Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **3** (2014) 5–34

УДК 517.929

Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. I[1]

Нестеров П.Н.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: nesterov.pn@gmail.com

получена 14 февраля 2014

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, критическое многообразие, асимптотическое интегрирование.

В работе исследуется задача асимптотического интегрирования некоторого класса линейных систем функционально-дифференциальных уравнений в окрестности бесконечности. Изучается вопрос о построении асимптотики решений указанных систем в критическом случае. С помощью идеологии метода центральных многообразий нами показано существование так называемого критического многообразия, положительно инвариантного относительно траекторий исходной системы. Установлено, что асимптотика решений системы на данном многообразии описывает в главном асимптотику всех решений исходной системы. В первой части работы предложен алгоритм приближенного построения критического многообразия. Кроме того, обоснована однозначная разрешимость возникающих в ходе реализации этой процедуры вспомогательных алгебраических задач.

1. Постановка задачи

В работе изучается вопрос о построении асимптотики при $t \to \infty$ решений следующей системы функционально-дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = B_0 x_t + G(t, x_t). \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{C}^m$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-h \le \theta \le 0)$ — элемент пространства $C_h \equiv C\big([-h,0],\mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$. Далее, B_0 —

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-80.2013.1 и проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (задание № 1.1875.2014/К).

линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ и не зависящий от t, а оператор $G(t, x_t)$ допускает представление в виде

$$G(t, x_t) = B(t, x_t) + R(t, x_t). \tag{2}$$

В этой формуле $B(t, \cdot)$ и $R(t, \cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$ такие, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$ функции $B(t, \varphi)$ и $R(t, \varphi)$ измеримы по Лебегу при $t \geq t_0$ и, кроме того,

$$|R(t, \varphi)| \leq \gamma(t)\|\varphi\|_{C_h}, \quad \gamma(t) \in L_1[t_0, \infty) \quad \Big(\|\varphi\|_{C_h} = \sup_{-h\leq\theta\leq 0} |\varphi(\theta)|\Big). \tag{3}$$

Более детально структуру оператора $B(t, \cdot)$ мы опишем чуть позднее. Здесь отметим лишь, что для любого $\varphi \in C_h$ вектор-функция $B(\cdot, \varphi)$ убывает, вообще говоря, колебательным образом при $t \to \infty$.

Данная работа во многом продолжает наши исследования вопроса асимптотического интегрирования систем вида (1), начатые в работе [19] (см. также [2]). В отмеченных работах был изучен случай нулевого оператора B_0. Функционально-дифференциальные системы уравнений типа (1) с линейными, а также нелинейными операторами в правой части, рассматриваемые как возмущения линейной автономной системы

$$\dot{x} = B_0 x_t, \tag{4}$$

изучались многими авторами. Отметим, в частности, цикл работ O. Arino, I. Győri и M. Pituk [8, 9, 12, 20–22], а также работы [6, 7, 14–16]. Заметим, что первые асимптотические теоремы для скалярных уравнений с запаздывающим аргументом вида (1) были предложены R. Bellman и K.L. Cooke [1] (см. также обзор в [5, Глава 9]).

Основное предположение, при котором система (1) рассматривается в данной работе, состоит в следующем. Характеристическое уравнение

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \qquad \Delta(\lambda) = \lambda I - B_0(e^{\lambda \cdot} I), \tag{5}$$

имеет N корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ на мнимой оси с учетом их кратностей, а вещественные части остальных корней отрицательны. Данное обстоятельство позволяет для асимптотического интегрирования системы (1) воспользоваться идеологией известного метода центральных многообразий (см. [7, 10, 11, 13]). Адаптации этого метода к задаче асимптотического интегрирования системы (1) и посвящена данная работа. Существенная роль при этом отводится технике, развитой в [3] применительно к задаче асимптотического интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами.

Работа состоит из двух частей. В первой части предложен алгоритм приближенного построения так называемого критического многообразия в фазовом пространстве C_h, положительно инвариантного при достаточно больших t относительно траекторий $x_t(\theta)$ системы (1). Как оказывается, динамика всех решений системы (1) определяется в главном динамикой траекторий $x_t(\theta)$ на критическом многообразии. Основные теоремы, описывающие свойства данного многообразия, будут сформулированы и доказаны во второй части работы.

2. Вспомогательные сведения

Излагаемые в данном разделе сведения могут быть найдены, например, в монографии [5] (см. также [17, 18]).

Говорят, что некоторая функция $x(t)$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ удовлетворяет системе (1) при $t \geq T$, если $x(t)$ непрерывна на множестве $[T-h, \infty)$, абсолютно непрерывна на множестве $[T, \infty)$ и равенство (1) выполнено почти всюду на $[T, \infty)$. При сформулированных условиях относительно операторов в правой части (1) для любого $\varphi \in C_h$ и любого $T \geq t_0$ существует единственная функция $x(t)$, которая удовлетворяет системе (1) с начальным условием $x_T = \varphi$. Функцию $x(t)$ называют решением системы (1) с начальным условием $x_T = \varphi$.

Известно, что линейная автономная система (4) для $t \geq 0$ порождает в C_h сильно непрерывную полугруппу операторов $T(t) : C_h \to C_h$. Оператор $T(t)$, называемый оператором сдвига вдоль траекторий системы (4), определяется следующим образом: $T(t)\varphi = x_t^{\varphi}(\theta)$, где $\varphi \in C_h$ и $x_t^{\varphi}(\theta)$ — решение системы (4) с начальным условием $x_0^{\varphi}(\theta) = \varphi(\theta)$. Инфинитезимальный производящий оператор A этой полугруппы задается равенством $A\varphi = \varphi'(\theta)$, где $\varphi \in D(A)$. Область определения оператора A

$$D(A) = \left\{\varphi \in C_h \;\middle|\; \varphi'(\theta) \in C_h,\;\; \varphi'(0) = B_0\varphi\right\}$$

плотна в C_h. Имеют место следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}T(t)\varphi = T(t)A\varphi = AT(t)\varphi, \qquad \varphi \in D(A). \tag{6}$$

В дальнейшем нам удобно будет использовать представление Рисса для оператора B_0:

$$B_0\varphi = \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta)\varphi(\theta), \tag{7}$$

где $(m \times m)$-матричная функция $\eta(\theta)$ имеет ограниченную вариацию на $[-h, 0]$. Представление (7) позволяет получить следующие выражения для матрицы $\Delta(\lambda)$ из (5), а также ее производных:

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta)e^{\lambda\theta}, \quad \Delta'(\lambda) = I - \int\limits_{-h}^{0} \theta d\eta(\theta)e^{\lambda\theta},$$

$$\Delta^{(j)}(\lambda) = -\int\limits_{-h}^{0} \theta^j d\eta(\theta)e^{\lambda\theta}, \quad j \geq 2. \tag{8}$$

С системой (4) можно связать так называемую формально сопряженную систему

$$\dot{y} = -\int\limits_{-h}^{0} y(t-\theta)d\eta(\theta), \tag{9}$$

где $y(t)$ — комплекснозначная вектор-строка длины m. Фазовым пространством для системы (9) является множество $C'_h \equiv C\big([0,h],\mathbb{C}^{m*}\big)$, где $\mathbb{C}^{m*}$ — пространство вектор-строк длины m. Для любых $\psi \in C'_h$ и $\varphi \in C_h$ определим билинейную форму

$$\big(\psi(\xi),\varphi(\theta)\big) = \psi(0)\varphi(0) - \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta} \psi(\xi-\theta)d\eta(\theta)\varphi(\xi)d\xi. \tag{10}$$

Пусть

$$\Lambda = \big\{\lambda_i \in \mathbb{C} \;\big|\; \det\Delta(\lambda_i) = 0,\ i = 1,\dots,N\big\}, \tag{11}$$

тогда пространство C_h можно разложить в прямую сумму двух подпространств

$$C_h = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda. \tag{12}$$

Здесь P_Λ — прямая сумма обобщенных собственных подпространств оператора A, отвечающих собственным значениям из Λ, а Q_Λ — некоторое дополнительное пространство такое, что $T(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda$. Для того чтобы охарактеризовать эти подпространства более точно, определим $(m\times N)$-матрицу $\Phi(\theta)$, по столбцам которой расположены обобщенные собственные функции $\varphi_1(\theta),\dots,\varphi_N(\theta)$ оператора A, отвечающие собственным числам из Λ. Таким образом, столбцы матрицы $\Phi(\theta)$ образуют базис подпространства P_Λ. Далее, пусть $\Psi(\xi)$ — $(N\times m)$-матрица, по строкам которой расположены базисные функции $\psi_1(\xi),\dots,\psi_N(\xi)$ прямой суммы обобщенных собственных подпространств P_Λ^T оператора A^*, формально сопряженного к A относительно билинейной формы (10). Матрицы $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\xi)$ могут быть выбраны таким образом, что

$$\big(\Psi(\xi),\Phi(\theta)\big) = \big\{\big(\psi_i(\xi),\varphi_j(\theta)\big)\big\}_{1\le i,j\le N} = I. \tag{13}$$

Поскольку $\Phi(\theta)$ — базис P_Λ и $AP_\Lambda \subseteq P_\Lambda$, то существует такая $(N\times N)$-матрица D, спектром которой является множество Λ, что $A\Phi(\theta) = \Phi(\theta)D$. Тогда, учитывая определение оператора A, а также соотношения (6), имеем

$$\Phi(\theta) = \Phi(0)e^{D\theta}, \qquad T(t)\Phi(\theta) = \Phi(\theta)e^{Dt} = \Phi(0)e^{D(t+\theta)}, \tag{14}$$

где $-h \le \theta \le 0$ и $t \ge 0$. Аналогично для матрицы $\Psi(\xi)$ получаем

$$\Psi(\xi) = e^{-D\xi}\Psi(0), \tag{15}$$

где $0 \le \xi \le h$. Матрицы $\Phi(0)$ и $\Psi(0)$ выбираются из следующих соображений. Столбцы матрицы $\Phi(\theta)$ являются обобщенными собственными векторами инфинитезимального производящего оператора A, а следовательно, они принадлежат $D(A)$. Значит,

$$\Phi'(0) = \Phi(0)D = B_0\Phi = \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta)\Phi(0)e^{D\theta}. \tag{16}$$

Аналогично, учитывая (9) и (15), выводим

$$\Psi'(0) = -D\Psi(0) = -\int\limits_{-h}^{0} e^{D\theta}\Psi(0)d\eta(\theta). \tag{17}$$

Возвращаясь теперь к разложению (12), мы можем описать пространства P_Λ и Q_Λ следующим образом:

$$\begin{aligned} P_\Lambda &= \bigl\{\varphi \in C_h \bigm| \varphi(\theta) = \Phi(\theta)a,\ a \in \mathbb{C}^N\bigr\}, \\ Q_\Lambda &= \bigl\{\varphi \in C_h \bigm| (\Psi, \varphi) = 0\bigr\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Пусть $x_t(\theta)$ — решение системы (1) с начальным условием $x_{t_0} = \varphi$. Имеет место так называемая формула вариации произвольных постоянных (см. [17]):

$$x_t(\theta) = T(t-t_0)\varphi + \int\limits_{t_0}^{t} dK(t,s)G(s,x_s)ds, \qquad t \geq t_0. \tag{19}$$

Здесь $(m \times m)$-матрица $K(t,\cdot) : [t_0, t] \to C_h$ задается формулой

$$K(t,s)(\theta) = \int\limits_{t_0}^{s} X(t+\theta-\alpha)d\alpha, \tag{20}$$

где $X(t)$ — единственное матричное решение системы (4) с начальным условием при $t = 0$, определяемым формулой

$$X_0(\theta) = \begin{cases} I, & \theta = 0, \\ 0, & -h \leq \theta < 0. \end{cases} \tag{21}$$

Формуле (19) можно придать формальный вид (см. [5])

$$x_t(\theta) = T(t-t_0)\varphi + \int\limits_{t_0}^{t} T(t-s)X_0(\theta)G(s,x_s)ds, \qquad t \geq t_0, \tag{22}$$

где $T(t-s)X_0(\theta) = X(t+\theta-s)$.

Разложим теперь решение $x_t(\theta)$ системы (1) с начальным условием $x_{t_0} = \varphi$, используя представление (12). Тогда с учетом (19) получаем

$$x_t(\theta) = x_t^{P_\Lambda} + x_t^{Q_\Lambda}, \quad \varphi(\theta) = \varphi^{P_\Lambda} + \varphi^{Q_\Lambda}, \tag{23}$$

$$x_t^{P_\Lambda}(\theta) = T(t-t_0)\varphi^{P_\Lambda} + \int\limits_{t_0}^{t} T(t-s)X_0^{P_\Lambda}(\theta)G(s,x_s)ds, \tag{24}$$

$$x_t^{Q_\Lambda}(\theta) = T(t-t_0)\varphi^{Q_\Lambda} + \int\limits_{t_0}^{t} d\bigl[K(t,s)^{Q_\Lambda}\bigr]G(s,x_s)ds, \tag{25}$$

где $t \geq t_0$ и

$$X_0^{P_\Lambda}(\theta) = \Phi(\theta)\Psi(0), \quad K(t,s)^{Q_\Lambda} = K(t,s) - \Phi(\theta)\bigl(\Psi, K(t,s)\bigr). \tag{26}$$

Осуществляя разложение (23) в формуле (22), заключаем, что справедливы представления, аналогичные (24), (25) с заменой представления (25) на следующее:

$$x_t^{Q_\Lambda}(\theta) = T(t-t_0)\varphi^{Q_\Lambda} + \int_{t_0}^{t} T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)G(s,x_s)ds, \tag{27}$$

где $X_0^{Q_\Lambda} = X_0(\theta) - X_0^{P_\Lambda}(\theta)$. Представлением (27), как правило, удобнее пользоваться при вычислениях. Положим

$$x_t^{P_\Lambda}(\theta) = \Phi(\theta)u(t), \qquad u(t) \in \mathbb{C}^N, \tag{28}$$

тогда $u(t) = (\Psi, x_t)$ и, кроме того, функция $u(t)$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = Du + \Psi(0)G(t,x_t), \qquad t \ge t_0 \tag{29}$$

с начальным условием $u(t_0) = (\Psi, \varphi)$.

3. Построение критического многообразия

Начнем этот раздел с того, что уточним вид оператора $B(t,\varphi)$ в формуле (2). Пусть

$$B(t,\varphi) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)B_i(t,\varphi) + \sum_{1\le i_1 \le i_2 \le n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)B_{i_1 i_2}(t,\varphi) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le \ldots \le i_k \le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)B_{i_1\ldots i_k}(t,\varphi), \qquad \varphi \in C_h. \tag{30}$$

Здесь $B_{i_1\ldots i_l}(t,\cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из пространства C_h в пространство $\mathbb{C}^m$, относительно которых предполагается, что

$$B_{i_1\ldots i_l}(t,\varphi) = \sum_{j=1}^{L} \Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t)\ell_j^{(i_1\ldots i_l)}(\varphi), \qquad \varphi \in C_h. \tag{31}$$

В формуле выше $\ell_j^{(i_1\ldots i_l)}(\varphi)$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t и действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$, а $\Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т.е.

$$\Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t) = \sum_{s=1}^{M} \beta_{sj}^{(i_1\ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\omega_s t}, \tag{32}$$

где $\beta_{sj}^{(i_1\ldots i_l)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные $(m\times m)$-матрицы, а ω_s — вещественные числа. Наконец, $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции такие, что

1^0. $v_1(t)\to 0, v_2(t)\to 0,\ldots,v_n(t)\to 0$ при $t\to\infty$;

2^0. $\dot{v}_1(t),\dot{v}_2(t),\ldots,\dot{v}_n(t) \in L_1[t_0,\infty)$;

3^0. Найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\dots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1[t_0,\infty)$ для любого набора $1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_{k+1} \le n$.

Определим множество Λ согласно (11), дополнительно предположив, что:

$\mathbf{H_1}$. $\operatorname{Re}\lambda = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$;

$\mathbf{H_2}$. Множество Λ совпадает со множеством

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \det\Delta(\lambda) = 0,\ \operatorname{Re}\lambda > \beta\right\} \tag{33}$$

для некоторого $\beta < 0$.

Заметим, что если гипотезы $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$ не выполнены, то в исходной системе (1) можно осуществить замену переменной, положив $x(t) = y(t)e^{dt}$, где

$$d = \sup\left\{\operatorname{Re}\lambda \;\middle|\; \det\Delta(\lambda) = 0\right\}.$$

Преобразованная система будет иметь ту же структуру, что и исходная, и, кроме того, в ней будут выполнены гипотезы $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$.

Разложим пространство C_h по Λ в прямую сумму (12).

Определение 1. *Будем говорить, что множество (линейное пространство) $\mathcal{W}(t) \subset C_h$ при $t \ge t_* \ge t_0$ является критическим многообразием для системы* (1)*, если выполнены следующие условия:*

1. Существует $(m \times N)$-матрица $H(t,\theta)$ непрерывная по $t \ge t_*$ и $\theta \in [-h,0]$ такая, что ее столбцы принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \ge t_*$ и, кроме того, $\|H(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$, где

$$\|H(t,\cdot)\|_{C_h} = \sup_{-h\le\theta\le 0} |H(t,\theta)|$$

и $|\cdot|$ — некоторая матричная норма в пространстве $(m \times N)$-матриц;

2. Множество $\mathcal{W}(t)$ для $t \ge t_*$ задается формулой

$$\mathcal{W}(t) = \Big\{\varphi(\theta) \in C_h \;\Big|\; \varphi(\theta) = \Phi(\theta)u + H(t,\theta)u,\ u \in \mathbb{C}^N\Big\}, \tag{34}$$

где столбцы $(m \times N)$-матрицы $\Phi(\theta)$ образуют базис в пространстве P_Λ из (12)*;*

3. Множество $\mathcal{W}(t)$ при $t \ge t_*$ положительно инвариантно относительно траекторий системы (1)*, т.е. если $x_T \in \mathcal{W}(T)$, $T \ge t_*$, то $x_t \in \mathcal{W}(t)$ для всех $t \ge T$.*

Будем далее предполагать, что критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ для системы (1) существует при достаточно больших t. Вопрос, связанный с существованием этого многообразия, обсуждается во второй части нашей работы. Алгоритм, описанный ниже, во многом совпадает со схемой построения приближения для центрального многообразия в нелинейных системах функционально-дифференциальных уравнений (см., например, [7]). Далее мы предложим метод построения в некотором смысле главной части матрицы $H(t,\theta)$ из (34).

Пусть $x(t)$ — решение системы (1) с начальным условием при $t = T \ge t_* \ge t_0$. Тогда при $t+\theta \ge T$ справедливы равенства

$$\frac{d}{dt}x_t(\theta) = \begin{cases} \dfrac{d}{d\theta}x_t(\theta), & -h \le \theta < 0, \\ B_0x_t + G(t,x_t), & \theta = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Предположим, что в начальный момент $t = T$ вектор-функция $x_T(\theta)$ принадлежит многообразию $\mathcal{W}(T)$. В силу положительной инвариантности $\mathcal{W}(t)$ имеем

$$x_t(\theta) = \Phi(\theta)u(t) + H(t,\theta)u(t), \qquad t \geq T, \quad u(t) \in \mathbb{C}^N. \tag{36}$$

Заметим, что формула (36) представляет собой разложение (23) и, следовательно, функция $u(t)$ в силу (29) удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = \Big[D + \Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\Big]u, \qquad t \geq T. \tag{37}$$

Эту систему будем называть проекцией системы (1) на критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ или, короче, системой на критическом многообразии. Подставим разложение (36) в (35). Получим при $t + \theta \geq T$

$$\big(\Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\dot{u}(t) + \frac{\partial H}{\partial t}u = \begin{cases} \Big[\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \dfrac{\partial H}{\partial \theta}\Big]u, & -h \leq \theta < 0, \\ \big[B_0\Phi + B_0 H + G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\big]u, & \theta = 0. \end{cases}$$

Подставим в это выражение представление для $\dot{u}$ из (37) и учтем (14), (16). Окончательно получаем

$$\Phi(\theta)\Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big) + H(t,\theta)\left(D + \Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\right) + \frac{\partial H}{\partial t} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \theta}, & -h \leq \theta < 0, \\ B_0 H + G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big), & \theta = 0. \end{cases} \tag{38}$$

Следовательно, если критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ существует при $t \geq t_*$, то для всех (t,θ) таких, что $t + \theta \geq t_*$, матрица $H(t,\theta)$, определяющая это многообразие, должна удовлетворять системе (38). В частности, из (36) и абсолютной непрерывности решения $x(t)$ ($x_{t_*} = \varphi \in \mathcal{W}(t)$) при $t \geq t_*$ следует абсолютная непрерывность $H(t,\theta)$ по переменной t при $t \geq t_* - \theta$ и переменной θ для $\theta \geq t_* - t$.

Попытаемся удовлетворить системе (38) с точностью до слагаемых $\hat{R}(t,\theta)$ таких, что $\|\hat{R}(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_0,\infty)$. Именно, положим

$$\hat{H}(t,\theta) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)H_i(t,\theta) + \sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)H_{i_1 i_2}(t,\theta) + \ldots +$$
$$+ \sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)H_{i_1\ldots i_k}(t,\theta). \tag{39}$$

Здесь элементы подлежащих определению $(m \times N)$-матриц $H_{i_1\ldots i_l}(t,\theta)$ являются тригонометрическими многочленами переменной t и непрерывно дифференцируемы по $\theta \in [-h, 0]$, а величина $k \in \mathbb{N}$ определена свойством 3^0 функций $v_1(t), \ldots, v_n(t)$. Кроме того, мы будем предполагать, что столбцы матриц $H_{i_1\ldots i_l}(t,\theta)$ принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \in \mathbb{R}$. Подставим выражение (39) в (38) вместо $H(t,\theta)$ и соберем слагаемые при одинаковых множителях $v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_l}(t)$ $(l \leq k)$. Получаем следующие однотипные системы для определения матриц $H_{i_1\ldots i_l}(t,\theta)$:

$$F^{P_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta) + H_{i_1\dots i_l}(t,\theta)D + F^{Q_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta) + \frac{\partial H_{i_1\dots i_l}}{\partial t} = \\ = \begin{cases} \dfrac{\partial H_{i_1\dots i_l}}{\partial \theta}, & -h \le \theta < 0, \\ B_0 H_{i_1\dots i_l} + G_{i_1\dots i_l}(t), & \theta = 0. \end{cases} \qquad (40)$$

Здесь мы учли формулы (2), (30), из которых, в частности, следует, что для решения системы (40) необходимо определить сначала все матрицы $H_{j_1\dots j_s}(t,\theta)$, для которых $s < l$. Тогда в системе (40) $F^{P_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ и $F^{Q_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ — некоторые конкретные матрицы, которые, в частности, содержат в себе информацию об определенных ранее матрицах $H_{j_1\dots j_s}(t,\theta)$ $(s < l)$. В силу (2), (30), (31) и требований относительно матриц $H_{j_1\dots j_s}(t,\theta)$ $(s < l)$ мы можем заключить, что элементы матриц $F^{P_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ и $F^{Q_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ являются тригонометрическими многочленами переменной t. Кроме того, столбцы матрицы $F^{P_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ принадлежат пространству P_Λ, а столбцы матрицы $F^{Q_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \in \mathbb{R}$. Далее, $G_{i_1\dots i_l}(t)$ — некоторая матрица, элементами которой являются тригонометрические многочлены:

$$G_{i_1\dots i_l}(t) = \sum_j G_j^{(i_1\dots i_l)} e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \qquad (41)$$

где $G_j^{(i_1\dots i_l)}$ — постоянные $(m\times N)$-матрицы, а ω_j — вещественные числа. Для матриц $F^{P_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ и $F^{Q_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ в силу (38) имеем следующие представления:

$$F^{P_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta) = \Phi(\theta)\Psi(0)G_{i_1\dots i_l}(t) = \sum_j P_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta) e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \qquad (42)$$

$$P_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta) = \Phi(\theta)\Psi(0)G_j^{(i_1\dots i_l)}, \qquad (43)$$

$$F^{Q_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta) = \sum_j Q_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta) e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \qquad (44)$$

где $P_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta)$ и $Q_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые на отрезке $-h \le \theta \le 0$ матрицы.

Будем искать решение системы (40) в следующем виде:

$$H_{i_1\dots i_l}(t,\theta) = \sum_j \beta_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta) e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \qquad (45)$$

где $\beta_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta)$ — $(m \times N)$ непрерывно дифференцируемые на отрезке $-h \le \theta \le 0$ матрицы, подлежащие определению. Подставим (41)–(45) в (40) и соберем слагаемые при одинаковых показателях экспоненты. Опустив для краткости записи обозначение зависимости матриц от набора индексов $(i_1 \dots i_l)$ и индекса j, получим следующую систему для определения матрицы $\beta(\theta) = \beta_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\beta}{d\theta} = \beta(\theta)(D + \mathrm{i}\omega_j I) + P(\theta) + Q(\theta), & -h \le \theta < 0, \\ \beta(0)(D + \mathrm{i}\omega_j I) + P(0) + Q(0) = B_0\beta + G, \end{cases} \qquad (46)$$

где $P(\theta) = P_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta)$, $Q(\theta) = Q_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta)$ и $G = G_j^{(i_1\dots i_l)}$. Отметим, что в силу непрерывности решения $\beta(\theta)$ системы (46) на отрезке $-h \le \theta \le 0$ первое уравнение должно решаться с начальным условием $\beta(0)$, определяемым из второго уравнения этой системы. Нам также следует учесть требование того, чтобы столбцы матрицы $\beta(\theta)$ принадлежали пространству Q_Λ. Следовательно, в силу (18), система (46) должна решаться с дополнительным условием

$$\big(\Psi(\xi), \beta(\theta)\big) = 0. \tag{47}$$

Пусть матрица D, спектром которой является множество Λ, имеет жорданову форму

$$D = \operatorname{diag}(D^{(1)}, \ldots, D^{(l)}), \qquad D^{(i)} = \begin{pmatrix} \lambda^{(i)} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda^{(i)} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda^{(i)} & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda^{(i)} \end{pmatrix}, \tag{48}$$

где $\lambda^{(i)} \in \Lambda$, $D^{(i)}$ — $(N_i \times N_i)$-матрица и $N_1 + \ldots + N_l = N$. Далее, матрицы $\beta(\theta)$, $P(\theta)$, $Q(\theta)$ и G представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \beta(\theta) &= \big[\beta^{(1)}(\theta), \ldots, \beta^{(l)}(\theta)\big], \qquad P(\theta) = \big[P^{(1)}(\theta), \ldots, P^{(l)}(\theta)\big], \\ Q(\theta) &= \big[Q^{(1)}(\theta), \ldots, Q^{(l)}(\theta)\big], \qquad G = \big[G^{(1)}, \ldots, G^{(l)}\big], \end{aligned} \tag{49}$$

где $\beta^{(i)}(\theta)$, $P^{(i)}(\theta)$, $Q^{(i)}(\theta)$, $G^{(i)}$ — $(m \times N_i)$-матрицы, а символом $[\cdot, \ldots, \cdot]$ обозначена матрица, составленная объединением столбцов, указанных в квадратных скобках матриц (слева направо в естественном порядке). Тогда систему (46), (47) можно представить в виде l независимых подсистем вида:

$$\begin{cases} \dfrac{d\beta^{(i)}}{d\theta} = \beta^{(i)}(\theta)(D^{(i)} + \mathrm{i}\omega_j I) + P^{(i)}(\theta) + Q^{(i)}(\theta), \qquad -h \le \theta < 0, \\ \beta^{(i)}(0)(D^{(i)} + \mathrm{i}\omega_j I) + P^{(i)}(0) + Q^{(i)}(0) = B_0\beta^{(i)} + G^{(i)}, \\ \big(\Psi(\xi), \beta^{(i)}(\theta)\big) = 0, \end{cases} \tag{50}$$

где I — единичная матрица порядка N_i и $i = 1, \ldots, l$. Наконец, пусть

$$\begin{aligned} \beta^{(i)}(\theta) &= \big[z_1^{(i)}(\theta), \ldots, z_{N_i}^{(i)}(\theta)\big], \qquad P^{(i)}(\theta) = \big[p_1^{(i)}(\theta), \ldots, p_{N_i}^{(i)}(\theta)\big], \\ Q^{(i)}(\theta) &= \big[q_1^{(i)}(\theta), \ldots, q_{N_i}^{(i)}(\theta)\big], \qquad G^{(i)} = \big[g_1^{(i)}, \ldots, g_{N_i}^{(i)}\big], \end{aligned} \tag{51}$$

где $z_s^{(i)}(\theta)$, $p_s^{(i)}(\theta)$, $q_s^{(i)}(\theta)$, $g_s^{(i)}$ $(s = 1, \ldots, N_i)$ — вектор-столбцы высоты m. Обозначим через

$$\begin{gathered} \tilde{Z}^{(i)}(\theta) = \operatorname{col}\big(z_1^{(i)}(\theta), \ldots, z_{N_i}^{(i)}(\theta)\big), \qquad \tilde{P}^{(i)}(\theta) = \operatorname{col}\big(p_1^{(i)}(\theta), \ldots, p_{N_i}^{(i)}(\theta)\big), \\ \tilde{Q}^{(i)}(\theta) = \operatorname{col}\big(q_1^{(i)}(\theta), \ldots, q_{N_i}^{(i)}(\theta)\big), \qquad \tilde{G}^{(i)} = \operatorname{col}\big(g_1^{(i)}, \ldots, g_{N_i}^{(i)}\big), \\ B_0\tilde{Z}^{(i)} = \operatorname{col}\big(B_0 z_1^{(i)}, \ldots, B_0 z_{N_i}^{(i)}\big) \end{gathered} \tag{52}$$

вектор-столбцы высоты mN_i, составленные из указанных векторов, расположенных сверху вниз в естественном порядке. В новых обозначениях система (50) запишется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{Z}^{(i)}}{d\theta} = \mathbf{A}^{(i)}\tilde{Z}^{(i)}(\theta) + \tilde{P}^{(i)}(\theta) + \tilde{Q}^{(i)}(\theta), \qquad -h \le \theta < 0, \\ \mathbf{A}^{(i)}\tilde{Z}^{(i)}(0) + \tilde{P}^{(i)}(0) + \tilde{Q}^{(i)}(0) = B_0\tilde{Z}^{(i)} + G^{(i)}, \\ \big(\Psi(\xi), z_s^{(i)}(\theta)\big) = 0, \qquad s = 1, \dots, N_i, \end{cases} \tag{53}$$

где $\mathbf{A}$ — $(mN_i \times mN_i)$-матрица, определяемая формулой

$$\mathbf{A}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mu^{(i)}I & 0 & \dots & \dots & 0 \\ I & \mu^{(i)}I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & I & \mu^{(i)}I & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I & \mu^{(i)}I \end{pmatrix}, \qquad \mu^{(i)} = \lambda^{(i)} + \mathrm{i}\omega_j, \tag{54}$$

в которой I — $(m \times m)$-единичная матрица.

Решая первое уравнение системы (53), имеем

$$\tilde{Z}^{(i)}(\theta) = e^{\mathbf{A}^{(i)}\theta}\tilde{Z}^{(i)}(0) + \int\limits_0^\theta e^{\mathbf{A}^{(i)}(\theta-s)}\big(\tilde{P}^{(i)}(s) + \tilde{Q}^{(i)}(s)\big)ds, \quad -h \le \theta < 0. \tag{55}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (53), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных $\tilde{Z}^{(i)}(0)$:

$$\big(\mathbf{A}^{(i)} - B_0 e^{\mathbf{A}^{(i)}\theta}\big)\tilde{Z}^{(i)}(0) = B_0\Big(\int\limits_0^\theta e^{\mathbf{A}^{(i)}(\theta-s)}\big(\tilde{P}^{(i)}(s) + \tilde{Q}^{(i)}(s)\big)ds\Big) + G^{(i)} - \tilde{P}^{(i)}(0) - \tilde{Q}^{(i)}(0). \tag{56}$$

Здесь оператор B_0 применяется к столбцам $(mN_i \times mN_i)$-матрицы $e^{\mathbf{A}^{(i)}\theta}$ аналогично (52). Заметим, что

$$e^{\mathbf{A}^{(i)}\theta} = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \theta I & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\theta^{N_i-2}}{(N_i-2)!}I & \dots & \theta I & I & 0 \\ \frac{\theta^{N_i-1}}{(N_i-1)!}I & \frac{\theta^{N_i-2}}{(N_i-2)!}I & \dots & \theta I & I \end{pmatrix} e^{\mu^{(i)}\theta}.$$

Вспоминая формулы (7), (8), введенные нами обозначения (52), а также третье требование в (53), приходим к следующему набору задач для нахождения неизвестных векторов $z_1^{(i)}(0), \dots, z_{N_i}^{(i)}(0)$ $(i = 1, \dots, l)$.

$\mathbf{P_1}$:

$$\begin{cases} \Delta(\mu^{(i)})z_1^{(i)}(0) = B_0\Big(\int\limits_0^\theta e^{\mu^{(i)}(\theta-s)}\big(p_1^{(i)}(s) + q_1^{(i)}(s)\big)ds\Big) + g_1^{(i)} - p_1^{(i)}(0) - q_1^{(i)}(0), \\ \big(\Psi(\xi), e^{\mu^{(i)}\theta}I\big)z_1^{(i)}(0) = -\Big(\Psi(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu^{(i)}(\theta-s)}\big(p_1^{(i)}(s) + q_1^{(i)}(s)\big)ds\Big); \end{cases} \tag{57}$$

$\mathbf{P_2}$:

$$\begin{cases} \Delta'(\mu^{(i)})z_1^{(i)}(0)+\Delta(\mu^{(i)})z_2^{(i)}(0)=B_0\Big(\int\limits_0^\theta\Big((\theta-s)e^{\mu^{(i)}(\theta-s)}\big(p_1^{(i)}(s)+q_1^{(i)}(s)\big)+ \\ +\,e^{\mu^{(i)}(\theta-s)}\big(p_2^{(i)}(s)+q_2^{(i)}(s)\big)\Big)ds\Big)+g_2^{(i)}-p_2^{(i)}(0)-q_2^{(i)}(0), \\ \big(\Psi(\xi),\theta e^{\mu^{(i)}\theta}I\big)z_1^{(i)}(0)+\big(\Psi(\xi),e^{\mu^{(i)}\theta}I\big)z_2^{(i)}(0)= \\ =-\Big(\Psi(\xi),\int\limits_0^\theta(\theta-s)e^{\mu^{(i)}(\theta-s)}\big(p_1^{(i)}(s)+q_1^{(i)}(s)\big)ds\Big)-\Big(\Psi(\xi),\int\limits_0^\theta e^{\mu^{(i)}(\theta-s)}\big(p_2^{(i)}(s)+q_2^{(i)}(s)\big)ds\Big); \end{cases} \tag{58}$$

... ...

$\mathbf{P_{N_i}}$:

$$\begin{cases} \frac{\Delta^{(N_i-1)}(\mu^{(i)})}{(N_i-1)!}z_1^{(i)}(0)+\ldots+\Delta'(\mu^{(i)})z_{N_i-1}^{(i)}(0)+\Delta(\mu^{(i)})z_{N_i}^{(i)}(0)=B_0\Big(\int\limits_0^\theta\Big(\frac{(\theta-s)^{N_i-1}}{(N_i-1)!}e^{\mu^{(i)}(\theta-s)}\times \\ \times\big(p_1^{(i)}(s)+q_1^{(i)}(s)\big)+\ldots+e^{\mu^{(i)}(\theta-s)}\big(p_{N_i}^{(i)}(s)+q_{N_i}^{(i)}(s)\big)\Big)ds\Big)+g_{N_i}^{(i)}-p_{N_i}^{(i)}(0)-q_{N_i}^{(i)}(0), \\ \big(\Psi(\xi),\frac{\theta^{N_i-1}}{(N_i-1)!}e^{\mu^{(i)}\theta}I\big)z_1^{(i)}(0)+\ldots+\big(\Psi(\xi),\theta e^{\mu^{(i)}\theta}I\big)z_{N_i-1}^{(i)}(0)+\big(\Psi(\xi),e^{\mu^{(i)}\theta}I\big)z_{N_i}^{(i)}(0)= \\ =-\Big(\Psi(\xi),\int\limits_0^\theta\frac{(\theta-s)^{N_i-1}}{(N_i-1)!}e^{\mu^{(i)}(\theta-s)}\big(p_1^{(i)}(s)+q_1^{(i)}(s)\big)ds\Big)-\ldots- \\ -\Big(\Psi(\xi),\int\limits_0^\theta e^{\mu^{(i)}(\theta-s)}\big(p_{N_i}^{(i)}(s)+q_{N_i}^{(i)}(s)\big)ds\Big). \end{cases} \tag{59}$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат первой части работы.

Теорема 1. *Система уравнений* (53) *имеет единственное непрерывно дифференцируемое на отрезке* $-h\le\theta\le 0$ *решение* $\tilde{Z}^{(i)}(\theta)$ $(i=1,\ldots,l)$. *Это решение задается формулой* (55), *где компоненты вектора начальных условий* $\tilde{Z}^{(i)}(0)$ *однозначно определяются как решения задач* $\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_{N_i}}$.

Заметим, что непрерывная дифференцируемость решения $\tilde{Z}^{(i)}(\theta)$ есть простое следствие формулы (55) и гладкости функций $\tilde{P}^{(i)}(\theta)$, $\tilde{Q}^{(i)}(\theta)$ на отрезке $-h\le\theta\le 0$. Более того, эти функции имеют бесконечную гладкость, поскольку элементы матрицы $\Phi(\theta)$ бесконечно дифференцируемы. Следовательно, решение $\tilde{Z}^{(i)}(\theta)$ имеет бесконечную гладкость на отрезке $-h\le\theta\le 0$.

Перед тем как приступить к доказательству теоремы 1, нам потребуется ввести еще несколько обозначений и установить справедливость двух вспомогательных утверждений. Аналогично (49), (51) представим $(m\times N)$-матрицу $\Phi(\theta)$, по столбцам которой расположены базисные функции пространства P_Λ, в следующем виде:

$$\Phi(\theta)=\big[\Phi^{(1)}(\theta),\ldots,\Phi^{(l)}(\theta)\big],\qquad \Phi^{(p)}(\theta)=\big[\varphi_1^{(p)}(\theta),\ldots,\varphi_{N_p}^{(p)}(\theta)\big], \tag{60}$$

где $\Phi^{(p)}(\theta)$ — $(m\times N_p)$-матрицы, а $\varphi_s^{(p)}(\theta)$ — вектор-столбцы высоты m. Тогда, учитывая (48), а также формулы (14), (16), получаем

$$\Phi^{(p)}(\theta)=\Phi^{(p)}(0)e^{D^{(p)}\theta},\quad \Phi^{(p)}(0)D^{(p)}-\int\limits_{-h}^{0}d\eta(\theta)\Phi^{(p)}(0)e^{D^{(p)}\theta}=0,\quad -h\le\theta\le 0. \tag{61}$$

Откуда с учетом (7), (8) заключаем, что

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1^{(p)}(\theta)=\varphi_1^{(p)}(0)e^{\lambda^{(p)}\theta},\\
&\varphi_2^{(p)}(\theta)=\big(\varphi_1^{(p)}(0)\theta+\varphi_2^{(p)}(0)\big)e^{\lambda^{(p)}\theta},\\
&\dots\quad\dots\quad\dots\\
&\varphi_{N_p}^{(p)}(\theta)=\Big(\varphi_1^{(p)}(0)\frac{\theta^{N_p-1}}{(N_p-1)!}+\ldots+\varphi_{N_p-1}^{(p)}(0)\theta+\varphi_{N_p}^{(p)}(0)\Big)e^{\lambda^{(p)}\theta},
\end{aligned}
\tag{62}
$$

а векторы $\varphi_1^{(p)}(0),\dots,\varphi_{N_p}^{(p)}(0)$ определяются из уравнений

$$
\begin{aligned}
&\Delta(\lambda^{(p)})\varphi_1^{(p)}(0)=0,\\
&\Delta'(\lambda^{(p)})\varphi_1^{(p)}(0)+\Delta(\lambda^{(p)})\varphi_2^{(p)}(0)=0,\\
&\dots\quad\dots\quad\dots\\
&\frac{\Delta^{(N_p-1)}(\lambda^{(p)})}{(N_p-1)!}\varphi_1^{(p)}(0)+\ldots+\Delta'(\lambda^{(p)})\varphi_{N_p-1}^{(p)}(0)+\Delta(\lambda^{(p)})\varphi_{N_p}^{(p)}(0)=0.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Аналогичные действия осуществим с $(N\times m)$-матрицей $\Psi(\xi)$, по строкам которой расположены базисные функции пространства P_Λ^T. Имеем

$$
\Psi(\xi)=\mathrm{col}\big(\Psi^{(1)}(\xi),\dots,\Psi^{(l)}(\xi)\big),\qquad \Psi^{(p)}(\xi)=\mathrm{col}\big(\psi_1^{(p)}(\xi),\dots,\psi_{N_p}^{(p)}(\xi)\big),\tag{64}
$$

где $\Psi^{(p)}(\xi)$ — $(N_p\times m)$-матрицы, а $\psi_s^{(p)}(\xi)$ — вектор-строки длины m. Учитывая затем (48), а также формулы (15), (17), получаем

$$
\Psi^{(p)}(\xi)=e^{-D^{(p)}\xi}\Psi^{(p)}(0),\quad D^{(p)}\Psi^{(p)}(0)-\int\limits_{-h}^{0}e^{D^{(p)}\theta}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)=0,\quad 0\le\xi\le h.\tag{65}
$$

Отсюда, вспоминая (7), (8), выводим

$$
\begin{aligned}
&\psi_{N_p}^{(p)}(\xi)=\psi_{N_p}^{(p)}(0)e^{-\lambda^{(p)}\xi},\\
&\psi_{N_p-1}^{(p)}(\xi)=\big(\psi_{N_p}^{(p)}(0)(-\xi)+\psi_{N_p-1}^{(p)}(0)\big)e^{-\lambda^{(p)}\xi},\\
&\dots\quad\dots\quad\dots\\
&\psi_1^{(p)}(\xi)=\Big(\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(-\xi)^{N_p-1}}{(N_p-1)!}+\ldots+\psi_2^{(p)}(0)(-\xi)+\psi_1^{(p)}(0)\Big)e^{-\lambda^{(p)}\xi}.
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Векторы $\psi_1^{(p)}(0),\dots,\psi_{N_p}^{(p)}(0)$ определяются из уравнений

$$
\begin{aligned}
&\psi_{N_p}^{(p)}(0)\Delta(\lambda^{(p)})=0,\\
&\psi_{N_p}^{(p)}(0)\Delta'(\lambda^{(p)})+\psi_{N_p-1}^{(p)}(0)\Delta(\lambda^{(p)})=0,\\
&\dots\quad\dots\quad\dots\\
&\frac{\psi_{N_p}^{(p)}(0)\Delta^{(N_p-1)}(\lambda^{(p)})}{(N_p-1)!}+\ldots+\psi_2^{(p)}(0)\Delta'(\lambda^{(p)})+\psi_1^{(p)}(0)\Delta(\lambda^{(p)})=0.
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть $\mu \neq \lambda^{(p)}$ для некоторого $p = 1, \ldots, l$. Тогда для любой $f(\theta) \in C_h$ и любого $\nu \in \mathbb{N}$ справедливы формулы:*

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)} f(s)ds\Big) = -(\mu I - D^{(p)})^{-1}\Big[\Psi^{(p)}(0)B_0\Big(\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)} f(s)ds\Big)+$$
$$+\big(\Psi^{(p)}(\xi), f(\theta)\big) - \Psi^{(p)}(0)f(0)\Big], \tag{68}$$

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^\nu}{\nu!} e^{\mu(\theta-s)} f(s)ds\Big) = -(\mu I - D^{(p)})^{-1}\Psi^{(p)}(0)B_0\Big(\int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^\nu}{\nu!} e^{\mu(\theta-s)} f(s)ds\Big)+$$
$$+(\mu I - D^{(p)})^{-2}\Psi^{(p)}(0)B_0\Big(\int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\mu(\theta-s)} f(s)ds\Big) + \ldots +$$
$$+(-1)^{\nu+1}(\mu I - D^{(p)})^{-(\nu+1)}\Big[\Psi^{(p)}(0)B_0\Big(\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)} f(s)ds\Big) + \big(\Psi^{(p)}(\xi), f(\theta)\big) - \Psi^{(p)}(0)f(0)\Big]. \tag{69}$$

Доказательство. Имеем

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)} f(s)ds\Big) = -\int\limits_{-h}^0 \int\limits_0^\theta e^{-D^{(p)}(\xi-\theta)}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta) \int\limits_0^\xi e^{\mu(\xi-s)} f(s)ds\, d\xi =$$
$$= -\int\limits_{-h}^0 e^{D^{(p)}\theta} \int\limits_0^\theta e^{(\mu I - D^{(p)})\xi}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta) \int\limits_0^\xi e^{-\mu s} f(s)ds\, d\xi.$$

Интегрируя по частям средний из интегралов, получаем

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)} f(s)ds\Big) = -(\mu I - D^{(p)})^{-1}\Psi^{(p)}(0) \int\limits_{-h}^0 d\eta(\theta) \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)} f(s)ds+$$
$$+(\mu I - D^{(p)})^{-1} \int\limits_{-h}^0 \int\limits_0^\theta e^{-D^{(p)}(\xi-\theta)}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta) f(\xi)d\xi.$$

В силу (7) и (10) устанавливаем справедливость формулы (68). Далее,

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^\nu}{\nu!} e^{\mu(\theta-s)} f(s)ds\Big) =$$
$$= -\int\limits_{-h}^0 \int\limits_0^\theta e^{-D^{(p)}(\xi-\theta)}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta) \int\limits_0^\xi \frac{(\xi-s)^\nu}{\nu!} e^{\mu(\xi-s)} f(s)ds\, d\xi =$$

$$= -\int\limits_{-h}^{0} e^{D^{(p)}\theta} \int\limits_{0}^{\theta} e^{(\mu I - D^{(p)})\xi} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) \int\limits_{0}^{\xi} \frac{(\xi - s)^\nu}{\nu!} e^{-\mu s} f(s) ds\, d\xi.$$

Вновь интегрируя по частям средний из интегралов, заключаем

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_{0}^{\theta} \frac{(\theta-s)^\nu}{\nu!} e^{\mu(\theta-s)} f(s) ds\Big) = -(\mu I - D^{(p)})^{-1} \Psi^{(p)}(0) \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta) \int\limits_{0}^{\theta} \frac{(\theta-s)^\nu}{\nu!} e^{\mu(\theta-s)} \times$$

$$\times f(s) ds + (\mu I - D^{(p)})^{-1} \int\limits_{-h}^{0} \int\limits_{0}^{\theta} e^{-D^{(p)}(\xi-\theta)} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) \int\limits_{0}^{\xi} \frac{(\xi - s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\mu(\xi-s)} f(s) ds\, d\xi =$$

$$= -(\mu I - D^{(p)})^{-1} \Psi^{(p)}(0) B_0 \Big(\int\limits_{0}^{\theta} \frac{(\theta - s)^\nu}{\nu!} e^{\mu(\theta-s)} f(s) ds \Big) -$$

$$- (\mu I - D^{(p)})^{-1} \Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_{0}^{\theta} \frac{(\theta-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\mu(\theta-s)} f(s) ds \Big).$$

Используя теперь индукцию, выводим формулу (69). $\square$

Следствие. *Пусть $\mu \neq \lambda^{(p)}$ для некоторого $p = 1, \ldots, l$. Тогда для любого $\nu \in \mathbb{N}$ справедливы формулы:*

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta} I\big) = (\mu I - D^{(p)})^{-1} \Psi^{(p)}(0) \Delta(\mu), \tag{70}$$

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \frac{\theta^\nu}{\nu!} e^{\mu\theta}\Big) = (\mu I - D^{(p)})^{-1} \Psi^{(p)}(0) \frac{\Delta^{(\nu)}(\mu)}{\nu!} - (\mu I - D^{(p)})^{-2} \Psi^{(p)}(0) \frac{\Delta^{(\nu-1)}(\mu)}{(\nu-1)!} + \ldots +$$
$$+ (-1)^\nu (\mu I - D^{(p)})^{-(\nu+1)} \Psi^{(p)}(0) \Delta(\mu). \tag{71}$$

Из (10) с учетом (65) следует, что

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta} I\big) = \Psi^{(p)}(0) - \int\limits_{-h}^{0} \int\limits_{0}^{\theta} e^{-D^{(p)}(\xi-\theta)} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) e^{\mu\xi} d\xi =$$

$$= \Psi^{(p)}(0) - \int\limits_{-h}^{0} e^{D^{(p)}\theta} \int\limits_{0}^{\theta} e^{(\mu I - D^{(p)})\xi} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) d\xi =$$

$$= \Psi^{(p)}(0) - \int\limits_{-h}^{0} e^{D^{(p)}\theta} (\mu I - D^{(p)})^{-1} \big[e^{(\mu I - D^{(p)})\theta} - I \big] \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) =$$

$$= \Psi^{(p)}(0) - (\mu I - D^{(p)})^{-1} \Psi^{(p)}(0) \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta) e^{\mu\theta} + (\mu I - D^{(p)})^{-1} \int\limits_{-h}^{0} e^{D^{(p)}\theta} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta).$$

Заменяя второе слагаемое в последнем выражении в силу первой из формул (8), а третье — в силу правой из формул (65), устанавливаем справедливость (70). Формула (71) есть простое следствие формулы (69), если положить в этой формуле $f(\theta) = e^{\mu\theta} I$ и учесть (7), (8), а также (70).

Утверждение 2. *Пусть* $\mu = \lambda^{(p)}$ *для некоторого* $p = 1, \dots, l$. *Тогда для любой* $f(\theta) \in C_h$ *и любого* $\nu \in \mathbb{N}$ *справедлива формула:*

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\mu(\theta-s)} f(s)ds\Big) =$$

$$= -\int\limits_{-h}^0 \int\limits_0^\theta \begin{pmatrix} \frac{(\theta-\xi)^\nu}{\nu!} & \frac{(\theta-\xi)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} & \dots & \dots & \frac{(\theta-\xi)^{\nu+N_p-1}}{(\nu+N_p-1)!} \\ 0 & \frac{(\theta-\xi)^\nu}{\nu!} & \frac{(\theta-\xi)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} & \dots & \frac{(\theta-\xi)^{\nu+N_p-2}}{(\nu+N_p-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{(\theta-\xi)^\nu}{\nu!} & \frac{(\theta-\xi)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{(\theta-\xi)^\nu}{\nu!} \end{pmatrix} \Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)e^{\mu(\theta-\xi)}f(\xi)d\xi. \tag{72}$$

Доказательство. Имеем

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\mu(\theta-s)} f(s)ds\Big) =$$
$$= -\int\limits_{-h}^0 \int\limits_0^\theta e^{-D^{(p)}(\xi-\theta)}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta) \int\limits_0^\xi \frac{(\xi-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\mu(\xi-s)} f(s)ds\, d\xi=$$
$$= -\int\limits_{-h}^0 e^{D^{(p)}\theta} \int\limits_0^\theta e^{(\mu I - D^{(p)})\xi}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta) \int\limits_0^\xi \frac{(\xi-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{-\mu s} f(s)ds\, d\xi. \tag{73}$$

Поскольку $\mu = \lambda^{(p)}$, то

$$e^{(\mu I - D^{(p)})\xi} = \sum_{r=0}^{N_p-1} (\mu I - D^{(p)})^r \frac{\xi^r}{r!}, \quad e^{D^{(p)}\theta} = \sum_{j=0}^{N_p-1} (D^{(p)} - \mu I)^j \frac{\theta^j}{j!} e^{\mu\theta} \tag{74}$$

Учитывая левое из равенств (74) в (73) и интегрируя по частям средний из интегралов, получаем

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\mu(\theta-s)} f(s)ds\Big) =$$
$$= -\sum_{r=0}^{N_p-1} (\mu I - D^{(p)})^r \int\limits_{-h}^0 \int\limits_0^\theta e^{D^{(p)}\theta} \frac{\theta^{r+1}}{(r+1)!} \frac{(\theta-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)e^{-\mu\xi}f(\xi)d\xi+$$
$$+ \sum_{r=0}^{N_p-1} (\mu I - D^{(p)})^r \int\limits_{-h}^0 e^{D^{(p)}\theta} \int\limits_0^\theta \frac{\xi^{r+1}}{(r+1)!} \Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta) \int\limits_0^\xi \frac{(\xi-s)^{\nu-2}}{(\nu-2)!} e^{-\mu s} f(s)ds\, d\xi. \tag{75}$$

Во втором слагаемом в правой части (75) вновь проинтегрируем средний из интегралов по частям. Продолжая этот процесс, получаем

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi),\int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big)=$$
$$=-\sum_{r=0}^{N_p-1}(\mu I-D^{(p)})^r\int\limits_{-h}^0\int\limits_0^\theta e^{D^{(p)}\theta}\Big(\frac{\theta^{r+1}}{(r+1)!}\frac{(\theta-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}-\frac{\theta^{r+2}}{(r+2)!}\frac{(\theta-\xi)^{\nu-2}}{(\nu-2)!}+\ldots+$$
$$+(-1)^{\nu-1}\frac{\theta^{r+\nu}}{(r+\nu)!}+(-1)^\nu\frac{\xi^{r+\nu}}{(r+\nu)!}\Big)\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)e^{-\mu\xi}f(\xi)d\xi. \quad (76)$$

Учитывая в (76) правое из равенств (74), приходим к следующей формуле:

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi),\int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big)=-\int\limits_{-h}^0\int\limits_0^\theta\sum_{r=0}^{N_p-1}(\mu I-D^{(p)})^r\sum_{j=0}^{N_p-1}(D^{(p)}-\mu I)^j\times$$
$$\times\frac{\theta^j}{j!}\left(\sum_{i=1}^{\nu}\Big((-1)^{i-1}\frac{\theta^{r+i}}{(r+i)!}\frac{(\theta-\xi)^{\nu-i}}{(\nu-i)!}\Big)+(-1)^\nu\frac{\xi^{r+\nu}}{(r+\nu)!}\right)\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)e^{\mu(\theta-\xi)}f(\xi)d\xi. \quad (77)$$

Далее, перемножим первые две суммы под интегралом в (77) и обозначим величину $r+j$ вновь за j. Учитывая, что $(\mu I-D^{(p)})^r=0$ при $r\geq N_p$, и меняя порядок суммирования, приходим к формуле

$$\sum_{r=0}^{N_p-1}(\mu I-D^{(p)})^r\sum_{j=0}^{N_p-1}(D^{(p)}-\mu I)^j\frac{\theta^j}{j!}\left(\sum_{i=1}^{\nu}\Big((-1)^{i-1}\frac{\theta^{r+i}}{(r+i)!}\frac{(\theta-\xi)^{\nu-i}}{(\nu-i)!}\Big)+(-1)^\nu\frac{\xi^{r+\nu}}{(r+\nu)!}\right)=$$
$$=\sum_{j=0}^{N_p-1}(D^{(p)}-\mu I)^j\sum_{r=0}^{j}(-1)^r\left(\sum_{i=1}^{\nu}\Big((-1)^{i-1}\frac{\theta^{j+i}(\theta-\xi)^{\nu-i}}{(j-r)!(r+i)!(\nu-i)!}\Big)+(-1)^\nu\frac{\theta^{j-r}\xi^{r+\nu}}{(j-r)!(r+\nu)!}\right). \quad (78)$$

Вычислим внутреннюю сумму в правой части этого выражения

$$S=\sum_{r=0}^{j}(-1)^r\left(\sum_{i=1}^{\nu}\Big((-1)^{i-1}\frac{\theta^{j+i}(\theta-\xi)^{\nu-i}}{(j-r)!(r+i)!(\nu-i)!}\Big)+(-1)^\nu\frac{\theta^{j-r}\xi^{r+\nu}}{(j-r)!(r+\nu)!}\right). \quad (79)$$

Положим $S=S_1+S_2$, где

$$S_1=\sum_{r=0}^{j}\sum_{i=1}^{\nu}(-1)^{r+i-1}\frac{\theta^{j+i}(\theta-\xi)^{\nu-i}}{(j-r)!(r+i)!(\nu-i)!},\quad S_2=\sum_{r=0}^{j}(-1)^{r+\nu}\frac{\theta^{j-r}\xi^{r+\nu}}{(j-r)!(r+\nu)!}. \quad (80)$$

Обозначая в S_1 величину $r+i$ вновь за i, получаем

$$S_1 = \sum_{r=0}^{j} \sum_{i=r+1}^{r+\nu} (-1)^{i-1} \frac{\theta^{j+i-r}(\theta-\xi)^{\nu-i+r}}{(j-r)!i!(\nu-i+r)!} = -\sum_{r=0}^{j} \frac{\theta^{j-r}}{(j-r)!}\Bigg(\frac{(-\xi)^{r+\nu}}{(r+\nu)!} -$$

$$-\sum_{i=0}^{r}(-1)^i \frac{\theta^i(\theta-\xi)^{\nu-i+r}}{i!(\nu-i+r)!}\Bigg) = -\sum_{r=0}^{j}(-1)^{r+\nu}\frac{\theta^{j-r}\xi^{r+\nu}}{(j-r)!(r+\nu)!} +$$

$$+\sum_{r=0}^{j}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i \frac{\theta^{j+i-r}(\theta-\xi)^{\nu-i+r}}{(j-r)!i!(\nu-i+r)!}.$$

Учитывая (80), отсюда выводим

$$S = \sum_{r=0}^{j}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i \frac{\theta^{j+i-r}(\theta-\xi)^{\nu-i+r}}{(j-r)!i!(\nu-i+r)!}. \tag{81}$$

Наконец, осталось показать, что

$$S(j,\nu) = \sum_{r=0}^{j}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i \frac{\theta^{j+i-r}(\theta-\xi)^{\nu-i+r}}{(j-r)!i!(\nu-i+r)!} = \frac{(\theta-\xi)^{\nu+j}}{(\nu+j)!}. \tag{82}$$

Формула (82) доказывается индукцией по j. При $j=0$ она, очевидно, справедлива для всех $\nu \in \mathbb{N}$. Предположим, что формула (82) верна для всех $j \le J$ и $\nu \in \mathbb{N}$. Установим ее справедливость для $j = J+1$. Обозначая величину $r-1$ вновь за r, имеем

$$S(J+1,\nu) = \sum_{r=0}^{J+1}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i \frac{\theta^{J+1+i-r}(\theta-\xi)^{\nu-i+r}}{(J+1-r)!i!(\nu-i+r)!} =$$

$$= \sum_{r=-1}^{J}\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i \frac{\theta^{J+i-r}(\theta-\xi)^{\nu-i+r+1}}{(J-r)!i!(\nu-i+r+1)!} = \sum_{r=0}^{J}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i \frac{\theta^{J+i-r}(\theta-\xi)^{\nu-i+r+1}}{(J-r)!i!(\nu-i+r+1)!} +$$

$$+\sum_{r=0}^{J}(-1)^{r+1}\frac{\theta^{J+1}(\theta-\xi)^{\nu}}{(J-r)!(r+1)!\nu!} + \frac{\theta^{J+1}(\theta-\xi)^{\nu}}{(J+1)!\nu!}.$$

Замечая, что первый член в правой части этого выражения есть величина $S(J,\nu+1)$, и используя предположение индукции, получаем

$$S(J+1,\nu) = \frac{(\theta-\xi)^{\nu+1+J}}{(\nu+1+J)!} + \frac{\theta^{J+1}(\theta-\xi)^{\nu}}{\nu!}\sum_{r=0}^{J}\frac{(-1)^{r+1}}{(J-r)!(r+1)!} + \frac{\theta^{J+1}(\theta-\xi)^{\nu}}{(J+1)!\nu!} =$$

$$= \frac{(\theta-\xi)^{\nu+1+J}}{(\nu+1+J)!} - \frac{\theta^{J+1}(\theta-\xi)^{\nu}}{(J+1)!\nu!} + \frac{\theta^{J+1}(\theta-\xi)^{\nu}}{(J+1)!\nu!} = \frac{(\theta-\xi)^{\nu+1+J}}{(\nu+1+J)!}.$$

Здесь мы воспользовались легко проверяемой формулой

$$\sum_{r=0}^{J}\frac{(-1)^{r+1}}{(J-r)!(r+1)!} = -\frac{1}{(J+1)!}. \tag{83}$$

Таким образом, формула (82) доказана. Вспоминая теперь (77), (78), (79), (81) и (82), устанавливаем справедливость формулы (72). □

Следствие. *Пусть $\mu = \lambda^{(p)}$ для некоторого $p = 1, \ldots, l$. Тогда для любого $\nu \in \mathbb{N}$ справедливы формулы:*

$$\left(\Psi^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta} I\right) = \Psi^{(p)}(0) - \int\limits_{-h}^{0} \begin{pmatrix} \theta & \frac{\theta^2}{2!} & \ldots & \ldots & \frac{\theta^{N_p}}{N_p!} \\ 0 & \theta & \frac{\theta^2}{2!} & \ldots & \frac{\theta^{N_p-1}}{(N_p-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \theta & \frac{\theta^2}{2!} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \theta \end{pmatrix} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) e^{\mu\theta}, \tag{84}$$

$$\left(\Psi^{(p)}(\xi), \frac{\theta^\nu}{\nu!} e^{\mu\theta}\right) = -\int\limits_{-h}^{0} \begin{pmatrix} \frac{\theta^{\nu+1}}{(\nu+1)!} & \frac{\theta^{\nu+2}}{(\nu+2)!} & \ldots & \ldots & \frac{\theta^{\nu+N_p}}{(\nu+N_p)!} \\ 0 & \frac{\theta^{\nu+1}}{(\nu+1)!} & \frac{\theta^{\nu+2}}{(\nu+2)!} & \ldots & \frac{\theta^{\nu+N_p-1}}{(\nu+N_p-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{\theta^{\nu+1}}{(\nu+1)!} & \frac{\theta^{\nu+2}}{(\nu+2)!} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \frac{\theta^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \end{pmatrix} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) e^{\mu\theta}. \tag{85}$$

Имеем

$$\left(\Psi^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta} I\right) = \Psi^{(p)}(0) - \int\limits_{-h}^{0} \int\limits_{0}^{\theta} e^{-D^{(p)}(\xi-\theta)} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) e^{\mu\xi} d\xi =$$

$$= \Psi^{(p)}(0) - \int\limits_{-h}^{0} e^{D^{(p)}\theta} \int\limits_{0}^{\theta} e^{(\mu I - D^{(p)})\xi} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) d\xi =$$

$$= \Psi^{(p)}(0) - \int\limits_{-h}^{0} \sum_{r=0}^{N_p-1} (\mu I - D^{(p)})^r \sum_{j=0}^{N_p-1} (D^{(p)} - \mu I)^j \frac{\theta^{j+r+1}}{j!(r+1)!} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) e^{\mu\theta},$$

где мы воспользовались формулами (74). Перемножим суммы под интегралом и обозначим величину $r + j$ вновь за j. Учитывая, что $(\mu I - D^{(p)})^r = 0$ при $r \geq N_p$, и меняя порядок суммирования, приходим к формуле

$$\sum_{r=0}^{N_p-1} (\mu I - D^{(p)})^r \sum_{j=0}^{N_p-1} (D^{(p)} - \mu I)^j \frac{\theta^{j+r+1}}{j!(r+1)!} = \sum_{j=0}^{N_p-1} (D^{(p)} - \mu I)^j \theta^{j+1} \sum_{r=0}^{j} \frac{(-1)^r}{(j-r)!(r+1)!}.$$

Используя (83), выводим равенство (84). Формула (85) следует из (72), если положить $f(\theta) = e^{\mu\theta} I$.

Теперь мы можем вернуться к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. В дальнейшем для сокращения записи в коэффициентах и в неизвестных систем $\mathbf{P_1}, \ldots, \mathbf{P_{N_i}}$ не будем указывать верхний индекс $^{(i)}$, полагая $\mu = \mu^{(i)}$, $g_r = g_r^{(i)}$, $p_r(\theta) = p_r^{(i)}(\theta)$, $q_r(\theta) = q_r^{(i)}(\theta)$ и $z_r(0) = z_r^{(i)}(0)$ $(r = 1, \ldots N_i)$. Нам необходимо рассмотреть далее два случая.

Случай 1. Число $\mu \in \mathbb{C}$ не является корнем характеристического уравнения (5).

Рассмотрим сначала задачу $\mathbf{P_1}$. Поскольку матрица $\Delta(\mu)$ невырождена, то из первого уравнения системы (57) однозначно определяем вектор $z_1(0)$:

$$z_1(0) = \Delta^{-1}(\mu)\Big[B_0\Big(\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) + g_1 - p_1(0) - q_1(0)\Big]. \tag{86}$$

Подставим полученное выражение в левую часть второго уравнения системы (57), полагая $\Psi(\xi) = \Psi^{(p)}(\xi)$, где $p = 1, \ldots, l$ — произвольно. Используя формулу (70) из следствия к утверждению 1, получаем

$$\begin{gathered}\big(\Psi^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big)z_1(0) = (\mu I - D^{(p)})^{-1}\Psi^{(p)}(0)\times \\ \times\Big[B_0\Big(\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) + g_1 - p_1(0) - q_1(0)\Big]. \end{gathered} \tag{87}$$

Рассмотрим теперь правую часть второго уравнения системы (57). Сперва заметим, что поскольку $q_r(\theta) \in Q_\Lambda$ в силу представлений (44), (49) и (51), то в силу (18)

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), q_r(\theta)\big) = 0, \qquad r = 1, \ldots, N_i. \tag{88}$$

Кроме того, из (13), (42), (43), (49), (51) следует, что

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), p_r(\theta)\big) = \Psi^{(p)}(0)g_r, \qquad r = 1, \ldots, N_i. \tag{89}$$

Воспользуемся теперь формулой (68) из утверждения 1 для $f(\theta) = p_1(\theta) + q_1(\theta)$ и учтем (88), (89). Правая часть второго уравнения системы (57) перепишется тогда следующим образом:

$$\begin{gathered} -\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) = (\mu I - D^{(p)})^{-1}\times \\ \times\Big[\Psi^{(p)}(0)B_0\Big(\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) + \Psi^{(p)}(0)g_1 - \Psi^{(p)}(0)\big(p_1(0)+q_1(0)\big)\Big]. \end{gathered} \tag{90}$$

Сопоставляя (87) и (90) и изменяя p от 1 до l, устанавливаем однозначную разрешимость задачи $\mathbf{P_1}$.

Перейдем теперь к анализу задачи $\mathbf{P_2}$. Имеем

$$\begin{gathered} z_2(0) = \Delta^{-1}(\mu)\Big[B_0\Big(\int\limits_0^\theta\Big((\theta-s)e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big) + e^{\mu(\theta-s)}\big(p_2(s)+q_2(s)\big)\Big)ds\Big) + \\ + g_2 - p_2(0) - q_2(0) - \Delta'(\mu)z_1(0)\Big]. \end{gathered}$$

Подставим полученное выражение в левую часть второго уравнения системы (58), полагая $\Psi(\xi) = \Psi^{(p)}(\xi)$, где $p = 1, \ldots, l$ — произвольно. Используя формулы (70), (71) из следствия к утверждению 1, а также (86), получаем

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), \theta e^{\mu\theta} I\big) z_1(0) + \big(\Psi(\xi), e^{\mu\theta} I\big) z_2(0) = -(\mu I - D^{(p)})^{-2} \Psi^{(p)}(0) \times$$
$$\times \left[B_0 \Big(\int_0^\theta e^{\mu(\theta - s)} \big(p_1(s) + q_1(s)\big) ds \Big) + g_1 - p_1(0) - q_1(0) \right] + (\mu I - D^{(p)})^{-1} \Psi^{(p)}(0) \times$$
$$\times \left[B_0 \Big(\int_0^\theta \Big((\theta - s) e^{\mu(\theta - s)} \big(p_1(s) + q_1(s)\big) + e^{\mu(\theta - s)} \big(p_2(s) + q_2(s)\big) \Big) ds \Big) + g_2 - p_2(0) - q_2(0) \right]. \tag{91}$$

Применяя теперь формулы (68), (69) для преобразования правой части второго уравнения системы (58) и учитывая (88), (89), приходим к выводу, что полученное выражение совпадает с (91). Тем самым однозначная разрешимость задачи $\mathbf{P_2}$ обоснована.

Абсолютно аналогично доказывается однозначная разрешимость всех остальных задач $\mathbf{P_r}$ $(r = 3, \ldots, N_i)$. Достаточно лишь во второе уравнение соответствующей системы задачи $\mathbf{P_r}$ подставить известные выражения $z_1(0), \ldots, z_r(0)$ и воспользоваться формулами (68), (69), (70), (71) с учетом (88), (89).

Случай 2. Число $\mu \in \mathbb{C}$ является корнем характеристического уравнения (5).

В рассматриваемой ситуации матрица $\Delta(\mu)$ является вырожденной. Первое уравнение задачи $\mathbf{P_r}$ $(r = 1, \ldots, N_i)$ имеет вид

$$\Delta(\mu) z_r(0) = f_r, \tag{92}$$

где $f_r \in \mathbb{C}^m$. Хорошо известно, что система (92) имеет решение тогда и только тогда, когда $y^* f_r = 0$ для всех фундаментальных решений сопряженной системы

$$\Delta^*(\mu) y = 0. \tag{93}$$

Здесь символ $(^*)$ означает эрмитово сопряжение. Сопрягая обе части системы (93) и учитывая (67), получаем условие разрешимости для (92):

$$\psi_{N_p}^{(p)}(0) f_r = 0. \tag{94}$$

Условие (94) должно выполняться для всех таких p, что $\mu = \lambda^{(p)}$. Заметим, что в силу (63) фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы для (92) образуют векторы $\varphi_1^{(p)}(0)$ с индексами p $(p = 1, \ldots, l)$ такими, что $\mu = \lambda^{(p)}$. Следовательно, в случае разрешимости системы (92) ее общее решение может быть записано в виде

$$z_r(0) = \sum_{p:\ \lambda^{(p)} = \mu} c_p \varphi_1^{(p)}(0) + \tilde{z}_r, \tag{95}$$

где $c_p \in \mathbb{C}$ — произвольные постоянные, а $\tilde{z}_r$ — некоторое частное решение системы (92).

Как и в предыдущем случае, будем изучать задачи $\mathbf{P_1}, \ldots, \mathbf{P_{N_i}}$ последовательно. Рассмотрим сначала задачу $\mathbf{P_1}$. Установим разрешимость первого уравнения системы (57). Имеем

$$\psi^{(p)}_{N_p}(0)\Big[B_0\Big(\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big)+g_1-p_1(0)-q_1(0)\Big]=$$

$$=\int\limits_{-h}^0\int\limits_0^\theta \psi^{(p)}_{N_p}(0)e^{\mu(\theta-s)}d\eta(\theta)\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds+\psi^{(p)}_{N_p}(0)\big(g_1-p_1(0)-q_1(0)\big)=$$

$$=-\big(\psi^{(p)}_{N_p}(\xi),p_1(\theta)+q_1(\theta)\big)+\psi^{(p)}_{N_p}(0)\big(p_1(0)+q_1(0)\big)+\psi^{(p)}_{N_p}(0)\big(g_1-p_1(0)-q_1(0)\big)=0.$$

Здесь мы учли равенство $\mu=\lambda^{(p)}$, формулу (66), а также соотношения (88), (89). Таким образом, общее решение первого уравнения системы (57) может быть записано в виде (95), где $r=1$. Подставим теперь соответствующее представление для $z_1(0)$ в левую часть второго уравнения системы (57) и учтем (13), (62). Получим

$$\big(\Psi(\xi),e^{\mu\theta}I\big)z_1(0)=\sum_{p:\ \lambda^{(p)}=\mu}c_p\big(\Psi(\xi),\varphi^{(p)}_1(\theta)\big)+\big(\Psi(\xi),e^{\mu\theta}\tilde z_1\big)=\sum_{p:\ \lambda^{(p)}=\mu}c_pe^{(p)}+\big(\Psi(\xi),e^{\mu\theta}\tilde z_1\big), \tag{96}$$

где $e^{(p)}$ — вектор–столбец высоты N, у которого элемент с номером $1+N_1+\ldots+N_{p-1}$ ($N_0=0$) равен единице, а остальные элементы — нули. Учитывая теперь правую часть второго уравнения системы (57), однозначно определяем постоянные c_p:

$$c_p=-(e^{(p)})^*\Big(\Psi(\xi),\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big)-(e^{(p)})^*\big(\Psi(\xi),e^{\mu\theta}\tilde z_1\big)=$$

$$=-\Big(\psi^{(p)}_1(\xi),\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big)-\big(\psi^{(p)}_1(\xi),e^{\mu\theta}\tilde z_1\big). \tag{97}$$

Таким образом, если решение $z_1(0)$ системы (57) существует, то оно определяется формулой (95), где $r=1$, а постоянные c_p определяются формулами (97). Кроме того, если решение системы (57) существует, то оно единственно (т.е. не зависит от выбора частного решения $\tilde z_1$). Действительно, рассматривая соответствующую однородную систему для (57), в силу (95), (97) заключаем, что она имеет только нулевое решение.

Проверим теперь справедливость второго уравнения системы (57), где $\Psi(\xi)=\Psi^{(p)}(\xi)$. Заметим, что если номер p такой, что $\lambda^{(p)}\neq\mu$, то соответствующие равенства проверяются точно так же, как и в случае 1. Действительно, для левой части второго уравнения системы (57) будет справедливо представление (87), а для правой — (90). Следовательно, нам необходимо проверить справедливость N_p равенств (для каждого p)

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi),e^{\mu\theta}I\big)z_1(0)=-\Big(\Psi^{(p)}(\xi),\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big),\qquad (\lambda^{(p)}=\mu). \tag{98}$$

Из (84) с учетом (8) и (67) выводим

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big)z_1(0) = \begin{pmatrix} \big(\psi_1^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big) \\ \psi_2^{(p)}(0)\Delta'(\mu) + \ldots + \psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{\Delta^{(N_p-1)}(\mu)}{(N_p-1)!} \\ \psi_3^{(p)}(0)\Delta'(\mu) + \ldots + \psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{\Delta^{(N_p-2)}(\mu)}{(N_p-2)!} \\ \vdots \\ \psi_{N_p}^{(p)}(0)\Delta'(\mu) \end{pmatrix} z_1(0) =$$

$$= \begin{pmatrix} \big(\psi_1^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big) \\ -\psi_1^{(p)}(0)\Delta(\mu) \\ -\psi_2^{(p)}(0)\Delta(\mu) \\ \vdots \\ -\psi_{N_p-1}^{(p)}(0)\Delta(\mu) \end{pmatrix} z_1(0) = \begin{pmatrix} \big(\psi_1^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big)z_1(0) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_1^{(p)}(0) \\ \psi_2^{(p)}(0) \\ \vdots \\ \psi_{N_p-1}(0) \end{pmatrix} \Delta(\mu)z_1(0). \quad (99)$$

Учитывая теперь тот факт, что вектор $z_1(0)$ уже построен и удовлетворяет первому уравнению системы (57), заключаем

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big)z_1(0) = \begin{pmatrix} \big(\psi_1^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big)z_1(0) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_1^{(p)}(0) \\ \psi_2^{(p)}(0) \\ \vdots \\ \psi_{N_p-1}(0) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left[B_0\Big(\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) + g_1 - p_1(0) - q_1(0)\right]. \quad (100)$$

Рассмотрим теперь правую часть (98). Воспользуемся формулой (72) из утверждения 2 и учтем (66). Получаем

$$-\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big) = -\begin{pmatrix} \Big(\psi_1^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\int\limits_{-h}^0\int\limits_0^\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2^{(p)}(0)(\theta-\xi) + \psi_3^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^2}{2!} + \ldots + \psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p-1}}{(N_p-1)!} \\ \vdots \\ \psi_{N_p-1}^{(p)}(0)(\theta-\xi) + \psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^2}{2!} \\ \psi_{N_p}^{(p)}(0)(\theta-\xi) \end{pmatrix} e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)f(\xi)d\xi =$$

$$=-\begin{pmatrix} \Big(\psi_1^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_0^\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_1^{(p)}(\xi-\theta)-\psi_1^{(p)}(0)e^{-\mu(\xi-\theta)} \\ \vdots \\ \psi_{N_p-2}^{(p)}(\xi-\theta)-\psi_{N_p-2}^{(p)}(0)e^{-\mu(\xi-\theta)} \\ \psi_{N_p-1}^{(p)}(\xi-\theta)-\psi_{N_p-1}^{(p)}(0)e^{-\mu(\xi-\theta)} \end{pmatrix} d\eta(\theta)f(\xi)d\xi.$$

Откуда, в силу (7) и (10), выводим

$$-\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big) = -\begin{pmatrix} \Big(\psi_1^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big) \\ \big(\psi_1^{(p)}(\xi), f(\theta)\big) \\ \vdots \\ \big(\psi_{N_p-2}^{(p)}(\xi), f(\theta)\big) \\ \big(\psi_{N_p-1}^{(p)}(\xi), f(\theta)\big) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_1^{(p)}(0)f(0) \\ \vdots \\ \psi_{N_p-2}^{(p)}(0)f(0) \\ \psi_{N_p-1}^{(p)}(0)f(0) \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_1^{(p)}(0) \\ \vdots \\ \psi_{N_p-2}^{(p)}(0) \\ \psi_{N_p-1}^{(p)}(0) \end{pmatrix} B_0\Big(\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big). \quad (101)$$

Полагая теперь $f(\theta) = p_1(\theta) + q_1(\theta)$ и вспоминая (88), (89), убеждаемся в том, что вектор в правой части (101) совпадает с вектором в правой части (100) за исключением, быть может, первой компоненты. Но первые компоненты этих векторов совпадают в силу (96) и выбора постоянной c_p согласно (97). Следовательно, все N_p равенств (98) выполнены.

Рассмотрим далее задачу $\mathbf{P_r}$, где $2 \le r \le N_i$, полагая, что однозначная разрешимость всех предыдущих задач уже доказана. Покажем сначала, что первое уравнение соответствующей системы имеет решение. Записывая это уравнение в виде (92), имеем

$$\psi_{N_p}^{(p)}(0)\Big[B_0\Big(\int\limits_0^\theta\Big(\frac{(\theta-s)^{r-1}}{(r-1)!}e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)+\ldots+e^{\mu(\theta-s)}\big(p_r(s)+q_r(s)\big)\Big)ds\Big)+$$

$$+g_r-p_r(0)-q_r(0)-\Delta'(\mu)z_{r-1}(0)-\ldots-\frac{\Delta^{(r-1)}(\mu)}{(r-1)!}z_1(0)\Big]=$$

$$=-\Big(\psi_{N_p}^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^{r-2}}{(r-2)!}e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big)-\ldots-$$

$$-\Big(\psi_{N_p}^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_{r-1}(s)+q_{r-1}(s)\big)ds\Big)-\Big(\psi_{N_p}^{(p)}(\xi), p_r(\theta)+q_r(\theta)\Big)+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\big(p_r(0)+q_r(0)\big)+$$

$$+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\Big(g_r-p_r(0)-q_r(0)-\Delta'(\mu)z_{r-1}(0)-\ldots-\frac{\Delta^{(r-1)}(\mu)}{(r-1)!}z_1(0)\Big). \quad (102)$$

Здесь мы учли формулу (72) (а точнее, равенство для последних компонент соответствующих векторов в левой и правой части этой формулы), вид функции $\psi^{(p)}_{N_p}(\xi)$, определяемый формулой (66), представление оператора B_0 в виде (7) и определение билинейной формы (10). Обозначим за f_r вектор в квадратных скобках в левой части (102). Используя теперь второе уравнение соответствующей системы задачи $\mathbf{P_{r-1}}$ и учитывая (88), (89), выводим из (102)

$$\psi^{(p)}_{N_p}(0)f_r = \Big(\psi^{(p)}_{N_p}(\xi), \frac{\theta^{r-2}}{(r-2)!}e^{\mu\theta}I\Big)z_1(0) + \ldots + \Big(\psi^{(p)}_{N_p}(\xi), e^{\mu\theta}I\Big)z_{r-1}(0) -$$
$$- \psi^{(p)}_{N_p}(0)\Big(\Delta'(\mu)z_{r-1}(0) + \ldots + \frac{\Delta^{(r-1)}(\mu)}{(r-1)!}z_1(0)\Big). \quad (103)$$

Осталось теперь воспользоваться формулами (84), (85) (а точнее, равенством для последних компонент соответствующих векторов в левой и правой части этих формул) для преобразования правой части (103) и учесть (8). Проделывая несложные преобразования, устанавливаем справедливость (94). Следовательно, первое уравнение системы в задаче $\mathbf{P_r}$ имеет решение и общее решение этого уравнения может быть записано в виде (95). Точно так же, как и в задаче $\mathbf{P_1}$, коэффициенты c_p определяем, подставляя (95) во второе уравнение соответствующей системы задачи $\mathbf{P_r}$:

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), \frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!}e^{\mu\theta}I\big)z_1(0) + \ldots + \big(\Psi^{(p)}(\xi), \theta e^{\mu\theta}I\big)z_{r-1}(0) + \big(\Psi^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big)z_r(0) =$$
$$= -\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^{r-1}}{(r-1)!}e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) - \ldots -$$
$$- \Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_r(s)+q_r(s)\big)ds\Big). \quad (104)$$

Откуда

$$c_p = -\Big(\psi^{(p)}_1(\xi), \int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^{r-1}}{(r-1)!}e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) - \ldots -$$
$$- \Big(\psi^{(p)}_1(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_r(s)+q_r(s)\big)ds\Big) - \big(\psi^{(p)}_1(\xi), \frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!}e^{\mu\theta}I\big)z_1(0) - \ldots -$$
$$- \big(\psi^{(p)}_1(\xi), \theta e^{\mu\theta}I\big)z_{r-1}(0) - \big(\psi^{(p)}_1(\xi), e^{\mu\theta}\tilde{z}_r\big). \quad (105)$$

Установим теперь справедливость N_p равенств (104) для каждого p. Если индекс p таков, что $\lambda^{(p)} \neq \mu$, справедливость равенств (104) проверяется точно так же, как и в случае 1. Необходимо лишь заметить, что при этом нам не требуется иметь представление для $z_s(0)$ $(s = 1, \ldots, r)$ вида $z_s(0) = \Delta^{-1}(\mu)f_s$. Достаточно лишь существования вектора $z_s(0)$, который удовлетворяет системе $\Delta(\mu)z_s(0) = f_s$.

Будем далее исследовать равенства (104) лишь для тех p, для которых $\lambda^{(p)} = \mu$. Заметим, что первое равенство в (104) верно в силу представления (95) для $z_r(0)$ и выбора коэффициентов c_p согласно формуле (105). Докажем справедливость $(\nu+1)$-го равенства в (104), где $1 \le \nu \le N_p - 1$. Правая часть $(\nu + 1)$-го равенства в (104) с учетом (72) имеет следующий вид:

$$\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi^{(p)}_{\nu+1}(0)\frac{(\theta-\xi)^r}{r!} + \psi^{(p)}_{\nu+2}(0)\frac{(\theta-\xi)^{r+1}}{(r+1)!} + \ldots + \psi^{(p)}_{N_p}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p+r-1-\nu}}{(N_p+r-1-\nu)!}\Big)\times$$
$$\times e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_1(\xi)+q_1(\xi)\big)d\xi+\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi^{(p)}_{\nu+1}(0)\frac{(\theta-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}+\ldots+\psi^{(p)}_{N_p}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p+r-2-\nu}}{(N_p+r-2-\nu)!}\Big)\times$$
$$\times e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_2(\xi)+q_2(\xi)\big)d\xi+\ldots+\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi^{(p)}_{\nu+1}(0)\frac{(\theta-\xi)^{2}}{2!}+\ldots+\psi^{(p)}_{N_p}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p+1-\nu}}{(N_p+1-\nu)!}\Big)\times$$
$$\times e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_{r-1}(\xi)+q_{r-1}(\xi)\big)d\xi+\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi^{(p)}_{\nu+1}(0)(\theta-\xi)+\ldots+\psi^{(p)}_{N_p}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p-\nu}}{(N_p-\nu)!}\Big)\times$$
$$\times e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_r(\xi)+q_r(\xi)\big)d\xi. \quad (106)$$

Распишем теперь ν-е равенство во втором уравнении соответствующей системы в задаче $\mathbf{P_{r-1}}$, учитывая (72). Получим

$$\Big(\psi^{(p)}_{\nu}(\xi), \frac{\theta^{r-2}}{(r-2)!}e^{\mu\theta}I\Big)z_1(0)+\ldots+\Big(\psi^{(p)}_{\nu}(\xi),\theta e^{\mu\theta}I\Big)z_{r-2}(0)+\Big(\psi^{(p)}_{\nu}(\xi),e^{\mu\theta}I\Big)z_{r-1}(0)=$$
$$=\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi^{(p)}_{\nu}(0)\frac{(\theta-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}+\psi^{(p)}_{\nu+1}(0)\frac{(\theta-\xi)^{r}}{r!}+\ldots+\psi^{(p)}_{N_p}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p+r-1-\nu}}{(N_p+r-1-\nu)!}\Big)\times$$
$$\times e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_1(\xi)+q_1(\xi)\big)d\xi+\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi^{(p)}_{\nu}(0)\frac{(\theta-\xi)^{r-2}}{(r-2)!}+\ldots+\psi^{(p)}_{N_p}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p+r-2-\nu}}{(N_p+r-2-\nu)!}\Big)\times$$
$$\times e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_2(\xi)+q_2(\xi)\big)d\xi+\ldots+\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi^{(p)}_{\nu}(0)(\theta-\xi)+\psi^{(p)}_{\nu+1}(0)\frac{(\theta-\xi)^{2}}{2!}+\ldots+$$
$$+\psi^{(p)}_{N_p}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p+1-\nu}}{(N_p+1-\nu)!}\Big)e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_{r-1}(\xi)+q_{r-1}(\xi)\big)d\xi. \quad (107)$$

Выразим общую часть (106) и (107) из соотношения (107) и подставим в (106). Таким образом, правая часть $(\nu+1)$-го равенства в (104) запишется в виде

$$\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi^{(p)}_{\nu+1}(0)(\theta-\xi)+\ldots+\psi^{(p)}_{N_p}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p-\nu}}{(N_p-\nu)!}\Big)e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_r(\xi)+q_r(\xi)\big)d\xi+$$
$$+\Big(\psi^{(p)}_{\nu}(\xi),\frac{\theta^{r-2}}{(r-2)!}e^{\mu\theta}I\Big)z_1(0)+\ldots+\Big(\psi^{(p)}_{\nu}(\xi),\theta e^{\mu\theta}I\Big)z_{r-2}(0)+\Big(\psi^{(p)}_{\nu}(\xi),e^{\mu\theta}I\Big)z_{r-1}(0)-$$

$$-\int_{-h}^{0}\int_{0}^{\theta}\Big(\psi_\nu^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_1(\xi)+q_1(\xi)\big)d\xi-\ldots-$$
$$-\int_{-h}^{0}\int_{0}^{\theta}\Big(\psi_\nu^{(p)}(0)(\theta-\xi)e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_{r-1}(\xi)+q_{r-1}(\xi)\big)d\xi. \quad (108)$$

В выражении (108) добавим и вычтем величину

$$\int_{-h}^{0}\int_{0}^{\theta}\psi_\nu^{(p)}(0)e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_r(\xi)+q_r(\xi)\big)d\xi=\psi_\nu^{(p)}(0)B_0\Big(\int_{0}^{\theta}e^{\mu(\theta-s)}\big(p_r(s)+q_r(s)\big)ds\Big).$$

Тогда, учитывая представление (7) оператора B_0, из первого уравнения соответствующей системы для задачи $\mathbf{P_r}$ выводим следующее представление для (108):

$$\int_{-h}^{0}\int_{0}^{\theta}\Big(\psi_\nu^{(p)}(0)+\psi_{\nu+1}^{(p)}(0)(\theta-\xi)+\ldots+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p-\nu}}{(N_p-\nu)!}\Big)e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_r(\xi)+q_r(\xi)\big)d\xi+$$
$$+\Big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),\frac{\theta^{r-2}}{(r-2)!}e^{\mu\theta}I\Big)z_1(0)+\ldots+\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),\theta e^{\mu\theta}I\big)z_{r-2}(0)+\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),e^{\mu\theta}I\big)z_{r-1}(0)-$$
$$-\psi_\nu^{(p)}(0)\Big(\frac{\Delta^{(r-1)}(\mu)}{(r-1)!}z_1(0)+\ldots+\Delta'(\mu)z_{r-1}(0)+\Delta(\mu)z_r(0)-g_r+p_r(0)+q_r(0)\Big). \quad (109)$$

Вспоминая формулу (66) для функции $\psi_\nu(\xi)$ и (10), замечаем, что первое слагаемое в (109) есть величина

$$-\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),p_r(\theta)+q_r(\theta)\big)+\psi_\nu^{(p)}(0)\big(p_r(0)+q_r(0)\big).$$

С учетом этого замечания и формул (88), (89), выражение (109) приобретает вид

$$\Big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),\frac{\theta^{r-2}}{(r-2)!}e^{\mu\theta}I\Big)z_1(0)+\ldots+\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),\theta e^{\mu\theta}I\big)z_{r-2}(0)+\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),e^{\mu\theta}I\big)z_{r-1}(0)-$$
$$-\psi_\nu^{(p)}(0)\Big(\frac{\Delta^{(r-1)}(\mu)}{(r-1)!}z_1(0)+\ldots+\Delta'(\mu)z_{r-1}(0)+\Delta(\mu)z_r(0)\Big). \quad (110)$$

Собирая слагаемые при $z_s(0)$ и применяя формулы (8), (84), (85), записываем (110) в виде

$$\Big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(0)\frac{\Delta^{(r)}(\mu)}{r!}+\ldots+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{\Delta^{(N_p+r-1-\nu)}}{(N_p+r-1-\nu)!}\Big)z_1(0)+\ldots+$$
$$+\Big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(0)\frac{\Delta''(\mu)}{2!}+\ldots+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{\Delta^{(N_p+1-\nu)}}{(N_p+1-\nu)!}\Big)z_{r-1}(0)-\psi_\nu^{(p)}(0)\Delta(\mu)z_r(0)=$$
$$=\Big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(\xi),\frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!}e^{\mu\theta}I\Big)z_1(0)+\ldots+\big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(\xi),\theta e^{\mu\theta}I\big)z_{r-1}(0)+\big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(\xi),e^{\mu\theta}I\big)z_r(0). \quad (111)$$

Здесь при выводе последнего слагаемого в правой части мы также воспользовались формулой (99), очевидно справедливой и при замене $z_1(0)$ на $z_r(0)$. Осталось теперь заметить, что правая часть (111) совпадает с левой частью $(\nu+1)$-го равенства в (104). Тем самым справедливость $(\nu+1)$-го равенства в (104) доказана.

Теорема доказана. □

Заметим, что в силу свойств 2^0 и 3^0 функций $v_1(t), \dots, v_n(t)$ построенная нами в этом разделе матрица $\hat{H}(t,\theta)$ вида (39) удовлетворяет системе

$$\Phi(\theta)\Psi(0)G\big(t,\Phi(\theta)+\hat{H}(t,\theta)\big)+\hat{H}(t,\theta)\Big(D+\Psi(0)G\big(t,\Phi(\theta)+\hat{H}(t,\theta)\big)\Big)+\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{H}}{\partial\theta}+R_1(t,\theta), & -h\le\theta<0,\\ B_0\hat{H}+G\big(t,\Phi(\theta)+\hat{H}(t,\theta)\big)+R_1(t,0)-R_2(t), & \theta=0.\end{cases}\tag{112}$$

Здесь матрицы $R_1(t,\theta)$ и $R_2(t)$ таковы, что $\|R_1(t,\cdot)\|_{C_h}, R_2(t)\in L_1[t_0,\infty)$, и матрица $R_2(t)$ составлена из абсолютно интегрируемых на $[t_0,\infty)$ элементов матрицы $G\big(t,\Phi(\theta)+\hat{H}(t,\theta)\big)$.

В завершение первой части работы отметим, что в случае, когда система (1) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений, построение критического многообразия может быть проведено по схеме, предложенной в работе [4].

Список литературы

1. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. (*Bellman R., Cooke K.L.* Differential-Difference equations. New York: Academic Press, 1963.)

2. *Нестеров П.Н.* Асимптотическое интегрирование одного класса систем функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. №1(3). С. 137–145. [*Nesterov P.N.* Asimptoticheskoe integrirovanie odnogo klassa sistem funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta imeni N.I. Lobachevskogo. 2013. №1(3). P. 137–145 (in Russian)].

3. *Нестеров П.Н.* Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №6. С. 731–742. (English transl.: *Nesterov P.N.* Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients // Differ. Equ. 2007. V. 43, No. 6. P. 745–756.)

4. *Нестеров П.Н.* Об асимптотике критических решений систем дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18, №3. С. 21–41. (English transl.: *Nesterov P.N.* On asymptotics for critical solutions of systems of differential equations with oscillatory decreasing coefficients // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. Vol. 47, No. 7. P. 500–515.)

5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. (*Hale J.K.* Theory of functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1977.)

6. *Ai S.* Asymptotic integration of delay differential systems // J. Math. Anal. Appl. 1992. Vol. 165. P. 71–101.

7. *Ait Babram M., Hbid M.L., Arino O.* Approximation scheme of a center manifold for functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1997. Vol. 213. P. 554–572.

8. *Arino O., Győri I.* Asymptotic integration of delay differential systems // J. Math. Anal. Appl. 1989. Vol. 138. P. 311–327.

9. *Arino O., Győri I., Pituk M.* Asymptotically diagonal delay differential systems // J. Math. Anal. Appl. 1996. Vol. 204. P. 701–728.

10. *Arino O., Hbid M.L., Ait Dads E. (Eds.)* Delay differential equations and applications. Dordrecht: Springer, 2006.

11. *Balachandran B., Kalmár-Nagy T., Gilsinn D.E. (Eds.)* Delay differential equations: recent advances and new directions. New York: Springer, 2009.

12. *Győri I., Pituk M.* L^2-Perturbation of a linear delay differential equation // J. Math. Anal. Appl. 1995. Vol. 195. P. 415–427.

13. *Carr J.* Applications of centre manifold theory. New York: Springer-Verlag, 1981.

14. *Cassel J.S., Hou Z.* L^p-Perturbation of linear functional differential equations // Monatsh. Math. 1999. Vol. 128. P. 211–226.

15. *Castillo S., Pinto M.* Levinson theorem for functional differential systems // Nonlinear Anal. 2001. Vol. 47. P. 3963–3975.

16. *Castillo S., Pinto M.* An asymptotic theory for nonlinear functional differential equations // Comput. Math. Appl. 2002. Vol. 44. P. 763–775.

17. *Hale J., Verduyn Lunel S.M.* Introduction to functional differential equations. Appl. Math. Sciences 99. New York: Springer-Verlag, 1993.

18. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

19. *Nesterov P.* Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients // Monatsh. Math. 2013. Vol. 171, No. 2. P. 217–240.

20. *Pituk M.* The Hartman–Wintner theorem for functional differential equations // J. Differential Equations. 1999. Vol. 155. P. 1–16.

21. *Pituk M.* A Perron type theorem for functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2006. Vol. 316. P. 24–41.

22. *Pituk M.* Asymptotic behavior and oscillation of functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2006. Vol. 322. P. 1140–1158.

Center Manifold Method in the Asymptotic Integration Problem for Functional Differential Equations with Oscillatory Decreasing Coefficients. I

Nesterov P.N.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: functional-differential equations, critical manifold, asymptotic integration.

In this paper, we study the asymptotic integration problem in the neighborhood of infinity for a certain class of linear functional differential systems. We construct the asymptotics for solutions of the considered systems in the critical case. Using the ideas of the center manifold method, we show the existence of the so-called critical manifold that is positively invariant for trajectories of the initial system. We establish that the asymptotics for solutions of the system on this manifold defines the asymptotics for all solutions of the initial system. In the first part of this work, we propose an algorithm for an approximate construction of the critical manifold. Moreover, we establish the unique solvability for auxiliary algebraic problems that occur within the algorithm implementation.

Сведения об авторе:
Нестеров Павел Николаевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент