройки $i, j, k \in N_n$, где $i < j < k$ [6,7].

В основе упомянутого выше результата о полиномиальной разрешимости задачи распознавания целочисленности на M_n [7] лежит следующее

Утверждение. *Каждая точка многогранника $M_{n,3}$ является выпуклой комбинацией вершин многогранника M_n, среди которых есть хотя бы одна целая.*

Ниже устанавливается, что ситуация оказывается принципиально иной при переходе к последующим релаксациям.

Отметим, что каждой точке $u \in M_{n,3}$ можно сопоставить 3-однородный смешанный гиперграф рассмотренного вида, который назовем гиперграфом точки $G(u)$, по следующим правилам:

1. $V = N_n$;
2. $(i,j,k) \in E(u)$ тогда и только тогда, когда $y_{i,j} + z_{i,j} + y_{i,k} + z_{i,k} + y_{j,k} + z_{j,k} = 2$;
3. $((i,j),k) \in A(u)$ тогда и только тогда, когда $y_{i,j} + z_{i,j} + x_{i,k} + t_{i,k} + x_{j,k} + t_{j,k} = 2$.

Введем следующие условные обозначения для ориентированных и неориентированных ребер гиперграфа (Рис. 1).

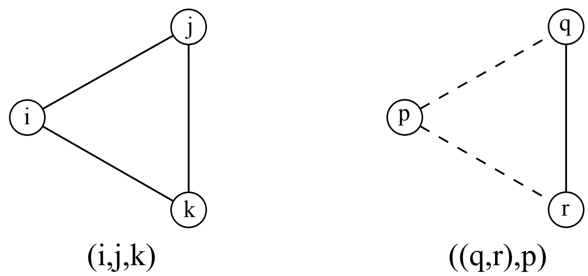

Рис. 1. Условные обозначения для ребер гиперграфа

Приведем пример построения гиперграфа. Рассмотрим точку u^* многогранника $M_{4,3}$ (Таблица 2).

$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
		$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
		0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
				$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
				0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
						$\frac{2}{3}$	0
						0	$\frac{1}{3}$

Таблица 2. Координаты точки $u^* \in M_{4,3}$

Для точки u^* выполнено:

$$x_{1,2} + t_{1,2} + x_{1,3} + t_{1,3} + y_{2,3} + z_{2,3} = 2,$$

$$y_{2,3} + z_{2,3} + y_{2,4} + z_{2,4} + y_{3,4} + z_{3,4} = 2,$$

поэтому соответствующий ей гиперграф $G(u^*)$ имеет вид, приведенный на Рис. 2.

Введем для точек многогранника $M_{n,3}$ операцию *инвертирования*, которая произвольную точку $u \in M_{n,3}$ превращает в точку $v = Inv_j(u)$ (Таблица 3).

Нетрудно проверить, что так построенная точка v удовлетворяет системе (1)-(10) и также принадлежит многограннику $M_{n,3}$.

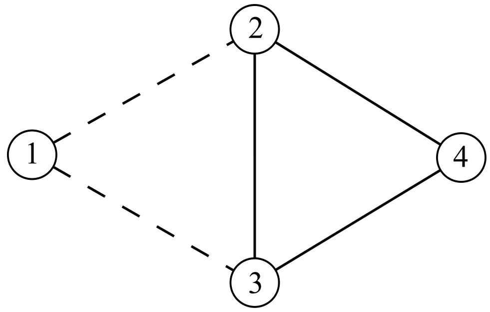

Рис. 2. Гиперграф $G(u^*)$

$x_{i,i}$	0	$\boldsymbol{x_{i,j}}$	$\boldsymbol{y_{i,j}}$	$x_{i,k}$	$y_{i,k}$
0	$t_{i,i}$	$\boldsymbol{z_{i,j}}$	$\boldsymbol{t_{i,j}}$	$z_{i,k}$	$t_{i,k}$
		$\boldsymbol{x_{j,j}}$	0	$\boldsymbol{x_{j,k}}$	$\boldsymbol{y_{j,k}}$
		0	$\boldsymbol{t_{j,j}}$	$\boldsymbol{z_{j,k}}$	$\boldsymbol{t_{j,k}}$
				$x_{k,k}$	0
				0	$t_{k,k}$

$\Rightarrow$

$x_{i,i}$	0	$\boldsymbol{z_{i,j}}$	$\boldsymbol{t_{i,j}}$	$x_{i,k}$	$y_{i,k}$
0	$t_{i,i}$	$\boldsymbol{x_{i,j}}$	$\boldsymbol{y_{i,j}}$	$z_{i,k}$	$t_{i,k}$
		$\boldsymbol{t_{j,j}}$	0	$\boldsymbol{y_{j,k}}$	$\boldsymbol{x_{j,k}}$
		0	$\boldsymbol{x_{j,j}}$	$\boldsymbol{t_{j,k}}$	$\boldsymbol{z_{j,k}}$
				$x_{k,k}$	0
				0	$t_{k,k}$

Таблица 3. Операция инвертирования точки

Отметим, что операции инвертирования точки многогранника $M_{n,3}$ и вершины гиперграфа G эквивалентны в том смысле, что для точки $v = Inv_j(u)$ ее гиперграф $G(v) = Inv_jG(u)$.

Теорема 2. *Если для некоторой точки $u \in M_{n,3}$ ее гиперграф $G(u)$ принадлежит классу G_I, то в любом разложении u в виде выпуклой комбинации вершин $M_{n,3}$ нет ни одной целой вершины.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. предположим, что точка u раскладывается в выпуклую комбинацию вершин, среди которых есть целая:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k,$$

$$\forall i : \alpha_i > 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,$$

$$\exists i : v_i \in extM_{n,3}^Z.$$

Без ограничения общности положим, что целой является вершина $v_1 = v \in extM_{n,3}^Z$, тогда:

$$u = \alpha v + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k,$$

$$\sum_{i=2}^{k} \alpha_i = 1 - \alpha,$$

$$w = \frac{1}{1-\alpha}(\alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k),$$

$$\sum_{i=2}^{k} \frac{\alpha_i}{1-\alpha} = 1 \;\Rightarrow\; w \in M_{n,3},$$

$$u = \alpha v + (1-\alpha)w.$$

Нетрудно проверить, что

$$\forall i : Inv_i(u) = \alpha(Inv_i(v)) + (1-\alpha)(Inv_i(w)).$$

Вершина v является целой, любая ее инверсия ($Inv_i(v)$) также будет целой вершиной $M_{n,3}$. Учитывая структуру множества целочисленных вершин многогранника M_n [6], инвертировав точки u, v и w несколько раз, можно получить

$$u^* = \alpha v^* + (1-\alpha)w^*,$$

$$v^* : \forall i, j : x_{i,j}^{v^*} = 1.$$

Гиперграф $G(u)$ принадлежит классу G_I, следовательно, $G(u^*) = (V, E^*, A^*)$ также принадлежит G_I. Тогда

