Модел. и анализ информ. систем. Т. **18**, № **1** (2011) 5–27

УДК 517.929

Временные шкалы в задаче об асимптотике решений дискретных адиабатических осцилляторов

Нестеров П.Н.[1]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: mathematix@mail.ru

получена 10 ноября 2010

Ключевые слова: дискретный адиабатический осциллятор, временная шкала, метод усреднения, асимптотика

Предложен вариант метода усреднения для систем уравнений, заданных на временных шкалах. Полученные результаты используются для построения асимптотики решений некоторых уравнений из класса дискретных адиабатических осцилляторов.

1. Постановка задачи. В работах [1, 2] исследовалось уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \big(\omega^2 + q(t)\big)\, x = 0 \tag{1}$$

с $\omega = 1$ и функцией $q(t)$ вида

$$q(t) = \frac{a \sin\varphi(t)}{t^\rho}, \qquad \rho > 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Функция $\varphi(t)$ описывается одной из следующих формул:

$$\varphi(t) = t + \alpha \ln t \qquad \text{или} \qquad \varphi(t) = t + \alpha t^\beta,$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $0 < \beta < 1$. Показано, что в пространстве параметров уравнения (1) существует плоскость (гиперплоскость), которая разделяет области устойчивости и неустойчивости решений. На самой же плоскости имеется зона параметрического резонанса (область неустойчивости решений).

Поскольку функция $q(t)$ «мала» на бесконечности, уравнение вида (1) относится к классу так называемых адиабатических осцилляторов. Дискретным аналогом уравнения (1) называют уравнение

$$x(n+2) - 2(\cos\omega)x(n+1) + \big(1 + q(n)\big)x(n) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственные контракты № 02.740.11.0197, № П2223 и № П1229.)

где $0 < \omega < \pi$, а дискретная функция $q(n)$ в определенном смысле «мала» при $n \to \infty$. В данной статье мы построим асимптотику решений уравнения (2), в котором

$$q(n) = \frac{a \sin\bigl(\lambda\omega n + \alpha \ln n\bigr)}{n^\rho}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 < \rho \le 1. \tag{3}$$

В дальнейшем мы будем считать, что

$$\lambda\omega \ne 0 \mod 2\pi. \tag{4}$$

Для изучения асимптотического поведения решений уравнения (2) мы будем использовать технику усреднения, а также разностный вариант теоремы Левинсона [3] — теорему Бензаида–Латса. Метод усреднения применительно к задаче построения асимптотики решений систем разностных уравнений, содержащих колебательно убывающие величины, изложен в работе [4]. Суть метода сводится к следующему. С помощью специальным образом конструируемых замен переменных удается избавиться от осциллирующих величин, что в дальнейшем существенно упрощает процесс получения асимптотических формул. В нашей работе мы перенесем идеологию метода усреднения на случай уравнений, заданных на временных шкалах. Соответствующие результаты изложены в разделе 3.

В следующем разделе мы остановимся на одном результате, который позволяет получать асимптотические представления для решений систем линейных разностных уравнений специального вида.

2. Теорема Бензаида–Латса. Рассмотрим следующую систему линейных разностных уравнений:

$$x(n+1) = \bigl(\Lambda(n) + R(n)\bigr)x(n), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

где $\Lambda(n) = \operatorname{diag}\bigl(\lambda_1(n), \ldots, \lambda_m(n)\bigr)$ и $\lambda_i^{-1}(n)R(n) \in \ell_1$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Мы пишем, что $f(n) \in \ell_1$, где $f(n)$ — скалярная функция, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| < \infty.$$

Если же $F(n)$ — матрица, то запись $F(n) \in \ell_1$ означает, что $f(n) = \|F(n)\| \in \ell_1$, где $\|\cdot\|$ — некоторая матричная норма. Системы вида (5) называют ℓ-диагональными.

Имеет место следующий разностный аналог теоремы Левинсона (см. [5]).

Теорема 1 (Benzaid–Lutz)**.** *Пусть*

(1) $\lambda_i(n) \ne 0, \quad 1 \le i \le m, \quad n \ge n_0,$

(2) $\lambda_i^{-1}(n)R(n) \in \ell_1, \quad 1 \le i \le m,$

(3) *выполнены следующие условия (условия дихотомии): найдутся положительные константы $\mu > 0$ и $K > 0$ такие, что для любой пары индексов (i,j), $i \ne j$, имеет место или*

$$\prod_{l=n_0}^{n} \left|\frac{\lambda_i(l)}{\lambda_j(l)}\right| \to \infty, \quad n \to \infty \quad \text{и} \quad \prod_{l=n_1}^{n_2} \left|\frac{\lambda_i(l)}{\lambda_j(l)}\right| \ge \mu > 0, \quad n_0 \le n_1 \le n_2, \tag{6}$$

