Модел. и анализ информ. систем. Т. **18**, № **3** (2011) 101–124

УДК 519.157

Динамическое программирование в обобщенной задаче курьера с внутренними работами: элементы параллельной структуры

Григорьев А.М., Иванко Е.Е., Ченцов А.Г.[1]

Институт математики и механики УрО РАН

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

получена 28 февраля 2011

Ключевые слова: маршрут, трасса, условия предшествования

Рассматриваются вопросы, связанные с реализацией динамического программирования в задачах последовательного обхода мегаполисов, осложненной условиями предшествования и внутренними работами, осуществляемыми в пределах мегаполисов. Предложена схема построения усеченного (неполного) массива значений функции Беллмана, использующая параллельные вычисления и не проигрывающая в качестве. Предлагаемая процедура реализована на многопроцессорной вычислительной системе; распараллеливание реализуется на этапе построения слоев функции Беллмана.

1. Введение

Статья посвящена исследованию методов решения задач маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования. Последние естественным образом возникают в приложениях, связанных с морскими и авиационными перевозками, технологическими процессами. В последнее время элементы упомянутой маршрутизации стали использоваться в некоторых задачах атомной энергетики (в частности, это касается вопросов радиационной безопасности в связи с перемещением между помещениями АЭС и внутри помещений при выполнении комплекса работ одним исполнителем).

В идейном отношении задача, рассматриваемая ниже, восходит к известной NP-полной задаче коммивояжера (ЗК), см. в этой связи [1–3]. Особо отметим вариант метода динамического программирования (МДП) для решения ЗК, предложенный в [4,5]. В обзоре [1–3] отмечен также целый ряд задач маршрутизации, подобных ЗК в идейном отношении, но содержащих те или иные особенности, связанные с приложениями. Среди таких задач отметим ЗК с выбором и задачу курьера (см. [1]).

[1]Работа поддержана РФФИ 10-08-00484-а, 10-01-96020-р-урал-а, программой Президиума УрО РАН (проект 09-П-1-1014)

В первом случае речь идет о посещении кластеров, "составленных" из городов (терминология, используемая в работах по решению ЗК), а во втором – имеются в виду упомянутые условия предшествования. Отметим, что обе данные особенности присутствуют в постановке, рассматриваемой ниже. Кроме того, отметим естественное развитие ЗК, связанное с обходом мегаполисов и различные "динамические" аналоги данной задачи (см., в частности, [6]).

В числе наиболее эффективных методов решения ЗК отметим известный метод ветвей и границ (см., в частности, [7] и библиографию в [7], а также [6]). Настоящая статья продолжает исследования [8–12], посвященные изучению обобщенной задачи курьера с внутренними работами (в свою очередь, [8–12] продолжают более ранние работы [13–16], связанные с исследованием задачи последовательного обхода множеств). Одним из важных моментов, отраженных в [8–12], является построение "усеченной" версии МДП для решения обобщенной задачи курьера с внутренними работами. Речь идет о том, чтобы без потери качества реализовать процедуру МДП без насчитывания всего массива значений функции Беллмана. Этот прием позволяет существенно повысить размерность задач, допускающих эффективные вычисления (см. примеры задач, решенных с использованием ПЭВМ, в [10, 11]).

Вышеупомянутые конструкции работ [8–11] допускают в принципе реализацию на многопроцессорных вычислительных системах (МВС); однако данное направление требует разработки целого ряда теоретических положений, связанных с реализацией параллельных вычислений в наиболее трудной части численного решения, а именно при построении (неполного) массива значений функции Беллмана. Речь идет здесь о распараллеливании достаточно трудных вычислительных задач оптимизации, связанных идейно с уравнением Беллмана; сама по себе логика МДП является последовательной, т.к. речь идет о насчитывании одного за другим слоев функции Беллмана (определение слоев см. в [8–12]). По этой причине требуется изучение самих этих слоев на предмет рекурсивной их реализации с максимальной в известной степени (это показано в статье) экономией в процессе построения т.н. существенных списков заданий. Это построение, реализованное в настоящей работе, базируется прежде всего на идее эффективного использования условий предшествования для снижения вычислительной сложности процедуры без потери ее оптимальности.

В статье имеется раздел, в котором даны некоторые оценки экономии вычислений. Приведены также примеры решения основной задачи на МВС с использованием излагаемых в работе теоретических конструкций (данные теоретические построения требуют привлечения общематематических понятий, изложенных в [17, 18]; в статье приведена необходимая сводка этих понятий).

Отметим, что применяемые методы отражены в целом ряде работ, посвященных приложениям в области атомной энергетики (см. [19–21]); они ориентированы на использование при решении инженерных задач минимизации дозовой нагрузки персонала АЭС при выполнении комплекса работ и задачи о демонтаже энергоблока, выведенного из эксплуатации.

2. Некоторые обозначения общего характера

Введем некоторые обозначения общего характера. Для произвольных объектов x и y через $\{x;y\}$ обозначим множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других объектов (см. [17]). В частности, для любого объекта z получаем в виде $\{z\} \triangleq \{z;z\}$ (здесь и ниже $\triangleq$ – равенство по определению) одноэлементное множество, содержащее z. Тогда в согласии с [17] полагаем, что для каждых двух объектов a и b $(a,b) \triangleq \{\{a\};\{a;b\}\}$. Для упорядоченной пары $h = (a,b)$ условимся через $pr_1(h)$ и $pr_2(h)$ обозначать соответственно первый и второй элементы $h : pr_1(h) = a,\ pr_2(h) = b$. Условимся, что $\mathbb{N} = \{1;2;\ldots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N}$. При $k \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{k,l} \triangleq \{i \in \mathbb{N}_0 \mid (k \leq i)\&(i \leq l)\}.$$

Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $[0,\infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$. Для каждого множества S через $Fin(S)$ обозначаем семейство всех непустых конечных подмножеств (п/м) S; полагаем также, что $\mathcal{R}_+[S]$ есть множество всех неотрицательных вещественнозначных функций на S: $\mathcal{R}_+[S] = \{S \to [0,\infty[\}$.

Как обычно, [18, с. 87] перестановкой множества S называем всякую биекцию α [18, с. 86] множества S на себя; соответствующую обратную перестановку обозначаем через α^{-1}.

Если K – непустое конечное множество, то через $|K| \in \mathbb{N}$ обозначаем мощность K; через $(bi)[K]$ обозначаем множество всех биекций «отрезка» $\overline{1,|K|}$ на K (см. [18, с. 86]). Полагаем также, что $|\emptyset| \triangleq 0$.

Специальные понятия и обозначения. Всюду в дальнейшем фиксируем число $N \in \mathbb{N}$, такое, что $2 \leq N$; N определяет ниже количество мегаполисов, подлежащих посещению. Через $\mathbb{P}$ обозначаем множество всех перестановок в $\overline{1,N}$, именуемых (полными) маршрутами. Полагаем заданным множество $\mathbf{K}, \mathbf{K} \subset \overline{1,N} \times \overline{1,N}$ (случай $\mathbf{K} = \emptyset$ не исключается). Элементы $\mathbf{K}$ (а это – упорядоченные пары индексов) именуем адресными парами, полагая, что первый элемент каждой такой пары есть отправитель, а второй – получатель (груза, сообщения и т.п.). Тогда

$$\mathbb{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(pr_1(z)) < \alpha^{-1}(pr_2(z))\ \forall z \in \mathbf{K}\} \tag{1}$$

есть множество всех маршрутов, допустимых по предшествованию, т.е. множество всех таких маршрутов, для которых «посещение» каждой адресной пары реализуется в направлении от отправителя к получателю. Как и в [8–11], полагаем всюду в дальнейшем выполненным следующее

Условие 1. Для всякого непустого множества $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K},\ \exists z \in \mathbf{K}_0 : pr_1(z) \neq pr_2(\tilde{z})\ \ \forall \tilde{z} \in \mathbf{K}_0$.

Тогда (при упомянутом условии 1) $\mathbb{A} \neq \emptyset$, что показано в [12, раздел 2.3].

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество X, кортеж

$$(M_i)_{i\in\overline{1,N}} : \overline{1,N} \to Fin(X)$$

множеств $M_1, \ldots, M_N$, именуемых целевыми, а также точку $x^0 \in X$, исполняющую роль начального пункта или базы. Полагаем далее, что

$$(x^0 \notin M_j \quad \forall j \in \overline{1,N}) \ \& \ (M_k \cap M_l = \emptyset \quad \forall k \in \overline{1,N} \ \forall l \in \overline{1,N} \setminus \{k\}).$$

Кроме того, фиксируем $\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[X \times X]$, кортеж

$$(c_i)_{i \in \overline{1,N}} : \overline{1,N} \to \mathcal{R}_+[X \times X],$$

а также $\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[X]$; $\mathbf{c}, c_1, \ldots, c_N$ – функции стоимости, интерпретируемые содержательно как потери (затраты) при выполнении перемещений и (внутренних) работ, функция $\mathbf{f}$ оценивает финальное состояние. Эти функции мы полагаем в методических целях максимально продолженными (см. в этой связи [8, раздел 2]). Через $\mathfrak{N}$ обозначаем семейство всех непустых подмножеств $\overline{1,N}$.

В дальнейшем рассматривается проблема осуществления перемещений

$$x^0 \to (z_1 \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}) \to \ldots \to (z_N \in M_{\alpha(N)} \times M_{\alpha(N)}), \tag{2}$$

характеризующая задачу верхнего уровня (макроуровня), где сам факт проведения внутренних работ проявляется в том, что каждое посещение целевого множества «разбито» на два пункта: порт прибытия и порт отправления. Так, например, z_1 в (2) есть пара городов (терминология ЗК): $z_1 = (z_1^{(1)}, z_1^{(2)})$, где $z_1^{(1)}$ – порт прибытия, а $z_1^{(2)}$ – порт отправления. Выполняемые при этом на множестве $M_{\alpha(1)}$ работы оцениваются значением $c_{\alpha(1)}(z_1) = c_{\alpha(1)}(z_1^{(1)}, z_1^{(2)}) \in [0, \infty[$. Можно полагать при этом (подробнее см. в [10]), что $c_{\alpha(1)}(z_1)$ есть на самом деле экстремум затрат в задаче нижнего уровня, характеризуемой параметрами $z_1^{(1)}$ и $z_1^{(2)}$. Эта особенность связана с тем, что далее рассматривается только аддитивное агрегирование затрат, а это позволяет в вопросах оптимизации ограничиться рассмотрением режимов, для которых внутренние работы выполняются оптимально при заданной системе внешних перемещений (на самом деле в систему внешних перемещений встраиваются реальные работы, но мы можем ограничиться учетом их оптимальных режимов, не проигрывая в качестве).

С учетом упомянутых обстоятельств полагаем, что при $\alpha \in \mathbb{P}$ $\zeta[\alpha]$ есть множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0,N}} : \overline{0,N} \to X \times X, \tag{3}$$

для каждого из которых $z_0 = (x^0, x^0)$ и

$$z_j \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)} \quad \forall j \in \overline{1,N}. \tag{4}$$

Элементы $\zeta[\alpha]$ (а это кортежи вида (3), (4)) суть трассы, согласованные с маршрутом α (для наших целей данная конструкция существенна при $\alpha \in \mathbb{A}$; само $\zeta[\alpha]$ есть всякий раз непустое конечное множество. Полагаем, что (см. [8–11])

$$\mathbb{S} \triangleq \{(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0,N}}) \in \mathbb{A} \times \mathfrak{X}_N \mid (z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \zeta[\alpha]\}, \tag{5}$$

где $\mathfrak{X}_N$ определяется как множество всех кортежей $(h_i)_{i \in \overline{0,N}} : \overline{0,N} \to X \times X$. Тогда имеем свойство $\mathbb{S} \neq \emptyset$ (т.к. $\mathbb{A} \neq \emptyset$). Более точно: $\mathbb{S}$ есть непустое конечное множество;

элементы $\mathbb{S}$ – пары маршрут-трасса – суть допустимые решения рассматриваемой задачи.

Функции стоимости. Напомним, что у нас заданы следующие функции:

$$\begin{gathered}\mathbf{c}: X \times X \to [0,\infty[, c_1 : X \times X \to [0,\infty[, \quad \dots \quad ,\\ c_N : X \times X \to [0,\infty[, \mathbf{f} : X \to [0,\infty[.\end{gathered} \tag{6}$$

Функция $\mathbf{c}$ используется для оценки внешних перемещений, функции $c_1, \dots, c_N$ – для оценивания внутренних работ, а функция $\mathbf{f}$ – для оценивания терминальных состояний ($pr_2(z_N)$ в (2)). Пусть

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{c}(pr_2(z_i), pr_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^{N} c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(pr_2(z_N))\\ \forall \alpha \in \mathbb{P} \;\; \forall (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \zeta[\alpha].\end{gathered} \tag{7}$$

Мы применяем (7) для оценивания решений из множества $\mathbb{S}$ (5). Тогда

$$V \triangleq \min_{(\alpha,(z_i)_{i\in\overline{0,N}})\in\mathbb{S}} \mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \min_{\alpha\in\mathbb{A}} \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\zeta[\alpha]} \mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \in [0,\infty[\tag{8}$$

есть значение (экстремум) задачи

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \to \min, \quad (\alpha, (z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in \mathbb{S}. \tag{9}$$

Далее мы называем (9) основной задачей маршрутизации (ОЗМ); ее оптимальными решениями называем всевозможные упорядоченные пары $(\alpha^0, (z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}) \in \mathbb{S}$, для которых $\mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}] = V$. Условимся о некоторых обозначениях. Оператор $\mathbf{I}$ определяем в согласии с [8–11]: если $K \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ есть по определению семейство всех непустых подмножеств $\overline{1,N}$, то полагаем, что

$$\Xi[K] \triangleq \{l \in \mathbf{K} \mid (pr_1(l) \in K) \;\&\; (pr_2(l) \in K)\} \tag{10}$$

и, кроме того,

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{pr_2(l) : l \in \Xi[K]\}. \tag{11}$$

При этом $\mathbf{I} : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, а тогда

$$\mathbf{I}(K) \neq \emptyset \;\; \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{12}$$

3. Метод динамического программирования (усеченная версия)

Мы используем конструкцию на основе МДП, подробно изложенную в [8–11] (используем также построения [12, раздел 4.9]). Сейчас мы ее рассматриваем предельно кратко, имея своей целью преобразование данной конструкции к варианту, допускающему распараллеливание. Напомним, что (см. [8–12])

$$\mathcal{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K}\ (pr_1(z) \in K) \Rightarrow (pr_2(z) \in K)\} =$$
$$\{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K}\ (pr_1(z) \notin K) \vee (pr_2(z) \in K)\}. \tag{13}$$

Кроме того, полагаем, что $\mathcal{G}_s = \{K \in \mathcal{G} \mid s = |K|\}\ \forall s \in \overline{1,N}$. Множества из семейств $\mathcal{G}_s$, $s \in \overline{1,N}$, будем называть существенными списками соответствующей мощности. Полагая

$$\mathbf{K}_1 \triangleq \{pr_1(z) : z \in \mathbf{K}\},$$

имеем, в частности, равенство

$$\mathcal{G}_1 = \{\{t\} : t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\}. \tag{14}$$

Кроме того, напомним, что (см. [8–11]) справедливо свойство:

$$K \setminus \{k\} \in \mathcal{G}_{s-1}\ \forall s \in \overline{2,N}\ \forall K \in \mathcal{G}_s\ \forall k \in \mathbf{I}(K). \tag{15}$$

В (14), (15) имеем простейшие свойства существенных списков. Пусть, кроме того, $\mathbf{M}$ есть по определению объединение всех множеств M_i, $i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1$; $\mathbf{M} \in Fin(X)$. В терминах $\mathbf{M}$ определяем слой

$$D_0 \triangleq \mathbf{M} \times \{\emptyset\} = \{(x, \emptyset) : x \in \mathbf{M}\}. \tag{16}$$

Кроме того, следуя [8–12], полагаем, что $D_N \triangleq \{(x^0, \overline{1,N})\}$ (одноэлементное множество). Если же $s \in \overline{1,N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$, то полагаем, что

$$J_s(K) \triangleq \{i \in \overline{1,N} \setminus K \mid \{i\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\}. \tag{17}$$

В терминах множеств (17) конструируются «регулярные» слои функции Беллмана. В основе этого построения находятся специальные клетки пространства позиций. Для их построения введем сначала множества

$$\mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{i \in J_s(K)} M_i \quad \forall s \in \overline{1,N-1} \quad \forall K \in \mathcal{G}_s. \tag{18}$$

Полагаем, что каждое множество (18) присоединено к списку, его определяющему: если $s \in \overline{1,N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$, то множество $\mathcal{M}_s[K]$ «навешивается» на список K «слева», образуя набор состояний, которые только и будут рассматриваться в связи со списком K. Теперь определим клетки:

$$\mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s[K]\}\ \ \forall s \in \overline{1,N-1}\ \ \forall K \in \mathcal{G}_s. \tag{19}$$

Наконец, посредством объединения клеток (19) конструируются «регулярные» слои пространства позиций

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K]\ \ \forall s \in \overline{1,N-1}. \tag{20}$$

Конструкция (18)–(20) соответствует [8–11]. В терминах слоев D_s, $s \in \overline{0, N}$, осуществляется построение слоев функции Беллмана (см. [8–11]), определяемых в виде функций

$$\mathcal{V}_0 : D_0 \to [0, \infty[, \quad \mathcal{V}_1 : D_1 \to [0, \infty[, \quad \ldots \quad , \mathcal{V}_N : D_N \to [0, \infty[.$$

Функция $\mathcal{V}_0$ определяется непосредственно: полагаем, что

$$\mathcal{V}_0(x, \emptyset) \triangleq \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in \mathbf{M}. \tag{21}$$

Далее преобразование $\mathcal{V}_{s-1} \to \mathcal{V}_s$, где $s \in \overline{1, N}$, определяется универсальным способом, учитывающим, что (см. [8–12])

$$(y, K \setminus \{j\}) \in D_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1, N} \quad \forall (x, K) \in D_s \quad \forall j \in \mathbf{I}(K) \quad \forall y \in M_j. \tag{22}$$

Итак, следуя [8–11], полагаем, что при $s \in \overline{1, N}$ функция $\mathcal{V}_s$ (слой функции Беллмана с номером s) определяется следующим образом: $\forall (x, K) \in D_s$

$$\mathcal{V}_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, pr_1(z)) + c_j(z) + \mathcal{V}_{s-1}(pr_2(z), K \setminus \{j\})]. \tag{23}$$

В связи с (23) уместно ввести также клетки функции Беллмана: речь идет при $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$ о массивах значений

$$\mathcal{V}_s(x, K), \quad x \in \mathcal{M}_s[K]; \tag{24}$$

мы допускаем при этом пустые массивы такого рода. Каждая клетка (24) может выделяться процессору для проведения соответствующих вычислений. Затем каждая функция $\mathcal{V}_s, s \in \overline{1, N}$, получается склеиванием своих клеток (24). Заметим, что

$$V = \mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}). \tag{25}$$

Предложение 1. *Для всякого непустого множества $K, K \subset \mathbf{K}$, непременно $\exists z \in K : pr_1(\tilde{z}) \neq pr_2(z) \ \ \forall \tilde{z} \in K$.*

Доказательство. В случае $\mathbf{K} = \emptyset$ доказываемое утверждение очевидно. Поэтому ограничимся случаем $\mathbf{K} \neq \emptyset$. Пусть $n \triangleq |\mathbf{K}|$; тогда $n \in \mathbb{N}$. Через $\mathcal{P}'(\mathbf{K})$ обозначим семейство всех непустых подмножеств $\mathbf{K}$; пусть

$$\mathfrak{M}_k \triangleq \{K \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \mid |K| = k\} \quad \forall k \in \overline{1, n}.$$

Тогда $\mathcal{P}'(\mathbf{K})$ есть объединение всех $\mathfrak{M}_k, k \in \overline{1, n}$. Пусть $R \in \mathfrak{M}_1$. Тогда $R \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})$ и $|R| = 1$. Поэтому $R = \{\rho\}$, где $\rho \in \mathbf{K}$; в силу условия 1 имеем для некоторого $z' \in R$ свойство

$$pr_1(z') \neq pr_2(\tilde{z}) \quad \forall \tilde{z} \in R.$$

В силу одноэлементности R получаем, что $pr_1(\rho) \neq pr_2(\rho)$. В частности, это означает, что

$$\exists z \in R : pr_1(\tilde{z}) \neq pr_2(z) \quad \forall \tilde{z} \in R.$$

Поскольку выбор R был произвольным, установлено, что

$$\forall K \in \mathfrak{M}_1 \ \exists z \in K : pr_1(\tilde{z}) \neq pr_2(z) \ \ \forall \tilde{z} \in K. \tag{26}$$

Пусть вообще $m \in \overline{1, n-1}$ обладает свойством

$$\forall K \in \mathfrak{M}_m \ \exists z \in K : pr_1(\tilde{z}) \neq pr_2(z) \ \ \forall \tilde{z} \in K. \tag{27}$$

Тогда $m + 1 \in \overline{2, n}$. Выберем произвольно $\mathbb{K} \in \mathfrak{M}_{m+1}$. Тогда, в частности, $\mathbb{K}$ – непустое подмножество $\mathbf{K}$, а потому согласно условию 1 для некоторого $z_* \in \mathbb{K}$ имеем свойство

$$pr_1(z_*) \neq pr_2(\tilde{z}) \ \ \forall \tilde{z} \in \mathbb{K}. \tag{28}$$

При этом $Q \triangleq \mathbb{K} \setminus \{z_*\} \in \mathfrak{M}_m$ и (см. (27)) для некоторого $z^* \in Q$ верно

$$pr_1(\tilde{z}) \neq pr_2(z^*) \ \ \forall \tilde{z} \in Q. \tag{29}$$

Здесь $z^* \in \mathbb{K}$, а тогда из (28) следует, что

$$pr_1(z_*) \neq pr_2(z^*). \tag{30}$$

Поскольку $\mathbb{K} = Q \cup \{z_*\}$, то из (29) и (30) следует, что

$$pr_1(\tilde{z}) \neq pr_2(z^*) \ \ \forall \tilde{z} \in \mathbb{K}. \tag{31}$$

Поэтому $z^* \in \mathbb{K}$ (т.к. $z^* \in Q$ и $Q \subset \mathbb{K}$) таково, что справедливо свойство (31). Поскольку выбор $\mathbb{K}$ был произвольным, установлено, что $\forall K \in \mathfrak{M}_{m+1} \ \ \exists z \in K$:

$$pr_1(\tilde{z}) \neq pr_2(z) \ \ \forall \tilde{z} \in K.$$

Итак, установлено (см. (27)), что истинна импликация

$$(\forall K \in \mathfrak{M}_m \ \exists z \in K : pr_1(\tilde{z}) \neq pr_2(z) \ \ \forall \tilde{z} \in K) \Rightarrow$$
$$(\forall K \in \mathfrak{M}_{m+1} \ \exists z \in K : pr_1(\tilde{z}) \neq pr_2(z) \ \ \forall \tilde{z} \in K).$$

Так как выбор m был произвольным, установлено, что $\forall s \in \overline{1, n-1}$ $(\forall K \in \mathfrak{M}_s \ \exists z \in K : pr_1(\tilde{z}) \neq pr_2(z) \ \ \forall \tilde{z} \in K) \Rightarrow (\forall K \in \mathfrak{M}_{s+1} \ \exists z \in K : pr_1(\tilde{z}) \neq pr_2(z) \ \ \forall \tilde{z} \in K)$.

С учетом (26) получаем теперь, что $\forall k \in \overline{1, n} \ \forall K \in \mathfrak{M}_k \ \exists z \in K : pr_1(\tilde{z}) \neq pr_2(z) \ \ \forall \tilde{z} \in K$. В итоге $\forall K \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \ \exists z \in K : pr_1(\tilde{z}) \neq pr_2(z) \ \forall \tilde{z} \in K$. Предложение доказано.

Предложение 2. *Если* $s \in \overline{1, N-1}$ *и* $K \in \mathcal{G}_s$, *то* $\exists j \in J_s(K) : j \in \mathbf{I}(\{j\} \cup K)$.
Доказательство. Поскольку $s < N$, то $\overline{1, N} \setminus K \neq \emptyset$, то есть $\overline{1, N} \setminus K \in \mathfrak{N}$. Рассмотрим множество $\Xi[\overline{1, N} \setminus K]$. Возможны следующие два случая:

$$(\Xi[\overline{1, N} \setminus K] = \emptyset) \vee (\Xi[\overline{1, N} \setminus K] \neq \emptyset). \tag{32}$$

Оба случая в (32) рассмотрим отдельно.
1) Пусть $\Xi[\overline{1, N} \setminus K] = \emptyset$. Тогда выбираем произвольно $\mathbf{p} \in \overline{1, N} \setminus K$. Рассмотрим множество $\{\mathbf{p}\} \cup K \in \mathfrak{N}, |\{\mathbf{p}\} \cup K| = s + 1$. Выберем произвольно $z_* \in \mathbf{K}$. Тогда

$$(pr_1(z_*) \in \{\mathbf{p}\} \cup K) \vee (pr_1(z_*) \notin \{\mathbf{p}\} \cup K). \tag{33}$$

Второй случай в (33) нас «устраивает» (см. (13)). Пусть $pr_1(z_*) \in \{\mathbf{p}\} \cup K$, то есть

$$(pr_1(z_*) = \mathbf{p}) \vee (pr_1(z_*) \in K). \tag{34}$$

Тогда, коль скоро $K \in \mathcal{G}$, то имеем

$$(pr_1(z_*) \in K) \Rightarrow (pr_2(z_*) \in K). \tag{35}$$

Если же $pr_1(z_*) = \mathbf{p}$, то истинна импликация

$$(pr_2(z_*) \in \overline{1,N} \setminus K) \Rightarrow (z_* \in \Xi[\overline{1,N} \setminus K]). \tag{36}$$

Поскольку $\Xi[\overline{1,N} \setminus K] = \emptyset$, то имеем из (36), что $pr_2(z_*) \notin \overline{1,N} \setminus K$, то есть $pr_2(z_*) \in K$ и, в частности, $pr_2(z_*) \in \{\mathbf{p}\} \cup K$. Итак,

$$(pr_1(z_*) = \mathbf{p}) \Rightarrow (pr_2(z_*) \in \{\mathbf{p}\} \cup K]). \tag{37}$$

Из (34), (35) и (37) имеем во всех возможных (при $pr_1(z_*) \in \{\mathbf{p}\} \cup K$) случаях включение $pr_2(z_*) \in \{\mathbf{p}\} \cup K$. Итак, истинна следующая импликация

$$(pr_1(z_*) \in \{\mathbf{p}\} \cup K) \Rightarrow (pr_2(z_*) \in \{\mathbf{p}\} \cup K). \tag{38}$$

Из (33) и (38) вытекает, конечно, что $(pr_1(z_*) \notin \{\mathbf{p}\} \cup K) \vee (pr_2(z_*) \in \{\mathbf{p}\} \cup K)$. Поскольку выбор z_* был произвольным, установлено, что $\forall z \in \mathbf{K}$

$$(pr_1(z) \notin \{\mathbf{p}\} \cup K) \vee (pr_2(z) \in \{\mathbf{p}\} \cup K). \tag{39}$$

Тогда, согласно (13) $\{\mathbf{p}\} \cup K \in \mathcal{G}$ и, следовательно,

$$\{\mathbf{p}\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}. \tag{40}$$

Итак, $\mathbf{p} \in \overline{1,N} \setminus K : \{\mathbf{p}\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}$. Следовательно (см. (17)),

$$\mathbf{p} \in J_s(K). \tag{41}$$

Рассмотрим множества

$$\Xi[\{\mathbf{p}\} \cup K] = \{z \in \mathbf{K} \mid (pr_1(z) \in \{\mathbf{p}\} \cup K) \;\&\; (pr_2(z) \in \{\mathbf{p}\} \cup K)\}, \tag{42}$$

$$\mathbf{I}(\{\mathbf{p}\} \cup K) = (\{\mathbf{p}\} \cup K) \setminus \{pr_2(z) : z \in \Xi[\{\mathbf{p}\} \cup K]\}. \tag{43}$$

Если $\mathbf{p} \neq pr_2(z) \;\; \forall z \in \Xi[\{\mathbf{p}\} \cup K]$, то $\mathbf{p} \in \mathbf{I}(\{\mathbf{p}\} \cup K)$. Итак,

$$(\mathbf{p} \neq pr_2(z) \; \forall z \in \Xi[\{\mathbf{p}\} \cup K]) \Rightarrow (\mathbf{p} \in \mathbf{I}(\{\mathbf{p}\} \cup K)). \tag{44}$$

Допустим, что $\exists z \in \Xi[\{\mathbf{p}\} \cup K] : \mathbf{p} = pr_2(z)$. Пусть

$$z_0 \in \Xi[\{\mathbf{p}\} \cup K] : \mathbf{p} = pr_2(z_0) \tag{45}$$

Тогда согласно (42) имеем следующие свойства:

$$(pr_1(z_0) \in \{\mathbf{p}\} \cup K) \;\&\; (\mathbf{p} = pr_2(z_0) \in \{\mathbf{p}\} \cup K). \tag{46}$$

При этом (см. (42)) $z_0 \in \mathbf{K}$. Поскольку $\Xi[\overline{1,N} \setminus K] = \emptyset$, то $z_0 \notin \Xi[\overline{1,N} \setminus K]$, а тогда (см. (10))

$$(pr_1(z_0) \notin \overline{1,N} \setminus K) \ \vee \ (pr_2(z_0) \notin \overline{1,N} \setminus K). \tag{47}$$

Согласно (45) имеем по выбору $\mathbf{p}$, что $pr_2(z_0) \in \overline{1,N} \setminus K$. Тогда согласно (47) $pr_1(z_0) \notin \overline{1,N} \setminus K$, а потому $pr_1(z_0) \in \overline{1,N} \setminus (\overline{1,N} \setminus K)$, то есть

$$pr_1(z_0) \in K. \tag{48}$$

Напомним, что $K \in \mathcal{G}$ и $z_0 \in \mathbf{K}$, поэтому согласно (13) $(pr_1(z_0) \notin K) \vee (pr_2(z_0) \in K)$. С учетом (48) получаем теперь, что $pr_2(z_0) \in K$. С учетом (45) имеем теперь, что $\mathbf{p} \in K$, что невозможно, так как $\mathbf{p} \in \overline{1,N} \setminus K$. Полученное противоречие показывает, что на самом деле $\mathbf{p} \neq pr_2(z) \ \forall z \in \Xi[\{\mathbf{p}\} \cup K]$ и согласно (44) справедливо включение $\mathbf{p} \in \mathbf{I}(\{\mathbf{p}\} \cup K)$. Поэтому с учетом (41) имеем, что $\mathbf{p} \in J_s(K) : \mathbf{p} \in \mathbf{I}(\{\mathbf{p}\} \cup K)$. Итак (при условии $\Xi[\overline{1,N} \setminus K] = \emptyset$), установлено, что $\exists j \in J_s(K) : j \in \mathbf{I}(\{j\} \cup K)$. Следовательно, истинна импликация

$$(\Xi[\overline{1,N} \setminus K] = \emptyset) \Rightarrow (\exists j \in J_s(K) : j \in \mathbf{I}(\{j\} \cup K)). \tag{49}$$

2) Пусть теперь $\Xi[\overline{1,N} \setminus K] \neq \emptyset$. Тогда $\Xi[\overline{1,N} \setminus K]$ есть непустое подмножество $\mathbf{K}$, а потому согласно предложению 1 найдется

$$\rho = \Xi[\overline{1,N} \setminus K], \tag{50}$$

для которого имеет место свойство

$$pr_1(\tilde{z}) \neq pr_2(\rho) \ \ \forall \tilde{z} \in \Xi[\overline{1,N} \setminus K]. \tag{51}$$

Тогда (см. (10), (50)) получаем, что $\rho \in \mathbf{K}$ и при этом

$$(pr_1(\rho) \in \overline{1,N} \setminus K) \ \& \ (pr_2(\rho) \in \overline{1,N} \setminus K). \tag{52}$$

Рассмотрим теперь множество

$$\mathbb{K} \triangleq \{pr_2(\rho)\} \cup K \in \mathfrak{N}, \tag{53}$$

для которого $|\mathbb{K}| = s + 1$ в силу (52). Выберем произвольно

$$\lambda \in \mathbf{K}. \tag{54}$$

Тогда $pr_1(\lambda) \in \overline{1,N}$ и $pr_2(\lambda) \in \overline{1,N}$. При этом

$$(pr_1(\lambda) \notin \mathbb{K}) \vee (pr_1(\lambda) \in \mathbb{K}). \tag{55}$$

Рассмотрим второй случай. Итак, пусть

$$pr_1(\lambda) \in \mathbb{K}. \tag{56}$$

Тогда согласно (53) имеем, что

$$(pr_1(\lambda) = pr_2(\rho)) \vee (pr_1(\lambda) \in K). \tag{57}$$

Отметим, что в случае, когда $pr_1(\lambda) = pr_2(\rho)$ и $pr_2(\lambda) \in \overline{1,N} \setminus K$, имеем (поскольку $pr_2(\rho) \in \overline{1,N} \setminus K$ в силу (52)), что $(pr_1(\lambda) \in \overline{1,N} \setminus K)$ & $(pr_2(\lambda) \in \overline{1,N} \setminus K)$ и, следовательно, согласно (10) справедливо включение $\lambda \in \Xi[\overline{1,N} \setminus K]$, что приводит в силу (51) к свойству $pr_1(\lambda) \neq pr_2(\rho)$ и, следовательно, к противоречию. Поэтому при условии $pr_1(\lambda) = pr_2(\rho)$ непременно $pr_2(\lambda) \in K$ и, в частности, $pr_2(\lambda) \in \mathbb{K}$ (см. (53)). Итак, истинна импликация

$$(pr_1(\lambda) = pr_2(\rho)) \Rightarrow (pr_2(\lambda) \in \mathbb{K}). \tag{58}$$

Если же $pr_1(\lambda) \in K$, то по выбору K имеем (см. (13)), что $pr_2(\lambda) \in K$ и, в частности (см. (53)), $pr_2(\lambda) \in \mathbb{K}$. Итак, установлена импликация

$$(pr_1(\lambda) \in K) \Rightarrow (pr_2(\lambda) \in \mathbb{K}). \tag{59}$$

Из (57)–(59) вытекает (при условии (56)), что во всех возможных случаях $pr_2(\lambda) \in \mathbb{K}$. Итак, установлено, что

$$(pr_1(\lambda) \in \mathbb{K}) \Rightarrow (pr_2(\lambda) \in \mathbb{K}). \tag{60}$$

Из (55), (60) имеем теперь, что $(pr_1(\lambda) \notin \mathbb{K}) \vee (pr_2(\lambda) \in \mathbb{K})$. Поскольку выбор λ (54) был произвольным, установлено, что $\forall z \in \mathbf{K}$

$$(pr_1(z) \notin \mathbb{K}) \vee (pr_2(z) \in \mathbb{K}).$$

Из (13), (53) вытекает теперь, что

$$\mathbb{K} \in \mathcal{G}_{s+1}. \tag{61}$$

Рассмотрим множества $\Xi[\mathbb{K}]$ и $\mathbf{I}(\mathbb{K})$;

$$\Xi[\mathbb{K}] = \{l \in \mathbf{K} \mid (pr_1(l) \in \mathbb{K}) \ \& \ (pr_2(l) \in \mathbb{K})\}, \tag{62}$$

$$\mathbf{I}(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \setminus \{pr_2(l) : l \in \Xi[\mathbb{K}]\}. \tag{63}$$

Заметим, что согласно (51) $pr_1(\rho) \neq pr_2(\rho)$, то есть $pr_1(\rho) \notin \{pr_2(\rho)\}$. При этом согласно (52) $pr_1(\rho) \notin K$, а тогда $pr_1(\rho) \notin \{pr_2(\rho)\} \cup K$, то есть $pr_1(\rho) \notin \mathbb{K}$ согласно (53). В итоге, согласно (62),

$$\rho \notin \Xi[\mathbb{K}]. \tag{64}$$

Поэтому $pr_2(\rho) \notin \{pr_2(l) : l \in \Xi[\mathbb{K}]\}$. В самом деле, допустим противное: для некоторой пары $l_* \in \Xi[\mathbb{K}]$

$$pr_2(\rho) = pr_2(l_*). \tag{65}$$

При этом $pr_1(l_*) \neq pr_2(l_*)$ в силу условия 1, так как $l_* \in \mathbf{K}$ согласно (62). Далее, по выбору l_* имеем, что $(pr_1(l_*) \in \mathbb{K})$ & $(pr_2(l_*) \in \mathbb{K})$, а тогда $pr_1(l_*) \in \mathbb{K} \setminus \{pr_2(l_*)\}$, то есть $pr_1(l_*) \in \mathbb{K} \setminus \{pr_2(\rho)\}$. С учетом (53) получаем, что $pr_1(l_*) \in K$, а тогда по выбору K (у нас $K \in \mathcal{G}$) $pr_2(l_*) \in K$, то есть $pr_2(\rho) \in K$, что невозможно (см. (52)). Полученное противоречие показывает, что $pr_2(\rho) \neq pr_2(l) \ \ \forall l \in \Xi[\mathbb{K}]$, то есть (см. (65)) $pr_2(\rho) \notin \{pr_2(l) : l \in \Xi[\mathbb{K}]\}$. С учетом (53) и (63) получаем, что $pr_2(\rho) \in \mathbf{I}(\mathbb{K})$. Заметим здесь же , что согласно (52),(53) и (61) $pr_2(\rho) \in \overline{1,N} \setminus K : \{pr_2(\rho)\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}$.

Тогда согласно (17) $pr_2(\rho) \in J_s(K) : pr_2(\rho) \in \mathbf{I}(\{pr_2(\rho)\} \cup K)$. Поэтому и в случае $\Xi[\overline{1,N} \setminus K] \neq \emptyset$ у нас $\exists j \in J_s(K) : j \in \mathbf{I}(\{j\} \cup K)$. Итак, установлена следующая импликация:

$$(\Xi[\overline{1,N} \setminus K] \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists j \in J_s(K) : j \in \mathbf{I}(\{j\} \cup K)). \tag{66}$$

Из (32), (49) и (66) получаем, что во всех возможных случаях $\exists j \in J_s(K) : j \in \mathbf{I}(\{j\} \cup K)$. $\square$

Всюду в дальнейшем полагаем, что $\mathfrak{N}_s \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid s = |K|\} \quad \forall s \in \overline{0,N}$. Тогда (см. (13)) имеем следующую систему равенств:

$$\mathcal{G}_s = \{K \in \mathcal{G} \mid s = |K|\} = \mathcal{G} \cap \mathfrak{N}_s \quad \forall s \in \overline{1,N}. \tag{67}$$

Предложение 3. *Если $s \in \overline{2,N}$, то справедливо равенство*

$$\mathcal{G}_{s-1} = \{\widetilde{K} \in \mathfrak{N}_{s-1} \mid \exists K \in \mathcal{G}_s \quad \exists j \in \mathbf{I}(K) : \widetilde{K} = K \setminus \{j\}\}. \tag{68}$$

Доказательство. Через $\mathfrak{K}$ обозначим множество в правой части (68). Сравним $\mathcal{G}_{s-1}$ и $\mathfrak{K}$. Выберем произвольно $Q \in \mathfrak{K}$. Тогда $Q \in \mathfrak{N}_{s-1}$ и для некоторых $K' \in \mathcal{G}_s$ и $j' \in \mathbf{I}(K')$ справедливо равенство $Q = K' \setminus \{j'\}$. Тогда согласно (15) получаем, что $Q \in \mathcal{G}_{s-1}$. Следовательно, установлено вложение

$$\mathfrak{K} \subset \mathcal{G}_{s-1}. \tag{69}$$

Пусть $T \in \mathcal{G}_{s-1}$. Поскольку $s - 1 \in \overline{1, N-1}$, то согласно предложению 2 для некоторого $\nu \in J_{s-1}(T)$

$$\nu \in \mathbf{I}(\{\nu\} \cup T). \tag{70}$$

В силу (17) имеем, что $\nu \in \overline{1,N} \setminus T$ и при этом $\{\nu\} \cup T \in \mathcal{G}_s$. При этом, поскольку $\nu \notin T$, то

$$(\{\nu\} \cup T) \setminus \{\nu\} = T. \tag{71}$$

(если $t \in T$, то, в частности, $t \in \{\nu\} \cup T$ и $t \neq \nu$, так как $\nu \notin T$; как следствие имеем, что $t \notin \{\nu\}$). Тогда $T \in \mathfrak{N}_{s-1}$ (см. (67)) и при этом (см. (70)) $\{\nu\} \cup T \in \mathcal{G}_s$, а также (см. (70)) $\nu \in \mathbf{I}(\{\nu\} \cup T)$ реализуют равенство (71), то есть $\exists K \in \mathcal{G}_s \quad \exists j \in \mathbf{I}(K) : T = K \setminus \{j\}$. Тогда $T \in \mathfrak{K}$, чем и завершается проверка вложения $\mathcal{G}_{s-1} \subset \mathfrak{K}$, что с учетом (69) означает справедливость требуемого равенства $\mathcal{G}_{s-1} = \mathfrak{K}$. $\square$

Заметим, что $\mathfrak{N}_N = \{\overline{1,N}\}$, а тогда по выбору $\mathbf{K}$ имеем, что $\overline{1,N} \in \mathcal{G}$ (см. определение $\mathbf{K}$ и (13)), а потому $\overline{1,N} \in \mathcal{G}_N$ и, следовательно, $\{\overline{1,N}\} \subset \mathcal{G}_N$. Если же $K \in \mathcal{G}_N$, то, в частности (см. (67)), $K \in \mathfrak{N}_N$, а тогда $K = \overline{1,N}$. Поэтому $\mathcal{G}_N \subset \{\overline{1,N}\}$ и, следовательно,

$$\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\}. \tag{72}$$

С учетом предложения 3 и (72) имеем рекуррентную процедуру

$$\begin{aligned}&(\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\})\ \&\\ &(\mathcal{G}_{s-1} = \{\widetilde{K} \in \mathfrak{N}_{s-1} \mid \exists K \in \mathcal{G}_s\ \exists j \in \mathbf{I}(K) :\ \widetilde{K} = K \setminus \{j\}\}\ \forall s \in \overline{2,N});\end{aligned} \tag{73}$$

напомним в этой связи (14).

Предложение 4. *Если* $s \in \overline{1, N-1}$ *и* $K \in \mathcal{G}_s$, *то*

$$J_s(K) = \{i \in J_s(K) \mid i \in \mathbf{I}(K \cup \{i\})\}. \tag{74}$$

Доказательство. Обозначим через Ω множество в правой части (74). Тогда

$$\Omega \subset J_s(K). \tag{75}$$

Выберем произвольный индекс

$$n \in J_s(K). \tag{76}$$

Тогда согласно (17) получаем, что $n \in \overline{1, N} \setminus K$ и, кроме того,

$$\{n\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}. \tag{77}$$

Это означает, что $\{n\} \cup K \in \mathfrak{N}_{s+1}$ и при этом $\{n\} \cup K \in \mathcal{G}$ (см. (67)). Вместе с тем из (13),(77) имеем, что

$$\forall z \in \mathbf{K} \ \ (pr_1(z) \notin \{n\} \cup K) \vee (pr_2(z) \in \{n\} \cup K). \tag{78}$$

Кроме того, по выбору K мы имеем, что $K \in \mathfrak{N}_s$ и $K \in \mathcal{G}$, а тогда

$$\forall z \in \mathbf{K} \ \ (pr_1(z) \notin K) \vee (pr_2(z) \in K). \tag{79}$$

Отметим, что согласно (10) имеем равенство

$$\Xi[\{n\} \cup K] = \{l \in \mathbf{K} \mid (pr_1(l) \in \{n\} \cup K) \ \&\ (pr_2(l) \in \{n\} \cup K)\}. \tag{80}$$

Тогда из (11) вытекает, что справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{I}(\{n\} \cup K) = (\{n\} \cup K) \setminus \{pr_2(l) : l \in \Xi[\{n\} \cup K]\}. \tag{81}$$

При этом, конечно, имеем, что $n \in \{n\}$, а тогда

$$n \in \{n\} \cup K. \tag{82}$$

Покажем, что $n \notin \{pr_2(l) : l \in \Xi[\{n\} \cup K]\}$. В самом деле, допустим противное:

$$n \in \{pr_2(l) : l \in \Xi[\{n\} \cup K]\}. \tag{83}$$

Тогда для некоторой упорядоченной пары $\lambda \in \Xi[\{n\} \cup K]$ справедливо свойство $n = pr_2(\lambda)$. Поэтому (см. (80))

$$(pr_1(\lambda) \in \{n\} \cup K) \ \&\ (n \in \{n\} \cup K). \tag{84}$$

Тогда $(pr_1(\lambda) = n) \vee (pr_1(\lambda) \in K)$. При этом $\lambda \in \mathbf{K}$, а тогда (см. (78))

$$(pr_1(\lambda) \notin \{n\} \cup K) \vee (pr_2(\lambda) \in \{n\} \cup K).$$

В силу условия 1 $pr_1(\lambda) \neq pr_2(\lambda)$, а тогда, поскольку $n = pr_2(\lambda)$, $pr_1(\lambda) \neq n$, и (см. (84)) $pr_1(\lambda) \in K$. Коль скоро $\lambda \in \mathbf{K}$, имеем из (79), что $(pr_1(\lambda) \notin K) \vee (pr_2(\lambda) \in K)$. Поэтому $pr_2(\lambda) \in K$. Но тогда $n \in K$, что невозможно, так как $n \in \overline{1,N} \setminus K$. Полученное противоречие показывает, что (83) невозможно и, следовательно,

$$n \notin \{pr_2(l) : l \in \Xi[\{n\} \cup K]\}. \tag{85}$$

Из (82), (85) получаем (см. (81)), что

$$n \in \mathbf{I}(\{n\} \cup K). \tag{86}$$

Из (76) и (86) имеем теперь, что $n \in \Omega$. Итак (см. (76)) $J_s(K) \subset \Omega$, а потому (см. (75)) $J_s(K) = \Omega$. $\square$

Из предложения 4 вытекает, что

$$j \in \mathbf{I}(K \cup \{j\}) \quad \forall s \in \overline{1, N-1} \quad \forall K \in \mathcal{G}_s \quad \forall j \in J_s(K). \tag{87}$$

Предложение 5. *Если* $s \in \overline{1, N-1}$ *и* $K \in \mathcal{G}_s$, *то* $J_s(K) \neq \emptyset$.
Доказательство следует из предложения 2. Мы получили, что при $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$ $J_s(K)$ есть непустое подмножество множества $\overline{1,N} \setminus K$. Как следствие из (18) имеем, что при $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$ $\mathcal{M}_s[K]$ есть непустое подмножество X; оно конечно, так как является конечным объединением множеств из $Fin(X)$. Каждый массив (24) сводится, следовательно, к функции, определенной на непустом конечном множестве: при $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$ полагаем, что отображение

$$\widetilde{\mathcal{V}}_s[K] : \mathcal{M}_s[K] \to [0, \infty[\tag{88}$$

определяется правилом:

$$\widetilde{\mathcal{V}}_s[K](x) \triangleq \mathcal{V}_s(x, K) \quad \forall x \in \mathcal{M}_s[K]. \tag{89}$$

Отображения (88), (89) будем далее называть клетками функции Беллмана. Соотношение (23) можно теперь применять с учетом (19), (20) для нахождения значений (89).

4. Проблема построения функции Беллмана

В соответствии с подходом, развиваемым в [8–12], для нахождения V и оптимальных решений задачи (9), можно использовать слои функции Беллмана $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_N$. В этой связи напомним (21), (25) и то, что (согласно (24), (25))

$$V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x^0, pr_1(z)) + c_j(z) + \mathcal{V}_{N-1}(pr_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})]. \tag{90}$$

В связи с (90) заметим, что согласно (15) имеем (поскольку $2 \leq N$), что

$$\overline{1,N} \setminus \{j\} \in \mathcal{G}_{N-1} \quad \forall j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}). \tag{91}$$

При этом $N-1 \in \overline{1, N-1}$. С учетом (88) имеем поэтому, что при $j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$

$$\widetilde{\mathcal{V}}_{N-1}[\overline{1, N} \setminus \{j\}] : \mathcal{M}_{N-1}[\overline{1, N} \setminus \{j\}] \to [0, \infty[,$$

где в виде

$$\mathcal{M}_{N-1}[\overline{1, N} \setminus \{j\}] = \bigcup_{k \in J_{N-1}(\overline{1, N} \setminus \{j\})} M_k \tag{92}$$

имеем непустое конечное множество. Как уже установлено, при $j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ в виде $J_{N-1}(\overline{1, N} \setminus \{j\})$ имеем непустое подмножество $\overline{1, N} \setminus (\overline{1, N} \setminus \{j\}) = \{j\}$, а тогда $J_{N-1}(\overline{1, N} \setminus \{j\}) = \{j\}$ и согласно (92)

$$\mathcal{M}_{N-1}[\overline{1, N} \setminus \{j\}] = M_j.$$

Здесь же мы заметим, что согласно (22)

$$(y, \overline{1, N} \setminus \{j\}) \in D_{N-1} \quad \forall j \in \mathbf{I}(\overline{1, N}) \quad \forall y \in M_j. \tag{93}$$

В частности, имеем очевидное следствие

$$(pr_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\}) \in D_{N-1} \ \ \forall j \in \mathbf{I}(\overline{1, N}) \ \ \forall z \in M_j \times M_j. \tag{94}$$

Отметим, что согласно (20) справедливо равенство

$$D_{N-1} = \bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-1}} \mathbb{D}_{N-1}[K]. \tag{95}$$

С учетом (19) получаем, что справедлива система равенств $\mathbb{D}_{N-1}[K] = \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_{N-1}[K]\} \ \ \forall K \in \mathcal{G}_{N-1}$. Возвращаясь к (94), (95) отметим, что $\forall j \in \mathbf{I}(\overline{1, N}) \ \ \forall z \in M_j \times M_j \ \ \exists K \in \mathcal{G}_{N-1}$: $(pr_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\}) \in \mathbb{D}_{N-1}[K]$. Из двух последних соотношений и (91) вытекает, что при $j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ и $z \in M_j \times M_j$ множество $\overline{1, N} \setminus \{j\}$ непременно обладает свойством $pr_2(z) \in \mathcal{M}_{N-1}[\overline{1, N} \setminus \{j\}]$, а потому определено значение $\widetilde{\mathcal{V}}_{N-1}[\overline{1, N} \setminus \{j\}](pr_2(z)) \in [0, \infty[$ и, кроме того, согласно (89), (91) $\widetilde{\mathcal{V}}_{N-1}[\overline{1, N} \setminus \{j\}](pr_2(z)) = \mathcal{V}_{N-1}(pr_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})$. Это означает, что (см. (90)) справедливо следующее равенство

$$V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x^0, pr_1(z)) + c_j(z) + \widetilde{\mathcal{V}}_{N-1}[\overline{1, N} \setminus \{j\}](pr_2(z))]. \tag{96}$$

В (96) охарактеризован финальный этап построения слоев функции Беллмана, а именно этап определения экстремума задачи по ранее построенным клеткам упомянутой функции. По аналогии с финальным этапом следует насчитывать фрагменты массива значений функции Беллмана, отвечающие клеткам. Мы ориентируемся здесь на использование общей памяти.

Предполагаемая схема распараллеливания может быть следующей. Мы, располагая $\mathbf{n}$ процессорами, где $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{n} \geq 2$, организуем при любом $s \in \overline{1, N-1}$ разбиение семейства $\mathcal{G}_s$ в сумму $\mathbf{n}$ дизъюнктных подсемейств, допуская в принципе возможность пустоты того или иного подсемейства. Сейчас, однако, будем исключать такую возможность. Итак, полагаем, что при любом $s \in \overline{1, N-1}$ у нас имеется кортеж множеств $(\mathcal{G}_i^{(s)})_{i\in\overline{1,\mathbf{n}}} : \overline{1,\mathbf{n}} \to Fin(\mathcal{G}_s)$, для которого справедливы следующие свойства:

$$\left(\mathcal{G}_s = \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{G}_i^{(s)}\right) \ \& \ \left(\mathcal{G}_{i_1}^{(s)} \cap \mathcal{G}_{i_2}^{(s)} = \emptyset \ \ \forall i_1 \in \overline{1,\mathbf{n}} \ \ \forall i_2 \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{i_1\}\right).$$

Мы предполагаем, что на s-м шаге все списки из $\mathcal{G}_1^{(s)}$ будут переданы процессору Π_1, все списки из $\mathcal{G}_2^{(s)}$ будут переданы процессору Π_2 и так далее. Это означает, что Π_1 обслуживает клетки $\mathbb{D}_s[K], K \in \mathcal{G}_1^{(s)}$, Π_2 – клетки $\mathbb{D}_s[\widetilde{K}], \widetilde{K} \in \mathcal{G}_2^{(s)}$ и так далее. В результате работы Π_1 реализуются клетки $\widetilde{\mathcal{V}}_s[K], K \in \mathcal{G}_1^{(s)}$, в результате работы Π_2 – клетки $\widetilde{\mathcal{V}}_s[\widetilde{K}], \widetilde{K} \in \mathcal{G}_2^{(s)}$ и так далее. В результате склеивания всех таких клеток получается слой $\mathcal{V}_s$ функции Беллмана. Можно, однако, считать, что в общую память передаются все же сами клетки $\widetilde{\mathcal{V}}_s[K], K \in \mathcal{G}_s$, после чего при $s < N-1$ на $(s+1)$-м шаге процессоры $\Pi_1, \ldots, \Pi_{\mathbf{n}}$ для построения клеток $\widetilde{\mathcal{V}}_{s+1}[K], K \in \mathcal{G}_{s+1}$, извлекают из ранее рассчитанных значений в клетках $\widetilde{\mathcal{V}}_s[K], K \in \mathcal{G}_s$ нужные для насчитывания слоя $\mathcal{V}_{s+1}$. При этом Π_1 осуществляет «вызов» ранее насчитанных значений для построения клеток $\widetilde{\mathcal{V}}_{s+1}[K], K \in \mathcal{G}_1^{(s)}$, Π_2 осуществляет аналогичный «вызов» для построения $\widetilde{\mathcal{V}}_{s+1}[K], K \in \mathcal{G}_2^{(s)}$ и так далее.

5. Оценки снижения вычислительной сложности в условиях предшествования

В настоящем разделе мы приведем оценки вычислительной экономии при использовании условий предшествования (1) для сокращения множества рассчитываемых значений функции Беллмана. Нас будет интересовать количество операций в МДП, которое удается сэкономить при учете одной адресной пары. Для наглядности изложения мы ограничимся задачей оптимального обхода «городов», не касаясь обобщенной постановки, связанной с обходом «мегаполисов».

Пусть требуется найти оптимальный маршрут обхода N «городов» со стартом из «базы» x^0, не принадлежащей множеству посещаемых городов. Иначе говоря, в терминах формально поставленной в предыдущих разделах задачи имеем $X = \overline{0,N}$, $x^0 = 0$, $\forall i \in \overline{1,N} \ \ \forall z \in X \times X \ \ (M_i = \{i\}) \ \& \ (c_i(z) = 0)$. Пусть, кроме того, $\mathbf{K} = \emptyset$ до тех пор, пока не будет оговорено противное. При решении такой задачи классическим методом динамического программирования требуется рекурсивно построить функцию Беллмана

$$v(x,K) = \min_{y\in K}[\mathbf{c}(x,y) + v(y, K \setminus \{y\}] \tag{97}$$

на слоях:

$$\begin{aligned} &D_0 = \{(x,\emptyset) : x \in \overline{1,N}\}, \\ &D_s = \{(x,K) \in X \times \mathfrak{N}_s \mid \ x \in \overline{1,N} \setminus K\} \ \ \forall s \in \overline{1,N-1}, \\ &D_N = \{(0,\overline{1,N})\}, \end{aligned} \tag{98}$$

где, как прежде, $\mathfrak{N}_s = \{K \in \mathfrak{N} \mid s = |K|\}$. Использование рекурсивного соотношения (97) подразумевает вычисление всех значений (97) на i-м слое до перехода к обработке $(i+1)$-го.

Оценим количество операций, производимых в ходе расчета функции (97) на множествах (98). Второй компонент упорядоченной пары (x, K) можно выбрать произвольным множеством $K, K \subset \overline{1, N}$. Если зафиксировать мощность $|K| = i$, то первый компонент можно выбрать одним из $N - i$ способов (так как $x \in \overline{1, N} \setminus K$; здесь мы пренебрегаем одноэлементным слоем D_N из (98)). Итого различных пар возможно

$$\sum_{i=0}^{N} \left[(N-i) \cdot \frac{N!}{(N-i)! \cdot i!} \right]. \tag{99}$$

Для расчета значения функции Беллмана на фиксированной паре (x, K) согласно (97) требуется вычислить минимум, затратив $|K|$ операций. Следовательно, общее количество требуемых операций составит

$$\sum_{i=0}^{N} \left[i \cdot (N-i) \cdot \frac{N!}{(N-i)! \cdot i!} \right]. \tag{100}$$

Преобразуем сумму (100), учитывая, что пределы суммирования в ней можно заменить на $1 \le i \le N-1$ (действительно, слоем D_N мы пренебрегли ранее, а на слое D_0 функция Беллмана предполагается тождественной нулю: ограничимся сейчас случаем, когда $\mathbf{f}$ тождественно равна нулю):

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{i \cdot (N-i) \cdot N!}{(N-i)! \cdot i!} \right] \overset{j \triangleq i-1}{=} N(N-1) \sum_{j=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-j)! \cdot j!} = N(N-1)2^{N-2}. \tag{101}$$

Рассмотрим теперь влияние условий предшествования на количество операций (см. (101)), требующихся в ходе применения МДП к сформулированной в начале раздела транспортной задаче. Пусть для простоты задана одна адресная пара $(a, b) \in \mathbf{K}$, то есть в результирующем оптимальном маршруте элемент a должен быть посещен прежде элемента b.

Оператор $\mathbf{I}$, определенный в (11) и отвечающий за ограничение множества вычисляемых значений функции Беллмана, по существу выбрасывает из расчета по общей схеме (97) следующие значения:

$$\begin{gathered} \forall K \in Fin(\overline{1, N}), \quad a, b \in K, \quad \forall x \in \overline{1, N} \setminus K \\ \mathbf{c}(x, b) + v(b, K \setminus \{b\}), \end{gathered} \tag{102}$$

соответствующие содержательно «входу в множество K», которое содержит «отправителя», «через получателя», и, таким образом, гарантированно нарушающие условия предшествования. Ранее в работах [8–11] подробно показана корректность применения оператора $\mathbf{I}$ в методе динамического программирования при решении маршрутной задачи с условиями предшествования. Здесь мы не станем на этом останавливаться.

Необходимым условием отбрасывания конструкций типа (102) является $a, b \in K$, поэтому мы можем однозначно записать всякое подмножество K из (102) в виде $K = K' \cup \{a\} \cup \{b\}$, где $K' \subset \overline{1, N} \setminus \{a, b\}$. Мощность K' может варьироваться от 0 до $N-2$. Для всякого $i = \overline{0, N-2}$ выпишем количество различных подмножеств $K' \subset \overline{1, N} \setminus \{a, b\} : |K'| = i$

$$C^i_{N-2} = \frac{(N-2)!}{(N-2-i)! \cdot i!}. \tag{103}$$

Заметим далее, что всякой такой паре $(b, K \setminus \{b\}) = (b, K' \cup \{a\})$ из (102) соответствует $|\overline{1, N} \setminus (K' \cup \{a\} \cup \{b\})| = N-2-i$ возможных значений x. Следовательно, каждому из подмножеств, перечисленных в (103), соответствует $N-i-2$ значений x. Суммируя по i, окончательно имеем следующее количество выбрасываемых в условии (102) фрагментов вида $\mathbf{c}(x, b) + v(b, K \setminus \{b\})$:

$$\sum_{i=0}^{N-2} \left[(N-2-i) \cdot \frac{(N-2)!}{(N-2-i)! \cdot i!} \right]. \tag{104}$$

Расписывая сумму (104), складывая k-й и $(N-k)$-й члены и учитывая, что $C^k_N = C^{N-k}_N$, имеем:

$$\left[\frac{(N-2)(N-2)!}{(N-2)! \cdot 0!} + \frac{0 \cdot (N-2)!}{0! \cdot (N-2)!} \right] + \left[\frac{(N-3)(N-2)!}{(N-3)! \cdot 1!} + \frac{1 \cdot (N-2)!}{1! \cdot (N-3)!} \right] + \ldots; \tag{105}$$

«распределяя $(N-2)$ поровну» между каждыми двумя слагаемыми внутри каждой квадратной скобки, сумму (105) можно записать как

$$\frac{N-2}{2} \left[\frac{(N-2)!}{(N-2)! \cdot 0!} + \frac{(N-2)!}{0! \cdot (N-2)!} \right] + \frac{N-2}{2} \left[\frac{(N-2)!}{(N-3)! \cdot 1!} + \frac{(N-2)!}{1! \cdot (N-3)!} \right] + \ldots$$

или

$$\sum_{i=0}^{N-2} \left[\frac{N-2}{2} \cdot \frac{(N-2)!}{(N-2-i)! \cdot i!} \right] = \frac{N-2}{2} \cdot 2^{N-2}.$$

Если условия предшествования заданы более чем одной адресной парой, то при некоторых обстоятельствах влияния каждой адресной пары на уменьшение области рассчитываемых значений функции Беллмана могут перекрываться. Отметим без доказательства, что если две адресные пары отличаются как минимум вторыми компонентами, то каждая из этих адресных пар влечет уменьшение области расчетов на величину $\frac{N-2}{2} \cdot 2^{N-2}$. Исследования структуры функции Беллмана в случае сложных перекрытий адресных пар станет предметом будущей работы.

Полученные оценки можно использовать для ответа на различные вопросы прикладного характера. Например, сокращения времени решения транспортной задачи с помощью метода динамического программирования в два раза можно добиться введением x адресных пар, не пересекающихся по второй компоненте, где

$$\frac{N \cdot (N-1) \cdot 2^{N-2}}{2} = x \cdot \frac{N-2}{2} \cdot 2^{N-2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{N(N-1)}{N-2} \approx N.$$

Заметим без доказательства, что для прикладных целей отбрасывание значений вида (102) эквивалентно по сути следующему изменению в процессе расчета множества значений функции Беллмана

$$v(x,K)=\begin{cases}\mathfrak{M} & \text{если } x=b, a\in K,\\ \min\limits_{y\in K}\{\mathbf{c}(x,y)+v(y,K\setminus\{y\}\} & \text{иначе,}\end{cases} \tag{106}$$

где $\mathfrak{M}$ – некоторое достаточно большое число, например $\mathfrak{M}=\sum_{i,j\in\overline{1,N}}|d(i,j)|$. Действительно, в (106) мы, как и в (102), не учитываем (за счет штрафа $\mathfrak{M}$) состояния, для которых «вход в» множество K, содержащее a, происходит «через» b.

6. Вычислительный эксперимент

В настоящем разделе рассматривается решение конкретных вариантов задачи маршрутизации на плоскости с использованием МВС "Уран". Итак, в качестве множества X раздела 2 здесь будем использовать плоскость: X = $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. В качестве x^0 используем плоский вектор: x^0 = (5.69479,37.94233). Функцию $\mathbf{c}$ в (6) определяем посредством евклидова расстояния на плоскости $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, функцию $\mathbf{f}$ полагаем тождественно равной нулю. Функции $c_1,\ldots,c_N$ определяем здесь подобно [8], а именно: при заданных номере i, точках $x'\in M_i$ и $x''\in M_i$ значение $c_i(x',x'')$ определяем в виде суммы двух евклидовых расстояний:

$$c_i(x',x'')\triangleq\mathbf{c}(x',a^{(i)})+\mathbf{c}(x'',a^{(i)}), \tag{107}$$

где $\mathrm{a}^{(i)}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ есть некоторая точка, присоединенная к M_i (не требуется, однако, чтобы выполнялось включение $a_i\in M_i$). Итак, к множеству M_1 добавляется точка $a^{(1)}$, к множеству M_2 – точка $a^{(2)}$ и т.д. Содержательный смысл такого определения c_i может состоять в следующем ($i\in\overline{1,N}$); точки M_i определяют входы-выходы в некоторое помещение, в котором исполнителю требуется добраться до некоторого управляющего устройства, находящегося в точке $a^{(i)}=(a_1^{(i)},a_2^{(i)})$; ему требуется установить тот или иной режим работы этого устройства и продолжить свое движение далее (исполнитель входит в помещение через "порт прибытия" $x'\in M_i$, перемещается из x' в $a^{(i)}$, выполняет требуемую операцию, находясь в точке $a^{(i)}$, а затем покидает помещение через "порт отправления" x''). Будем полагать в данном разделе N=27. Кроме того, полагаем, что все множества M_i имеют одно и то же количество элементов (количество входов-выходов), а именно полагаем в дальнейшем $|M_i|$=30. Точки $a^{(i)}, i\in\overline{1,27}$, определяются следующим образом:

$a^1=(46.00918,87.46002), a^2=(94.12513,66.74764), a^3=(44.50211,83.67816),$
$a^4=(21.34087,67.88701), a^5=(21.45435,84.98424), a^6=(90.33001,99.36852),$
$a^7=(19.12136,8.54338), a^8=(12.86872,95.88475), a^9=(43.21641,11.49531),$
$a^{10}=(7.96647,46.77153), a^{11}=(10.73506,56.39213), a^{12}=(51.51652,17.36506),$
$a^{13}=(16.69707,87.68238), a^{14}=(18.63115,28.03969), a^{15}=(7.19177,97.33971),$
$a^{16}=(39.74461,53.20094), a^{17}=(84.79972,33.86974), a^{18}=(19.94858,29.30183),$
$a^{19}=(17.54791,41.28945), a^{20}=(97.18882,39.00224), a^{21}=(26.27369,87.51884),$

$a^{22} = (38.37076, 45.39505), a^{23} = (96.06221, 51.23948), a^{24} = (41.27981, 39.77867),$
$a^{25} = (62.73479, 49.24628), a^{26} = (86.05015, 73.46985), a^{27} = (69.25482, 93.54151).$

Рассматривается два варианта $\mathbf{K}$: 1) $\mathbf{K} = \emptyset$ (отсутствуют условия предшествования); 2) $\mathbf{K}$ – десятиэлементное множество (имеется в виду случай десяти адресных пар).

С целью практической проверки теоретической работы была написана программа для МВС "Уран" на языке программирования C++. Программа работает в среде 64-разрядной операционной системы семейства Linux. Вычислительный эксперимент проводился на супервычислителе "Уран" с процессорной мощностью 1664 вычислительных ядра и 3584 Гбайт оперативной памяти. На данном МВС используются вычислительные модули на основе двухпроцессорных блейд-серверов HP ProLiant BL460c CTO Blade со следующими характеристиками:

- два 4-ядерных процессора Intel® Xeon® E5450 (3.0 GHz, 1333 FSB,80W);
- кэш-память 2 x 6 MB Level 2 cache (5400 Sequence);
- оперативная память 2 GB PC2-5300, Registered DDR2-667 на ядро;
- сетевой адаптер Dual 1GbE NC326i additional 10/100 NIC dedicated to iLO 2;
- контроллер дисков Embedded SATA;
- жесткие диски HDD 90GB Non-Hot Plug SFF SATA.

В нашем эксперименте было использовано 8 вычислительных ядер с общей оперативной памятью 16 Гбайт.

1) Рассмотрим решение плоской задачи маршрутизации без условий предшествования: полагаем в данном пункте $\mathbf{K} = \emptyset$. Что касается построения целевых множеств $M_1, \ldots, M_{27}$, то их точки формировались всякий раз случайным образом в пределах кольца, определяемого двумя окружностями (радиусы 1 и 3) с центром в точках $a^{(1)}, \ldots, a^{(27)}$ соответственно (напомним, что каждое из множеств $M_i, i \in \overline{1, 27}$, тридцатиэлементно).

В результате вычислений был найден маршрут: $(i_1 = 10, i_2 = 11, i_3 = 4, i_4 = 19, i_5 = 18, i_6 = 14, i_7 = 7, i_8 = 9, i_9 = 12, i_{10} = 24, i_{11} = 22, i_{12} = 16, i_{13} = 25, i_{14} = 17, i_{15} = 20, i_{16} = 23, i_{17} = 2, i_{18} = 26, i_{19} = 6, i_{20} = 27, i_{21} = 1, i_{22} = 3, i_{23} = 21, i_{24} = 5, i_{25} = 13, i_{26} = 8, i_{27} = 15)$.

По соображениям объема последовательность портов прибытия и отправления не приводится (см. рис. 1).

Были получены следующие результаты: V=392.152501 (экстремум задачи), время счета 3258 секунд.

2) Рассмотрим решение основной задачи в случае десятиэлементного множества $\mathbf{K}$, определяющего условия предшествования. Соответствующие адресные пары имеют вид: (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,8), (2,9), (2,10), (2,11), (2,12). Множества $M_1, \ldots, M_{27}$ формировались тем же способом, что и в случае 1).

В результате вычислений был получен следующий маршрут: $(j_1 = 19, j_2 = 24, j_3 = 22, j_4 = 16, j_5 = 1, j_6 = 3, j_7 = 27, j_8 = 6, j_9 = 26, j_{10} = 2, j_{11} = 23, j_{12} = 20, j_{13} = 17, j_{14} = 25, j_{15} = 12, j_{16} = 9, j_{17} = 7, j_{18} = 14, j_{19} = 18, j_{20} = 10, j_{21} = 11, j_{22} = 4, j_{23} = 21, j_{24} = 5, j_{25} = 13, j_{26} = 8, j_{27} = 15$.

Конкретный вид полученной трассы посещения множеств приведен на рис. 2.

Были получены следующие результаты: V=426,56746, время счета 2574 секунд.

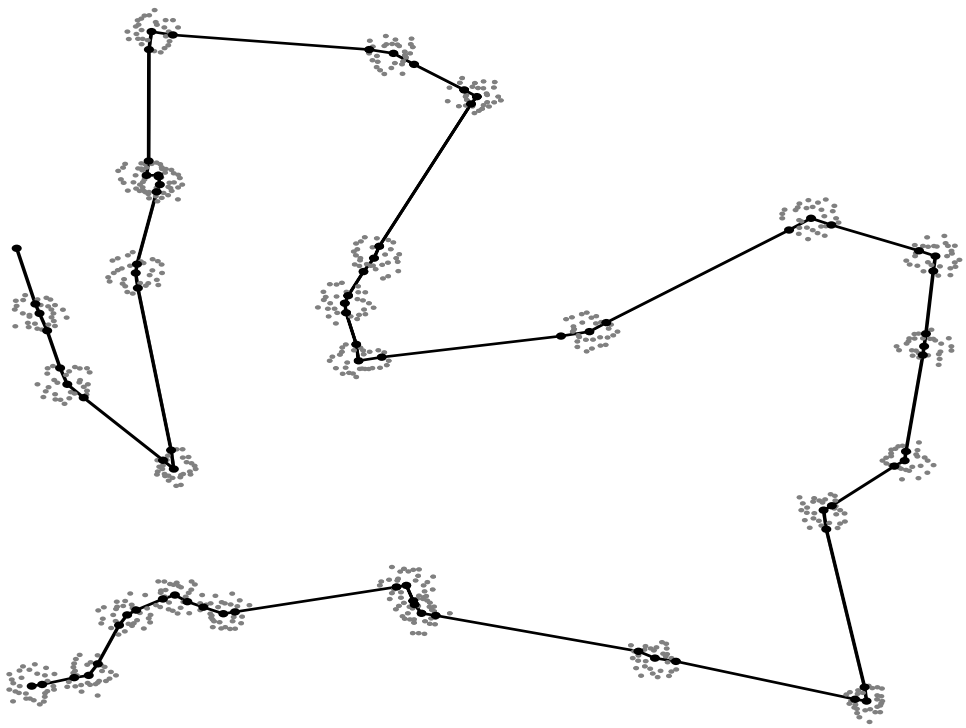

Рис. 1.

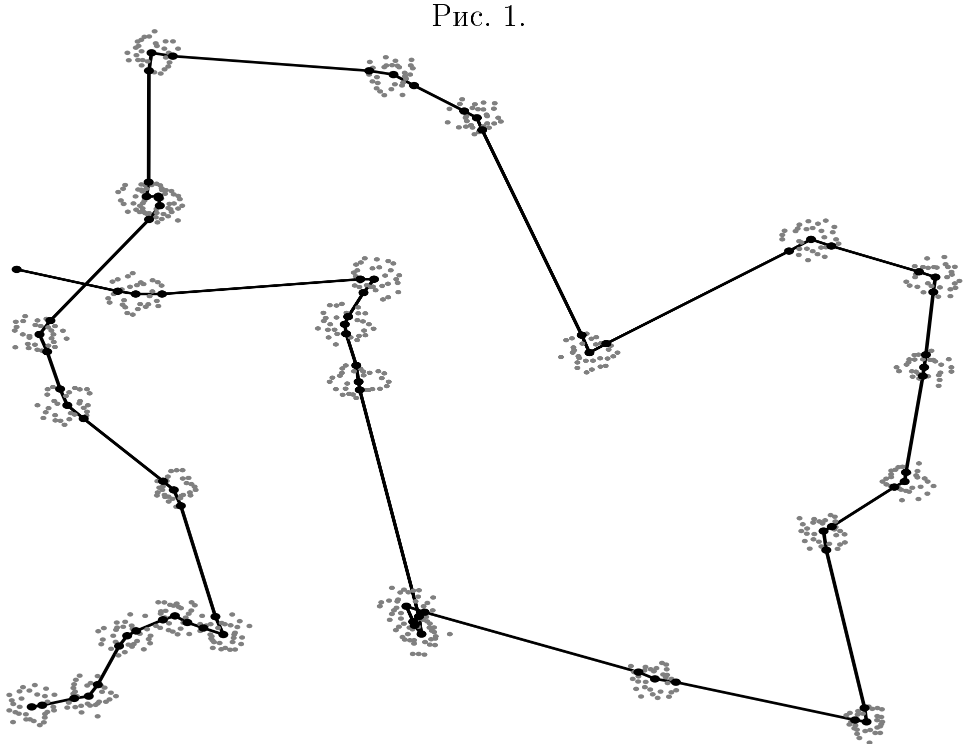

Рис. 2.

Заметим, кроме того, что посещение "отправителей" и "получателей" адресных пар происходило следующим образом: $(1,3) = (j_5, j_{10}), (1,4) = (j_5, j_{22}), (1,5) = (j_5, j_{24}), (1,6) = (j_5, j_8), (1,7) = (j_5, j_{17}), (2,8) = (j_{10}, j_{26}), (2,9) = (j_{10}, j_{16}), (2,10) = (j_{10}, j_{20}), (2,11) = (j_{10}, j_{21}), (2,12) = (j_{10}, j_{15})$.

Список литературы

1. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. №9. С. 3–34.

2. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. №10. С. 3–29.

3. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. №11. С. 3–26.

4. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.

5. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.

6. Сергеев С.И. Гибридные системы управления и динамическая задача коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 2008. №1. С. 45–54.

7. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. М.: Наука, 2007. С. 304.

8. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т.14, №3. С. 183–200.

9. Ченцов А.Г. Об оптимальной маршрутизации в условиях ограничений // Доклады Академии Наук. 2008. Т.423, №3. С. 303–307.

10. Ченцов, А. Г. Метод динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации с ограничениями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. №3. С. 52–66.

11. Ченцов А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями и внутренними потерями // Известия вузов. Математика. 2010. № 6. С. 64-–81.

12. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевский институт компьютерных исследований. 2008. 240 с.

13. Коротаева Л. Н., Сесекин А. Н., Ченцов А.Г. Об одной модификации метода динамического программирования в задаче последовательного сближения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 8. С. 1107–1113.

14. Коротаева Л. Н., Назаров Э. М., Ченцов А. Г. Об одной задаче о назначениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 4. С. 483–494.

15. Ченцов А. А., Ченцов А. Г. О решении задачи маршрутной оптимизации методом динамического программирования // Автоматика и телемеханика. 1998. № 9. С. 117–129.

16. Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Маршрутизация с условиями предшествования (задача курьера): метод динамического программирования // Вестник УГТУ–УПИ. Екатеринбург, 2004. Ч. 1. №15 (45). С. 148–152.

17. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир. 1970. 416 с.

18. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2000. 960 с.

19. Сесекин А. Н., Ташлыков О. Л., Щеклеин С. Е., Куклин М. Ю., Ченцов А. Г., Кадников А. А. Использование метода динамического программирования для оптимизации траектории перемещения работников в радиационно опасных зонах с целью минимизации облучения // Известия вузов. Ядерная энергетика. 2006. № 2. С. 41–48.

20. Ташлыков О. Л., Сесекин А. Н., Ченцов А. Г., Щеклеин С. Е., Балушкин Ф. А., Хомяков А. П. Возможности математических методов моделирования в решении проблемы облучаемости персонала // Вопросы радиационной безопасности. 2009. № 4. С. 39–49.

21. Ташлыков О. Л., Сесекин А. Н., Щеклеин С. Е., Ченцов А. Г. Разработка оптимальных алгоритмов вывода АЭС из эксплуатации с использованием методов математического моделирования // Известия вузов. Ядерная энергетика. 2009. № 2. С. 115–120.

Dynamic Programming in a Generalized Courier Problem with Inner Tasks: Elements of a Parallel Structure

Grigoriev A.M., Ivanko E.E., Chentsov A.G.

Keywords: route, trace, precedence condition

In the article we concern the questions connected with the realization of a dynamic programming method in problems of consequent visiting of megapolises. The realization is complicated by precedence conditions and works inside the megapolises. The scheme for constructing a reduced (partial) array of Bellman function values using parallel computing without loss in accuracy is suggested. This procedure is realized on a multiprocessor computing system; parallelizing is performed at the stage of Bellman function layers construction.

Сведения об авторах:
Григорьев Алексей Михайлович,
Институт математики и механики УрО РАН,
руководитель группы отдела вычислительных сетей;
Иванко Евгений Евгеньевич,
Институт математики и механики УрО РАН,
канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. отдела управляемых систем;
Ченцов Александр Георгиевич,
Институт математики и механики УрО РАН,
чл.-корр. РАН, заведующий отделом управляемых систем.