$$\exists i, j, k : \; (i,j,k) \in E^*,$$

$$y_{i,j}^{u^*} + z_{i,j}^{u^*} + y_{i,k}^{u^*} + z_{i,k}^{u^*} + y_{j,k}^{u^*} + z_{j,k}^{u^*} = 2,$$

$$y_{i,j}^{v^*} + z_{i,j}^{v^*} + y_{i,k}^{v^*} + z_{i,k}^{v^*} + y_{j,k}^{v^*} + z_{j,k}^{v^*} = 0,$$

$$w^* = \frac{u^* - \alpha v^*}{1-\alpha},$$

$$y_{i,j}^{w^*} + z_{i,j}^{w^*} + y_{i,k}^{w^*} + z_{i,k}^{w^*} + y_{j,k}^{w^*} + z_{j,k}^{w^*} = \frac{2}{1-\alpha},$$

$$\alpha > 0, \qquad \frac{2}{1-\alpha} > 2,$$

$$y_{i,j}^{w^*} + z_{i,j}^{w^*} + y_{i,k}^{w^*} + z_{i,k}^{w^*} + y_{j,k}^{w^*} + z_{j,k}^{w^*} > 2.$$

Противоречие, точка w не принадлежит многограннику $M_{n,3}$, а значит, точка u представляет собой выпуклую комбинацию вершин $M_{n,3}$, среди которых нет ни одной целой. **Теорема 2 доказана.**

Теорема 3. *Для любого $n \geq 195$ существует точка $u \in M_{n,5} \subseteq M_{n,4}$, в любом разложении которой в виде выпуклой комбинации вершин $M_{n,3}$ нет ни одной целой вершины.*

Доказательство. Зафиксируем $n = 195$ и построим такую точку $\widetilde{u} \in R^{76440}$ ($M_{195} \subseteq R^{76440}$), что $\widetilde{u} \in M_{195,3}$ и в ее разложении в выпуклую комбинацию вершин $M_{195,3}$ нет ни одной целой вершины. По теореме 2 для этого достаточно, чтобы ее гиперграф $G(\widetilde{u}) = \widetilde{G}$ принадлежал классу G_I.

Рассмотрим гиперграф $\widetilde{G}$ (Рис. 3, Приложение 1 – Таблица 6).

Ввиду сложности гиперграфа $\widetilde{G}$ некоторые вершины и ребра не были изображены. Уточним некоторые подробности.

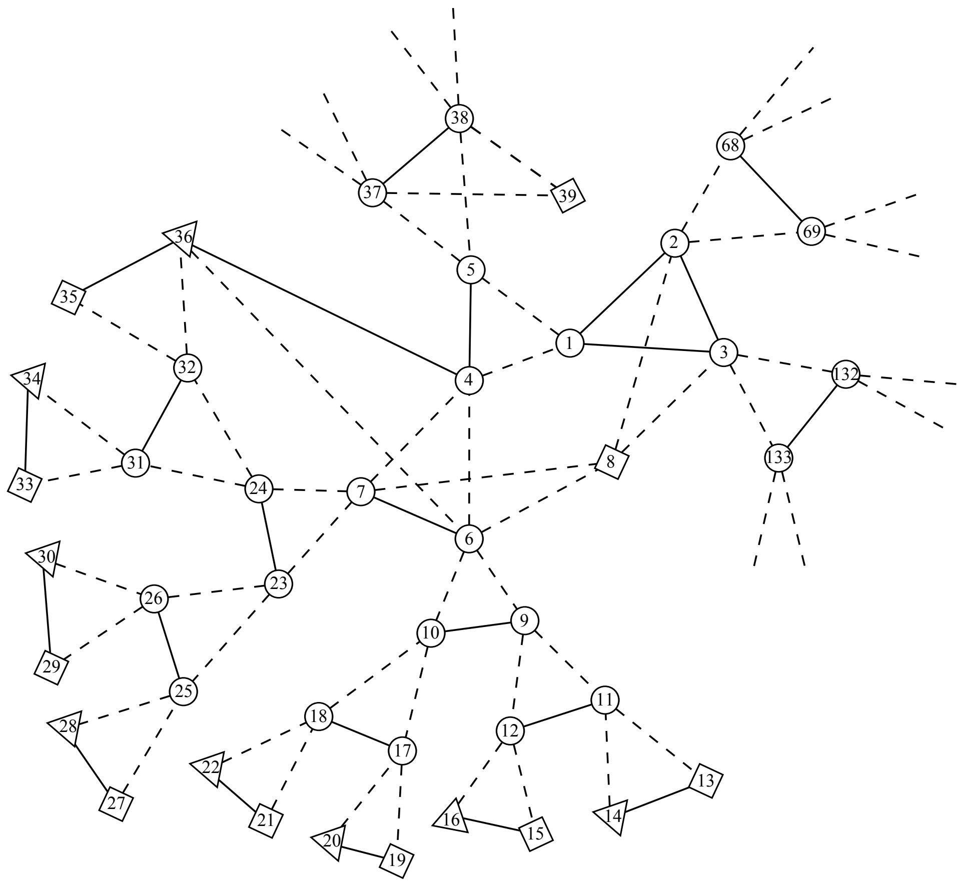

Рис. 3. Гиперграф $\widetilde{G}$

1. Общее число вершин равно 195.

2. Множество вершин гиперграфа $\widetilde{G}$ можно разбить на три симметричных подмножества $\widetilde{V} = \widetilde{V}_1 \cup \widetilde{V}_2 \cup \widetilde{V}_3$, где $\widetilde{V}_1 = \{1, 4, 5, ..., 67\}$, $\widetilde{V}_2 = \{2, 68, 69, ..., 131\}$ и $\widetilde{V}_3 = \{3, 132, 133, ..., 195\}$.

3. Каждое из этих множеств содержит такое подмножество $\widetilde{V}_i^{\square}$, что любая вершина j из $\widetilde{V}_i^{\square}$ образует ориентированное ребро с парой вершин $\{1, 2, 3\} \backslash \{i\}$, в котором j является концом ребра. Например, вершина 13 из $\widetilde{V}_1^{\square}$ связана ребром $((2, 3), 13)$ с вершинами 2 и 3 (Рис. 4).

4. Аналогично множество вершин $\widetilde{V}_1$ можно представить в виде $\widetilde{V}_1 = \{1\} \cup \widetilde{V}_{1,4} \cup \widetilde{V}_{1,5}$. Причем подграфы на множествах вершин $\widetilde{V}_{1,4} = \{4, 6, 7, ..., 36\}$ и $\widetilde{V}_{1,5} = \{5, 37, 38, ..., 67\}$ изоморфны. В свою очередь, множество $\widetilde{V}_{1,4}$ разбивается на подмножества $\{4\} \cup \{8\} \cup \widetilde{V}_{1,4,6} \cup \widetilde{V}_{1,4,7}$ и т.д.