или

$$\prod_{l=n_1}^{n_2}\left|\frac{\lambda_i(l)}{\lambda_j(l)}\right| \leq K, \qquad n_0 \leq n_1 \leq n_2. \tag{7}$$

Тогда фундаментальная матрица $X(n)$ системы (5) допускает следующее асимптотическое представление при $n \to \infty$:

$$X(n) = \Big[I + o(1)\Big] \prod_{l=n_0}^{n-1} \Lambda(l). \tag{8}$$

Замечание 1. Если $|\lambda_i(n)| \geq \delta > 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$, то условие 2 теоремы 1 заведомо выполняется, когда $R(n) \in \ell_1$.

Замечание 2. Отметим следующие условия, достаточные для дихотомии (6), (7). Пусть $\lambda_i(n) \to \lambda_i \neq 0$, $1 \leq i \leq m$ и

а) $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ для $i \neq j$. Тогда, если $|\lambda_i| > |\lambda_j|$, то имеет место (6), в противном случае выполнено (7).

б) $|\lambda_i| = |\lambda_j|$ для некоторой пары индексов (i, j), $i \neq j$. Положим

$$|\lambda_i(n)/\lambda_j(n)| = 1 + r_{ij}(n),$$

где $r_{ij}(n) \to 0$, $n \to \infty$. Тогда, как несложно показать, если $r_{ij}(n)$ не меняет своего знака при $n \geq n_0$, то условия дихотомии также оказываются выполненными. Если же $r_{ij}(n)$ меняет свой знак, но ряд $\sum_{l=n_0}^{\infty} r_{ij}(l)$ сходится, то выполнено условие дихотомии (7). В случае же расходимости указанного ряда асимптотическое представление (8), вообще говоря, может не иметь места.

Таким образом, чтобы построить асимптотику решений системы разностных уравнений, можно попытаться привести ее к ℓ-диагональному виду и затем (если это удается) воспользоваться теоремой 1. Отметим один из результатов в этом направлении.

Рассмотрим следующую систему разностных уравнений:

$$x(n+1) = \big(A_0 + V(n) + R(n)\big)x(n), \tag{9}$$

где матрица A_0 невырождена и все ее собственные числа различны. Далее, $V(n) \to 0$, $n \to \infty$, $\Delta V(n) \in \ell_1$ $(\Delta f(n) = f(n+1) - f(n))$ и $R(n) \in \ell_1$. Имеет место следующая лемма (см. [5]).

Лемма 1. *Существует невырожденная при $n \geq n_0$ матрица $C(n)$ такая, что:*

(1) *$C(n) \to C_0$ при $n \to \infty$, где матрица C_0 приводит матрицу A_0 к диагональному виду,*

(2) $\Delta C(n) \in \ell_1$,

(3) *замена $x(n) = C(n)y(n)$ приводит систему (9) к ℓ-диагональной форме*

$$y(n+1) = \big(\Lambda(n) + R_1(n)\big)y(n). \tag{10}$$

Здесь $\Lambda(n)$ — диагональная матрица, составленная из собственных чисел матрицы $A_0 + V(n)$ и $R_1(n) \in \ell_1$.

В частности, из леммы 1 и теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 2. *Если собственные числа матрицы $A_0 + V(n)$ удовлетворяют условиям дихотомии (6), (7), то фундаментальная матрица $X(n)$ системы (9) имеет следующую асимптотику при $n \to \infty$:*

$$X(n) = \Big[C_0 + o(1)\Big] \prod_{l=n_1}^{n-1} \Lambda(l),$$

где по столбцам матрицы C_0 расположены собственные векторы матрицы A_0, отвечающие собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, а $\Lambda(n)$ — диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа $\lambda_1(n), \dots, \lambda_m(n)$ матрицы $A_0 + V(n)$, причем

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \lambda_1(n), \dots, \lambda_m = \lim_{n\to\infty} \lambda_m(n).$$

3. Временные шкалы. Элементы метода усреднения для уравнений, заданных на временных шкалах. Временны́е шкалы (time scales) как математический объект впервые стали рассматриваться в работах Б. Олбаха и С. Хилгера (см. [6, 7]), где авторы попытались построить универсальную теорию, в которой был бы предложен общий подход к теориям дифференциальных и разностных уравнений. Оказывается, что многим результатам, полученным отдельно для каждой из этих теорий, можно придать больший характер общности, если допустить возможность задания динамических систем на произвольных замкнутых подмножествах множества $\mathbb{R}$.

Изложим некоторые базовые факты из теории временных шкал. Все приводимые ниже результаты могут быть найдены, например, в монографии [8].

Временно́й шкалою[2] называют произвольное замкнутое подмножество действительной оси $\mathbb{R}$. Всюду далее мы будем рассматривать только неограниченные сверху шкалы $\mathbb{T}$. Определим следующие функции (так называемые *операторы перехода*: *вперед* и *назад* соответственно):

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : \ s > t, t \in \mathbb{T}\}, \qquad \rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : \ s < t, t \in \mathbb{T}\}$$

и $\sup\emptyset = \inf\mathbb{T}$. Говорят, что точка $t \in \mathbb{T}$ является *плотной слева*, *изолированной слева*, *плотной справа*, *изолированной справа*, если $\rho(t) = t$, $\rho(t) < t$, $\sigma(t) = t$ или $\sigma(t) < t$ соответственно. Точка $t \in \mathbb{T}$, изолированная слева и справа, называется просто *изолированной*. Функцию $\mu(t)$: $\mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ (*зернистость* временной шкалы $\mathbb{T}$; *graininess function*) определим следующим образом:

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Будем говорить, что функция f: $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $t \in \mathbb{T}$, если существует предел

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s}, \qquad s \in \mathbb{T}/\{\sigma(t)\}.$$

[2] В дальнейшем мы будем использовать термин «шкала», имея в виду именно временну́ю шкалу.

Величину $f\big(\sigma(t)\big)$ мы будем иногда обозначать символом f^σ. Справедлива

Лемма 2. *Пусть $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$. Тогда*

(1) если f дифференцируема в точке t, то она непрерывна в этой точке;

(2) если точка t изолирована справа, и f непрерывна в точке t, то

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)};$$

(3) если точка t плотна справа, то функция f дифференцируема в этой точке в том и только в том случае, когда существует предел

$$\lim_{s\to t} \frac{f\big(t\big) - f(s)}{t-s}.$$

В этом случае величина $f^\Delta(t)$ равняется значению этого предела;

(4) если $f^\Delta(t)$ существует, то $f^\sigma = f(t) + \mu(t) f^\Delta(t)$;

(5) если функции f и g дифференцируемы в точке t, то в этой точке дифференцируема также функция fg и $(fg)^\Delta = f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta$;

(6) если функции f и g дифференцируемы в точке t, и $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, то

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Функцию f: $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ назовем *rd-непрерывной (rd-continuous)*, если она имеет левосторонний предел в каждой плотной слева точке $t \in \mathbb{T}$ и непрерывна в каждой плотной справа точке. Функция F: $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется *первообразной* для функции $f(t)$, если $F^\Delta(t) = f(t)$ для всех $t \in \mathbb{T}$. Справедлив следующий результат.

Лемма 3. *Если функция $f(t)$ rd-непрерывна, то у нее существует первообразная.*

Пусть функция $f(t)$ rd-непрерывна, положим тогда

$$\int\limits_r^s f(\tau)\Delta\tau = F(s) - F(r), \qquad r, s \in \mathbb{T}.$$

Пусть $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а функции f и g являются rd-непрерывными, тогда:

1. $\int_a^b \big[\alpha f(t) + \beta g(t)\big]\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t + \beta \int_a^b g(t)\Delta t$;
2. $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$;
3. $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$;
4. $\int_a^a f(t)\Delta t = 0$;
5. Если $|f(t)| \le g(t)$ для $t \in [a, b) \cap \mathbb{T}$, то $\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \le \int_a^b g(t)\Delta t$;
6. Если на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ существуют только изолированные точки $t \in \mathbb{T}$, то

$$\int\limits_a^b f(t)\Delta t = \sum_{t\in[a,b)\cap\mathbb{T}} \mu(t) f(t).$$

Если функция f rd-непрерывна, то

$$\int\limits_a^\infty f(t)\Delta t = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(t)\Delta t$$

при условии, что этот предел существует. Мы будем писать, что $f(t) \in L_1^{\mathbb{T}}[t_0,\infty)$, если существует интеграл $\int_{t_0}^\infty |f(t)|\Delta t$. Отметим следующий основополагающий результат о системах линейных динамических уравнений, заданных на шкалах.

Лемма 4. *Пусть элементами матрицы $A(t)$ являются rd-непрерывные функции и матрица $I+\mu(t)A(t)$ невырождена при всех $t\in\mathbb{T}$. Тогда у системы*

$$y^\Delta(t) = A(t)y(t)$$

существует фундаментальная матрица решений $Y(t)$, удовлетворяющая условию $Y(t_0)=I$, $t_0\in\mathbb{T}$.

На случай произвольных шкал переносятся многие результаты, известные для дифференциальных и разностных уравнений. Так, в работе [9] строится соответствующий аналог теоремы Левинсона. Мы распространим идеи метода усреднения на случай шкал, которые при $t\to\infty$ по своему устройству оказываются схожими со шкалой $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ или шкалой $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$. Именно, мы рассмотрим два типа шкал, для которых $\mu(t)\to 0$ или $\mu(t)\to 1$ при $t\to\infty$ соответственно.

Исследуем сначала тот случай, когда $\mu(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Рассмотрим следующую линейную систему уравнений с колебательно убывающими коэффициентами:

$$x^\Delta(t) = \Big(A_0 + \sum_{i=1}^n A_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} A_{i_1i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} A_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R(t)\Big)x(t). \quad (11)$$

Здесь A_0, $A_{i_1\ldots i_l}(t)$, $R(t)$ – квадратные матрицы, $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ – скалярные функции, $x(t)\in\mathbb{C}^m$ и $t\in\mathbb{T}$. Будем говорить, что матрица $A(t)$ принадлежит классу $\Sigma^{\mathbb{T}}$, если она имеет вид

$$A(t) = \sum_{j=1}^N A_j(\mu)e^{\mathrm{i}\lambda_j t}. \quad (12)$$

Здесь матрицы $A_j(\mu)$ раскладываются в асимптотический ряд по степеням $\mu(t)$, т.е.

$$A_j(\mu) = \sum_{l=0}^p A_l^{(j)}\mu^l(t) + O\left(\mu^{p+1}(t)\right), \quad (13)$$

где $A_l^{(j)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные матрицы; λ_j $(j=1,\ldots,N)$ — вещественные числа. Средним значением матрицы $A(t)\in\Sigma^{\mathbb{T}}$ назовем функцию вида

$$\langle A(t)\rangle = \sum_{\lambda_j=0} A_j(\mu). \quad (14)$$

Если $A(t) \in \Sigma^{\mathbb{T}}$ и $\langle A(t)\rangle \equiv 0$, то будем писать, что $A(t) \in \Sigma_0^{\mathbb{T}}$. Предположим, что в системе (11)

1^0. A_0 — постоянная матрица, все собственные значения которой вещественны.

2^0. $v_1(t) \to 0, v_2(t) \to 0, \ldots, v_n(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

3^0. $v_1^{\Delta}(t), v_2^{\Delta}(t), \ldots, v_n^{\Delta}(t) \in L_1^{\mathbb{T}}[t_0, \infty)$.

4^0. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1^{\mathbb{T}}[t_0, \infty)$ для любого набора индексов $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{k+1} \le n$.

5^0. Матрицы $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ принадлежат классу $\Sigma^{\mathbb{T}}$.

6^0. Матрица $R(t) \in L_1^{\mathbb{T}}[t_0, \infty)$.

7^0. $\mu(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

8^0. $\mu^{p+1}(t)v_i(t) \in L_1^{\mathbb{T}}[t_0, \infty)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $p \ge 0$. Кроме того, если $p > 0$, то мы потребуем, чтобы функция $\mu(t)$ была дифференцируемой и $\mu^{\Delta}(t)v_i(t) \in L_1^{\mathbb{T}}[t_0, \infty)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Справедлива

Теорема 3. *Система* (11) *при достаточно больших t заменой*

$$x(t) = \Big[I + \sum_{i=1}^{n} Y_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} Y_{i_1 i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y(t), \quad (15)$$

где I — единичная матрица, а матрицы $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ принадлежат классу $\Sigma_0^{\mathbb{T}}$, приводится к усредненной форме

$$y^{\Delta}(t) = \Big(A_0 + \sum_{i=1}^{n} \hat{A}_i(\mu)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} \hat{A}_{i_1 i_2}(\mu)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} \hat{A}_{i_1\ldots i_k}(\mu)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R_1(t)\Big)y(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (16)$$

с матрицами $\hat{A}_{i_1\ldots i_l}(\mu)$ вида (13) *и матрицей $R_1(t) \in L_1^{\mathbb{T}}[t_0, \infty)$.*

Доказательство. Подставим (15) в (11) и учтем (16). Опуская для сокращения записи пределы суммирования, получаем

$$\Big[\sum Y_i(t)v_i(t) + \ldots + \sum Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]^{\Delta} y + \Big[I + \sum Y_i^{\sigma}v_i^{\sigma} + \ldots + \\ + \sum Y_{i_1\ldots i_k}^{\sigma}v_{i_1}^{\sigma}\cdot\ldots\cdot v_{i_k}^{\sigma}\Big] \times \Big[A_0 + \sum \hat{A}