5. Рассмотрим более подробно множество $\widetilde{V}_{1,4,6} = \{6, 9, 10, ..., 22\}$. Кроме уже описанного подмножества $\widetilde{V}_{1,4,6}^{\square} = \widetilde{V}_{1,4,6} \cap \widetilde{V}_1^{\square} = \{13, 15, 19, 21\}$, оно содержит подмножество $\widetilde{V}_{1,4,6}^{\triangle} = \{14, 16, 20, 22\}$. Каждая вершина i из $\widetilde{V}_{1,4,6}^{\triangle}$ образует ориен-

тированное ребро $((4, i), 7)$ с вершинами 4 и 7 (Рис. 5).

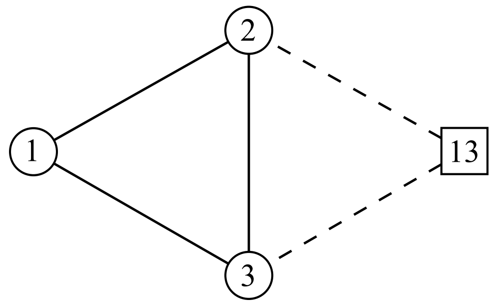

Рис. 4. Вершины из $\widetilde{V}_1^{\square}$ образуют ориентированные ребра с вершинами 2 и 3

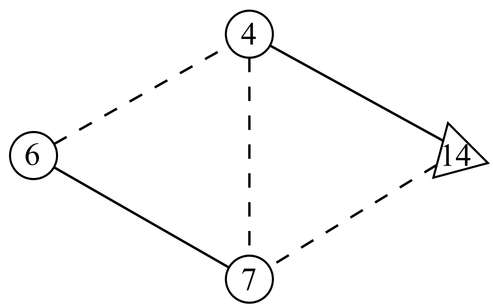

Рис. 5. Вершины из $\widetilde{V}_{1,4,6}^{\triangle}$ образуют ориентированные ребра с вершинами 4 и 7

Все подмножества вершин гиперграфа $\widetilde{G}$ приведены в Приложении 2.

Предположим, что $\widetilde{G} \notin G_I$. Тогда, инвертировав некоторое подмножество его вершин $V^* \subseteq \widetilde{V}$, мы получим такой гиперграф G^*, что множество его неориентированных ребер будет пусто.

В гиперграфе $\widetilde{G}$ только одно ребро $(1, 2, 3)$ принадлежит E. Чтобы получить гиперграф G^*, необходимо инвертировать как минимум одну из вершин $1, 2, 3$. Без ограничения общности положим, что вершина 1 принадлежит V^* (Рис. 6).

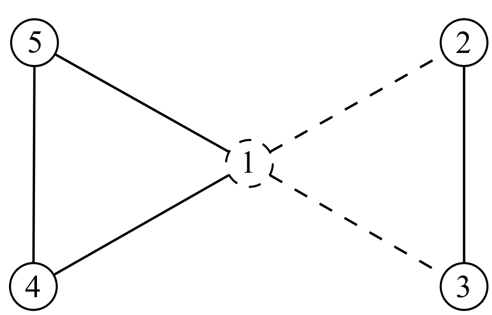

Рис. 6. Построение гиперграфа G^*, инвертирование вершины 1

Теперь ребро $(1, 4, 5) \in E$, и следует инвертировать одну из трех его вершин. Вершина 1 уже принадлежит V^* и не может быть повторно инвертирована. Без

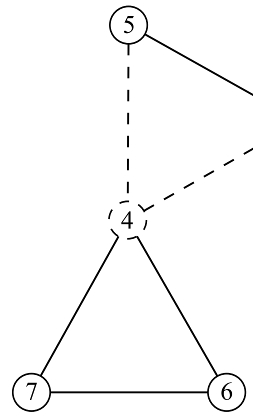

Рис. 7. Построение гиперграфа G^*, инвертирование вершины 4

ограничения общности, положим, что вершина $4 \in V^*$, но она образует ребро с вершинами 6 и 7 (Рис. 7).

Ребро $(4, 6, 7)$ принадлежит E, следовательно, одна из вершин 6 и 7 также принадлежит V^*. Пусть это будет вершина 6 и т.д. Нетрудно заметить, что последовательное инвертирование вершин $\widetilde{V}_{1,4,6}$ приводит к двум возможным вариантам.

1. Найдется такая вершина $i \in \widetilde{V}_{1,4}^{\square}$, что $i \in V^*$.
2. Найдется такая вершина $j \in \widetilde{V}_{1,4,6}^{\triangle}$, что $j \in V^*$. Каждая вершина из $\widetilde{V}_{1,4,6}^{\triangle}$ связана ребром с вершинами 4 и 7 (Рис. 8).

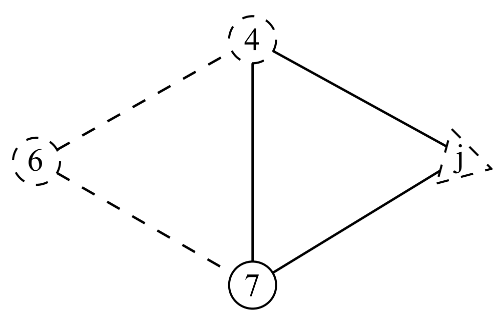

Рис. 8. Вершины из $\widetilde{V}_{1,4,6}^{\triangle}$ образуют ребра с вершинами 4 и 7

Ребро $(4, 7, j)$ принадлежит E, а вершины 4 и j уже инвертированы, следовательно, и вершина 7 принадлежит V^* (Рис. 9).

Таким образом, вершина 8 из $\widetilde{V}_{1,4}^{\square}$ также принадлежит V^*, и второй вариант сводится к первому.

Имеем вершину $i \in \widetilde{V}_{1}^{\square}$, принадлежащую множеству V^*, но каждая вершина из $\widetilde{V}_{1}^{\square}$ образует ребро с вершинами 2 и 3 (Рис. 10), значит, одна из этих вершин также лежит в V^*. Без ограничения общности положим, что это вершина 2.

Рассмотрим произвольную вершину k из $\widetilde{V}_{3}^{\square}$. По определению множества в гиперграфе $\widetilde{G}$ существует ребро $((1, 2), k)$, которое после инвертирования вершин 1 и 2 принадлежит E (Рис. 11).

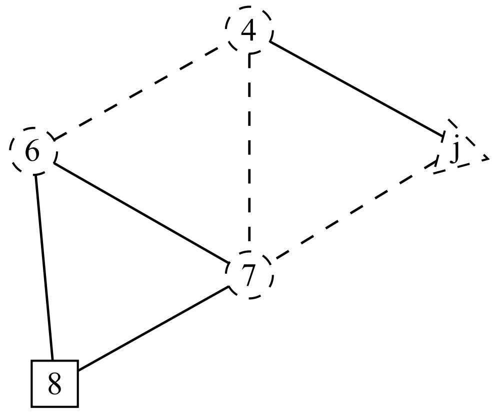

Рис. 9. Построение гиперграфа G^*, инвертирование вершины 7.

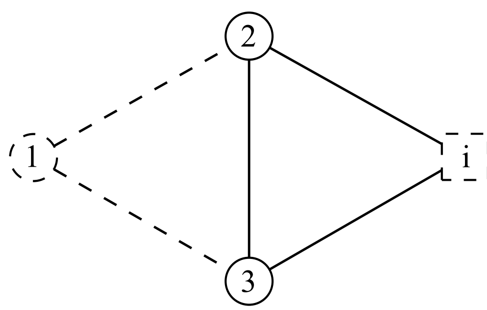

Рис. 10. Вершины из $\widetilde{V}_1^{\square}$ связаны ребрами с вершинами 2 и 3

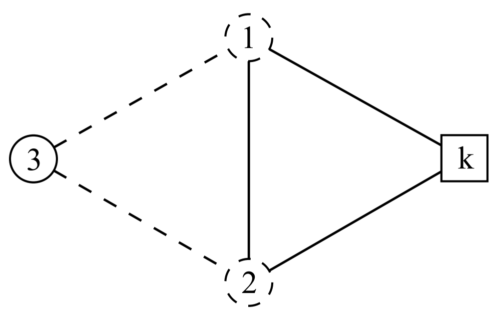

Рис. 11. Неориентированное ребро $(1, 2, k)$

Очевидно, что $k \in V^*$. Так как это верно для произвольной вершины из $\widetilde{V}_3^{\Box}$, то верно для всего $\widetilde{V}_3^{\Box} \subseteq V^*$.

Рассмотрим множество вершин $\widetilde{V}_{3,132}$. Вершина 136 принадлежит $\widetilde{V}_{3,132}^{\Box}$ и соответственно V^* (Рис. 12).

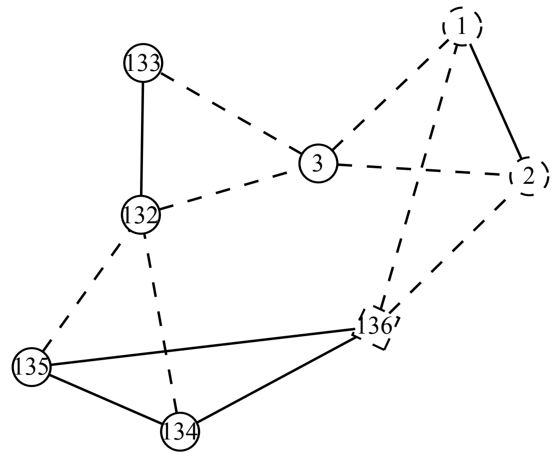

Рис. 12. Построение гиперграфа G^*, инвертирование вершины 136

Значит, одна из вершин 134 и 135 должна быть инвертирована. Пусть это будет вершина 135.

Рассмотрим произвольную вершину p из $\widetilde{V}_{3,133,134}^{\triangle}$ (Рис. 13).

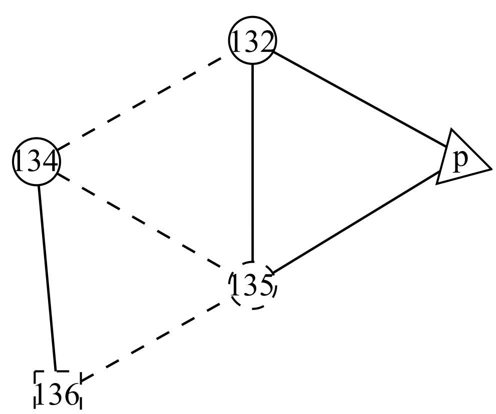

Рис. 13. Вершины из $\widetilde{V}_{3,133,134}^{\triangle}$ связаны ребрами с вершинами 132 и 135

Возможны два варианта.

1. Вершина 132 принадлежит V^* и должна быть инвертирована.

2. $\widetilde{V}_{3,132,134}^{\triangle} \subseteq V^*$.

   Отметим, что $\widetilde{V}_{3,132,134}^{\Box} \subseteq \widetilde{V}_3^{\Box} \subseteq V^*$. Рассмотрим множество вершин $\widetilde{V}_{3,132,134}$ (Рис. 14).

   Очевидно, что вершины $\{139, 140, 145, 146\} \subseteq V^*$ и должны быть инвертированы (Рис. 15).

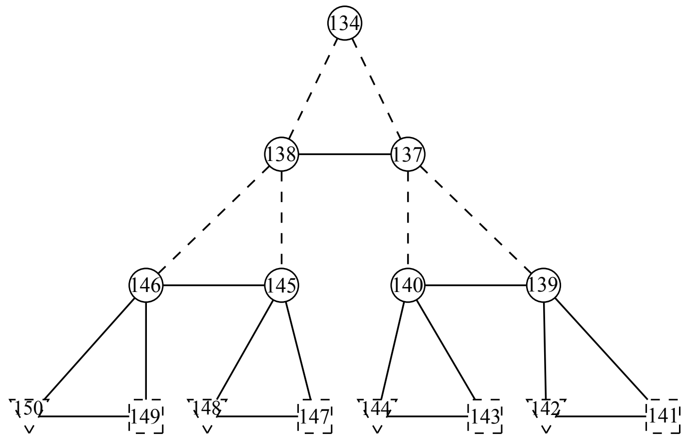

Рис. 14. Множество вершин $\widetilde{V}_{3,132,134}$.

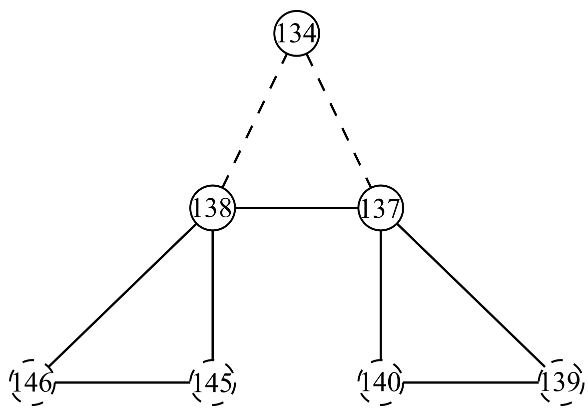

Рис. 15. Построение гиперграфа G^*, инвертирование вершин $\{139, 140, 145, 146\}$.

Вершины 137 и 138 также принадлежат V^*, а соответственно и вершина 134. Нетрудно заметить, что ребро $(132, 134, 135)$ после инвертирования вершин 134 и 135 также принадлежит E, а значит, и $132 \in V^*$. Второй вариант сводится к первому.

Аналогично следует рассмотреть множество $\widetilde{V}_{3,133}$ и показать, что вершина 133 принадлежит V^* (Рис. 16).

Ребро $(3, 132, 133) \in E$ и 3 – единственная вершина не из V^*, инвертируем ее (Рис. 17).

Итак, ребро $(1, 2, 3) \in E$ и вершины $\{1, 2, 3\}$ принадлежат V^*. Искомый гиперграф G^* строится по гиперграфу $\widetilde{G}$ инвертированием подмножества вершин $V^* \subseteq \widetilde{V}$, а значит, будет содержать ребро $(1, 2, 3) \in E$, противоречие. Гиперграф $\widetilde{G}$ принадлежит классу G_I.

Нетрудно проверить, что, инвертировав часть вершин гиперграфа $\widetilde{G}$, можно построить новый гиперграф $\overline{G} \in G_I$, содержащий только неориентированные ребра. Например, этого можно добиться, инвертировав подмножества $\{1, 6, 7, 11, 12, 17, 18, 25, 26, 31, 32, 37, 38, 42, 43, 48, 49, 56, 57, 62, 63\}$ множества $\widetilde{V}_1$, $\{2, 70, 71, 75, 76, 81, 82, 89, 90, 95, 96, 101, 102, 106, 107, 112, 113, 120, 121, 126, 127\}$ множества $\widetilde{V}_2$ и $\{3, 134, 135,$

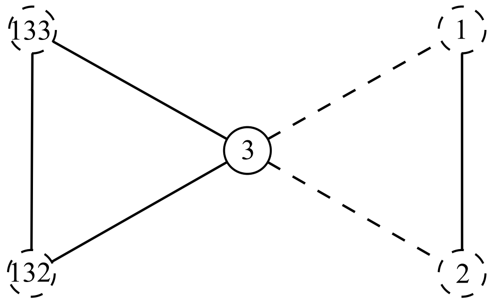

Рис. 16. Построение гиперграфа G^*, инвертирование вершины 133

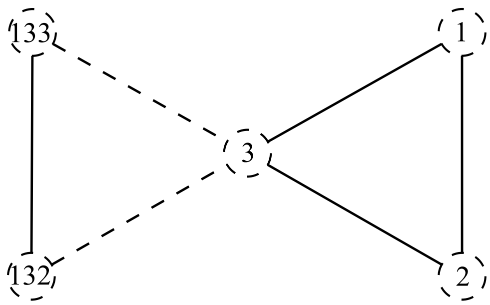

Рис. 17. Построение гиперграфа G^*, инвертирование вершины 3

$139, 140, 145, 146, 153, 154, 159, 160, 165, 166, 170, 171, 176, 177, 184, 185, 190, 191\}$ множества $\widetilde{V}_3$.

Построим точку $\overline{u} \in R^{76440}$, гиперграф которой совпадает с $\overline{G}$, следующим образом:

1. Если для некоторых i, j $(1 \le i < j \le 195)$ вершины i и j гиперграфа $\overline{G}$ входят в общее ребро, то блок матрицы координат i, j точки $\overline{u}$ имеет вид, приведенный в Таблице 4.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline x_{i,j} & y_{i,j} \\ \hline z_{i,j} & t_{i,j} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

Таблица 4. Блок i, j матрицы координат точки $\overline{u}$.

2. Если для некоторых p, q $(1 \le p < q \le 195)$ вершины p и q гиперграфа $\overline{G}$ не входят ни в какое общее ребро, то блок матрицы координат p, q точки $\overline{u}$ имеет вид, приведенный в Таблице 5.

Нетрудно убедиться, что построенная данным образом точка $\overline{u}$ удовлетворяет системе (1)-(10) и принадлежит многограннику $M_{n,3}$. Гиперграф $G(\overline{u}) \in G_I$, и, по теореме 2, точка $\overline{u}$ раскладывается в выпуклую комбинацию вершин $M_{n,3}$, среди которых нет ни одной целой. Покажем, что точка $\overline{u} \in M_{n,4}$.

Введем новые обозначения для координат:

$$x_{i,j} = x_{i,j}^{1,1}, \quad y_{i,j} = x_{i,j}^{1,2}, \quad z_{i,j} = x_{i,j}^{2,1}, \quad t_{i,j} = x_{i,j}^{2,2}.$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x_{p,q} & y_{p,q} \\ \hline z_{p,q} & t_{p,q} \\ \hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline \frac{5}{18} & \frac{4}{18} \\ \hline \frac{4}{18} & \frac{5}{18} \\ \hline\end{array}$$

Таблица 5. Блок p, q матрицы координат точки $\overline{u}$.

Лемма 1. *Многогранник $M_{n,4}$ определен системой неравенств (1)– (10) и дополнительными ограничениями вида*

$$x_{i,i}^{a_i,a_i} + x_{j,j}^{a_j,a_j} + x_{k,k}^{a_k,a_k} + x_{l,l}^{a_l,a_l} - x_{i,j}^{a_j,a_i} - x_{i,k}^{a_k,a_i} - x_{i,l}^{a_l,a_i} - x_{j,k}^{a_k,a_j} - x_{j,l}^{a_l,a_j} - x_{k,l}^{a_l,a_k} \leq 1 \quad (11)$$

для каждой четверки индексов i, j, k, l, где $1 \leq i < j < k < l \leq n$, и для всех векторов $a \in [1, 2]^n$.

Доказательство. Рассмотрим многогранник $M^*_{n,4}$, удовлетворяющий системе (1) – (11). Достаточно проверить тот факт, что $M^*_{4,4}$ не имеет нецелочисленных вершин и совпадает с многогранником M^Z_4. В этом, в частности, можно убедиться с помощью программы PORTA [8]. Отсюда напрямую следует, что $M^*_{n,4} = M_{n,4}$. **Лемма 1 доказана.**

Оценим неравенство (11) для точки $\overline{u}$:

$$\forall i: \; x_{i,i} = t_{i,i} = \frac{1}{2},$$

$$2 - x_{i,j}^{a_j,a_i} - x_{i,k}^{a_k,a_i} - x_{i,l}^{a_l,a_i} - x_{j,k}^{a_k,a_j} - x_{j,l}^{a_l,a_j} - x_{k,l}^{a_l,a_k} \leq 1,$$

$$1 \leq x_{i,j}^{a_j,a_i} + x_{i,k}^{a_k,a_i} + x_{i,l}^{a_l,a_i} + x_{j,k}^{a_k,a_j} + x_{j,l}^{a_l,a_j} + x_{k,l}^{a_l,a_k},$$

$$\min_{i,j} x_{i,j} = \min_{i,j} y_{i,j} = \min_{i,j} z_{i,j} = \min_{i,j} t_{i,j} = \frac{1}{6},$$

$$\forall i, j, k, l: \; x_{i,j}^{a_j,a_i} + x_{i,k}^{a_k,a_i} + x_{i,l}^{a_l,a_i} + x_{j,k}^{a_k,a_j} + x_{j,l}^{a_l,a_j} + x_{k,l}^{a_l,a_k} \geq 1.$$

Точка $\overline{u}$ удовлетворяет системе (1)-(11), а следовательно, принадлежит многограннику $M_{n,4}$.

Теперь обратимся к многограннику $M_{n,5}$.

Лемма 2. *Многогранник $M_{n,5}$ определен системой неравенств (1)– (11) и дополнительными ограничениями вида*

$$\forall i, j, k, l, p: \; 1 \leq i < j < k < l < p \leq n, \; \forall a, b \in [1, 2]^n,$$

$$x_{i,i}^{a_i,a_i} + x_{j,j}^{a_j,a_j} + x_{k,k}^{a_k,a_k} + x_{l,l}^{a_l,a_l} + x_{p,p}^{a_p,a_p} - x_{i,j}^{a_j,a_i} - x_{i,k}^{a_k,a_i} - x_{i,l}^{a_l,a_i} -$$
$$- x_{i,p}^{a_p,a_i} - x_{j,k}^{a_k,a_j} - x_{j,l}^{a_l,a_j} - x_{j,p}^{a_p,a_j} - x_{k,l}^{a_l,a_k} - x_{k,p}^{a_p,a_k} - x_{l,p}^{a_p,a_l} \leq 1, \quad (12)$$

$$2 \cdot (x_{i,i}^{b_i,b_i} + x_{j,j}^{b_j,b_j} + x_{k,k}^{b_k,b_k} + x_{l,l}^{b_l,b_l} + x_{p,p}^{b_p,b_p}) - x_{i,j}^{b_j,b_i} - x_{i,k}^{b_k,b_i} - x_{i,l}^{b_l,b_i} -$$
$$- x_{i,p}^{b_p,b_i} - x_{j,k}^{b_k,b_j} - x_{j,l}^{b_l,b_j} - x_{j,p}^{b_p,b_j} - x_{k,l}^{b_l,b_k} - x_{k,p}^{b_p,b_k} - x_{l,p}^{b_p,b_l} \leq 3, \quad (13)$$

$$\forall i, j, k, l: \; 1 \leq i < j < k < l \leq n, \; \forall p \in N_n \backslash \{i, j, k, l\}, \forall c \in [1, 2]^n:$$

$$3 \cdot x_{p,p}^{1-c_p,1-c_p} + 2 \cdot (x_{p,i}^{c_i,c_p} + x_{p,j}^{c_j,c_p} + x_{p,k}^{c_k,c_p} + x_{p,l}^{c_l,c_p}) -$$

$$-x_{i,j}^{c_j,c_i} - x_{i,k}^{c_k,c_i} - x_{i,l}^{c_l,c_i} - x_{j,k}^{c_k,c_j} - x_{j,l}^{c_l,c_j} - x_{k,l}^{c_l,c_k} \leq 3. \tag{14}$$

Доказательство. Рассмотрим многогранник $M_{n,5}^*$, удовлетворяющий системе (1) – (14). Достаточно проверить тот факт, что $M_{5,5}^*$ не имеет нецелочисленных вершин и совпадает с многогранником M_5^Z [8]. Отсюда напрямую следует, что $M_{n,5}^* = M_{n,5}$. **Лемма 2 доказана.**

Покажем, что неравенства (12)-(14) также выполнены для точки $\overline{u}$.

Аналогично доказательству для $M_{n,4}$ имеем

$$\forall i,j,k,l,p:$$

$$x_{i,i}^{a_i,a_i} + x_{j,j}^{a_j,a_j} + x_{k,k}^{a_k,a_k} + x_{l,l}^{a_l,a_l} + x_{p,p}^{a_p,a_p} = \frac{5}{2},$$

$$x_{i,j}^{a_j,a_i} + x_{i,k}^{a_k,a_i} + x_{i,l}^{a_l,a_i} + x_{i,p}^{a_p,a_i} + x_{j,k}^{a_k,a_j} + x_{j,l}^{a_l,a_j} + x_{j,p}^{a_p,a_j} + x_{k,l}^{a_l,a_k} + x_{k,p}^{a_p,a_k} + x_{l,p}^{a_p,a_l} \geq \frac{10}{6},$$

$$\frac{5}{2} - \frac{10}{6} = \frac{5}{6} \leq 1.$$

Точка $\overline{u}$ удовлетворяет неравенствам (12).

На основе гиперграфа $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ построим такой граф $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E})$, что

1. $\overline{V} = \widehat{V}$,
2. Если для некоторых i,j,k ребро $\{i,j,k\} \in \overline{E}$, то $\{\{i,j\},\{i,k\},\{j,k\}\} \subseteq \widehat{E}$.

Отметим несколько важных свойств $\overline{G}$ и $\widehat{G}$:

1. любой подграф гиперграфа $\overline{G}$ на четырех вершинах имеет не более 2 ребер, любой подграф графа $\widehat{G}$ на четырех вершинах имеет не более 5 ребер;
2. любой подграф гиперграфа $\overline{G}$ на пяти вершинах имеет не более 3 ребер, любой подграф графа $\widehat{G}$ на пяти вершинах имеет не более 7 ребер.

Предположим, что точка $\overline{u}$ не удовлетворяет одному из неравенств (13):

$$\exists i,j,k,l,p\ (1 \leq i < j < k < l < p \leq n), \exists b \in [1,2]^n:$$

$$2 \cdot (x_{i,i}^{b_i,b_i} + x_{j,j}^{b_j,b_j} + x_{k,k}^{b_k,b_k} + x_{l,l}^{b_l,b_l} + x_{p,p}^{b_p,b_p}) - x_{i,j}^{b_j,b_i} - x_{i,k}^{b_k,b_i} - x_{i,l}^{b_l,b_i} -$$

$$-x_{i,p}^{b_p,b_i} - x_{j,k}^{b_k,b_j} - x_{j,l}^{b_l,b_j} - x_{j,p}^{b_p,b_j} - x_{k,l}^{b_l,b_k} - x_{k,p}^{b_p,b_k} - x_{l,p}^{b_p,b_l} > 3,$$

$$x_{i,i}^{b_i,b_i} + x_{j,j}^{b_j,b_j} + x_{k,k}^{b_k,b_k} + x_{l,l}^{b_l,b_l} + x_{p,p}^{b_p,b_p} = \frac{5}{2},$$

$$x_{i,j}^{b_j,b_i} + x_{i,k}^{b_k,b_i} + x_{i,l}^{b_l,b_i} + x_{i,p}^{b_p,b_i} + x_{j,k}^{b_k,b_j} + x_{j,l}^{b_l,b_j} + x_{j,p}^{b_p,b_j} + x_{k,l}^{b_l,b_k} + x_{k,p}^{b_p,b_k} + x_{l,p}^{b_p,b_l} < 2. \tag{15}$$

Отметим, что координаты точки в произвольном блоке i,j $(i \neq j)$ принимают значения только из множества $\{\frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{5}{18}, \frac{1}{3}\}$. Таким образом, неравенство (15) можно переписать в виде

$$\alpha \cdot \tfrac{1}{6} + \beta \cdot \tfrac{1}{3} + \gamma \cdot \tfrac{2}{9} + \delta \cdot \tfrac{5}{18} < 2, \tag{16}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 10, \tag{17}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in N \cup \{0\}$.

Причем для некоторой координаты $x_{i,j}^{b_j,b_i}$:

1. если $b_i = b_j$, то $x_{i,j}^{b_j,b_i} \in \{\frac{1}{6}, \frac{5}{18}\}$;

2. если $b_i \neq b_j$, то $x_{i,j}^{b_j,b_i} \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\}$.

Таким образом,

$$\alpha + \delta = \phi,\ \phi \in \{4, 6, 10\}, \tag{18}$$
$$\beta + \gamma = \xi,\ \xi \in \{0, 4, 6\}. \tag{19}$$

Кроме того, в силу свойства 2 графа $\widehat{G}$

$$\alpha + \beta \leq 7. \tag{20}$$

Полученная система (16) – (20) имеет единственное целочисленное решение: $\alpha = 6, \gamma = 4$. Нетрудно проверить, что оно не соответствует свойству 1 графа $\widehat{G}$ (подграф на четыре вершинах будет содержать 6 ребер). Противоречие, точка $\overline{u}$ удовлетворяет неравенствам (13).

Теперь предположим, что точка $\overline{u}$ не удовлетворяет одному из неравенств (14):

$$\exists i, j, k, l:\ 1 \leq i < j < k < l \leq n,\ \exists p \in N_n \backslash \{i, j, k, l\}, \exists c \in [1, 2]^n:$$

$$3 \cdot x_{p,p}^{1-c_p,1-c_p} + 2 \cdot (x_{p,i}^{c_i,c_p} + x_{p,j}^{c_j,c_p} + x_{p,k}^{c_k,c_p} + x_{p,l}^{c_l,c_p}) -$$
$$- x_{i,j}^{c_j,c_i} - x_{i,k}^{c_k,c_i} - x_{i,l}^{c_l,c_i} - x_{j,k}^{c_k,c_j} - x_{j,l}^{c_l,c_j} - x_{k,l}^{c_l,c_k} > 3.$$

Его следует рассмотреть аналогично неравенству (13), получив систему

$$\begin{cases} -4\alpha + 2\beta - 2\gamma + 2\delta - \theta + \tau > 17, \\ \alpha + \beta + \gamma \leq 4, \\ \delta + \theta + \tau \leq 6, \\ \alpha + \beta + \delta + \theta \leq 7, \end{cases} \tag{21}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \tau \in N \cup \{0\}$.

Нетрудно убедиться, что система (21) не имеет целочисленных решений. Противоречие, точка $\overline{u}$ удовлетворяет также и неравенствам (14).

Таким образом, построенная по описанному выше правилу такая точка $\overline{u}$, что $G(\overline{u}) = \overline{G}$, принадлежит многограннику $M_{195,5} \subseteq M_{195,4}$.

Из проведенных построений следует, что для любого $n \geq 195$ существует точка многогранника $M_{n,5} \subseteq M_{n,4}$ любое разложение которой по вершинам $M_{n,3}$ не содержит целых вершин. **Теорема 3 доказана**.

Приложение 1

Таблица 6: Список ребер гиперграфа $\widetilde{G}$.

$((4,5),1)$	$((6,7),4)$	$((6,7),8)$	$((9,10),6)$	$((11,12),9)$
$((13,14),11)$	$((15,16),12)$	$((17,18),10)$	$((19,20),17)$	$((21,22),18)$
$((4,14),7)$	$((4,16),7)$	$((4,20),7)$	$((4,22),7)$	$((23,24),7)$
$((25,26),23)$	$((27,28),25)$	$((29,30),26)$	$((31,32),24)$	$((33,34),31)$
$((35,36),32)$	$((4,28),6)$	$((4,30),6)$	$((4,34),6)$	$((4,36),6)$
$((37,38),5)$	$((37,38),39)$	$((40,41),37)$	$((42,43),40)$	$((44,45),42)$
$((46,47),43)$	$((48,49),41)$	$((50,51),48)$	$((52,53),49)$	$((5,45),38)$
$((5,47),38)$	$((5,51),38)$	$((5,53),38)$	$((54,55),38)$	$((56,57),54)$
$((58,59),56)$	$((60,61),57)$	$((62,63),55)$	$((62,65),62)$	$((66,67),63)$
$((5,59),37)$	$((5,61),37)$	$((5,65),37)$	$((5,67),37)$	$((2,3),8)$
$((2,3),13)$	$((2,3),15)$	$((2,3),19)$	$((2,3),21)$	$((2,3),27)$
$((2,3),29)$	$((2,3),33)$	$((2,3),35)$	$((2,3),39)$	$((2,3),44)$
$((2,3),46)$	$((2,3),50)$	$((2,3),52)$	$((2,3),58)$	$((2,3),60)$
$((2,3),64)$	$((2,3),66)$	$((68,69),2)$	$((70,71),68)$	$((70,71),72)$
$((73,74),70)$	$((75,76),73)$	$((77,78),75)$	$((79,80),76)$	$((81,82),74)$
$((83,84),81)$	$((85,86),83)$	$((68,78),71)$	$((68,80),71)$	$((68,84),71)$
$((68,86),71)$	$((87,88),71)$	$((89,90),87)$	$((91,92),89)$	$((93,94),90)$
$((95,96),88)$	$((97,98),95)$	$((99,100),96)$	$((68,92),70)$	$((68,94),70)$
$((68,98),70)$	$((68,100),70)$	$((101,102),69)$	$((101,102),103)$	$((104,105),101)$
$((106,107),104)$	$((108,109),106)$	$((110,111),107)$	$((112,113),105)$	$((114,115),112)$
$((116,117),113)$	$((69,109),102)$	$((69,111),102)$	$((69,115),102)$	$((69,117),102)$
$((118,119),102)$	$((120,121),118)$	$((122,123),120)$	$((124,125),121)$	$((126,127),119)$
$((128,129),126)$	$((130,131),127)$	$((69,123),101)$	$((69,125),101)$	$((69,129),101)$
$((69,131),101)$	$((1,3),72)$	$((1,3),77)$	$((1,3),79)$	$((1,3),83)$
$((1,3),85)$	$((1,3),91)$	$((1,3),93)$	$((1,3),97)$	$((1,3),99)$
$((1,3),103)$	$((1,3),108)$	$((1,3),110)$	$((1,3),114)$	$((1,3),116)$
$((1,3),122)$	$((1,3),124)$	$((1,3),128)$	$((1,3),130)$	$((132,133),3)$
$((134,135),132)$	$((134,135),136)$	$((137,138),134)$	$((139,140),137)$	$((141,142),139)$
$((143,144),140)$	$((145,146),138)$	$((147,148),145)$	$((149,150),146)$	$((132,142),135)$

Продолжение таблицы на следующей странице.

$((132,144),135)$	$((132,148),135)$	$((132,150),135)$	$((151,152),135)$	$((153,154),151)$
$((155,156),153)$	$((157,158),154)$	$((159,160),152)$	$((161,162),159)$	$((163,164),160)$
$((132,156),134)$	$((132,158),134)$	$((132,162),134)$	$((132,164),134)$	$((165,166),133)$
$((165,166),167)$	$((168,169),165)$	$((170,171),168)$	$((172,173),170)$	$((174,175),171)$
$((176,177),169)$	$((178,179),176)$	$((180,181),177)$	$((133,173),166)$	$((133,175),166)$
$((133,179),166)$	$((133,181),166)$	$((182,183),166)$	$((184,185),182)$	$((186,187),184)$
$((188,189),185)$	$((190,191),183)$	$((192,193),190)$	$((194,195),191)$	$((133,187),165)$
$((133,189),165)$	$((133,193),165)$	$((133,195),165)$	$((1,2),136)$	$((1,2),141)$
$((1,2),143)$	$((1,2),147)$	$((1,2),149)$	$((1,2),155)$	$((1,2),157)$
$((1,2),161)$	$((1,2),163)$	$((1,2),167)$	$((1,2),172)$	$((1,2),174)$
$((1,2),178)$	$((1,2),180)$	$((1,2),186)$	$((1,2),188)$	$((1,2),192)$
$((1,2),194)$	$(1,2,3)$			

Приложение 2

Подмножества вершин гиперграфа $\widetilde{G}$.
$\widetilde{V}_1 = \{1, 4-67\}$, $\widetilde{V}_2 = \{2, 68-131\}$ и $\widetilde{V}_3 = \{3, 132-195\}$.
$\widetilde{V}_1^{\square} = \{8, 13, 15, 19, 21, 27, 29, 33, 35, 39, 44, 46, 50, 52, 58, 60, 64, 66\}$.
$\widetilde{V}_2^{\square} = \{72, 77, 79, 83, 85, 91, 93, 97, 99, 103, 108, 110, 114, 116, 122, 124, 128, 130\}$.
$\widetilde{V}_3^{\square} = \{136, 141, 143, 147, 149, 155, 157, 161, 163, 167, 172, 174, 178, 180, 186, 188, 192, 194\}$.
$\widetilde{V}_{1,4} = \{4, 6-36\}$, $\widetilde{V}_{1,5} = \{5, 37-67\}$.
$\widetilde{V}_{1,4,6} = \{6, 9-22\}$, $\widetilde{V}_{1,4,6}^{\triangle} = \{14, 16, 20, 22\}$.
$\widetilde{V}_{1,4,7} = \{7, 23-36\}$, $\widetilde{V}_{1,4,7}^{\triangle} = \{28, 30, 34, 36\}$.
$\widetilde{V}_{1,5,37} = \{37, 40-53\}$, $\widetilde{V}_{1,5,37}^{\triangle} = \{45, 47, 51, 53\}$.
$\widetilde{V}_{1,5,38} = \{38, 54-67\}$, $\widetilde{V}_{1,5,38}^{\triangle} = \{59, 61, 65, 67\}$.
$\widetilde{V}_{2,68} = \{68, 70-100\}$, $\widetilde{V}_{2,69} = \{69, 101-131\}$.
$\widetilde{V}_{2,68,70} = \{70, 73-86\}$, $\widetilde{V}_{2,68,70}^{\triangle} = \{78, 80, 84, 86\}$.
$\widetilde{V}_{2,68,71} = \{71, 87-100\}$, $\widetilde{V}_{2,68,71}^{\triangle} = \{92, 94, 98, 100\}$.
$\widetilde{V}_{2,69,101} = \{101, 104-117\}$, $\widetilde{V}_{2,69,101}^{\triangle} = \{109, 111, 115, 117\}$.
$\widetilde{V}_{2,69,102} = \{102, 118-131\}$, $\widetilde{V}_{2,69,102}^{\triangle} = \{123, 125, 129, 131\}$.
$\widetilde{V}_{3,132} = \{132, 134-164\}$, $\widetilde{V}_{3,133} = \{133, 165-195\}$.
$\widetilde{V}_{3,132,134} = \{134, 137-150\}$, $\widetilde{V}_{3,132,134}^{\triangle} = \{142, 144, 148, 150\}$.
$\widetilde{V}_{3,132,135} = \{135, 151-164\}$, $\widetilde{V}_{3,132,135}^{\triangle} = \{156, 158, 162, 164\}$.
$\widetilde{V}_{3,133,165} = \{165, 168-181\}$, $\widetilde{V}_{3,133,165}^{\triangle} = \{173, 175, 179, 181\}$.
$\widetilde{V}_{3,133,166} = \{166, 182-195\}$, $\widetilde{V}_{3,133,166}^{\triangle} = \{187, 189, 193, 195\}$.

Список литературы

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.

2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.

3. Бондаренко В.А. Об одном комбинаторном многограннике // Моделирование и анализ вычислительных систем: Сб. науч. тр. Ярославль: Яросл. гос. ун-т., 1987. С. 133 – 134.

4. Деза М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик. М.: МЦНМО, 2001. 736 с.

5. Padberg M.V. The Boolean quadratic polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical Program. 1989. V. 45. P. 139 – 172.

6. Бондаренко В.А., Максименко А.Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. М.: ЛКИ, 2008. 184 с.

7. Бондаренко В.А., Урываев Б.В. Об одной задаче целочисленной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2007 №6. С. 18 – 23.

8. PORTA: POlyhedron Representation Transformation Algorithm 1.4.0. Thomas Christof, Andreas Loebel. The Konrad-Zuse-Zentrum fur Informationstechnik Berlin, http://www.zib.de/Optimization/Software/Porta/

Hypergraphs of Special Type and CUT Polytope Relaxations Properties Analysis

Nikolaev A.V.

Keywords: hypergraphs, cut polytope relaxations, rooted semimetric polytope, integrity recognition.

The topic of the research is a relationship between a class of hypergraphs of a special type and properties of the points of the cut polytope relaxations $M_{n,k}$. It is established that for a sufficiently large n in $M_{n,4}$ and $M_{n,5}$ polytopes, there are points which have no integer vertices in any expansion in a convex combination of $M_{n,3}$ vertices.

Сведения об авторе: **Николаев Андрей Валерьевич**,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант.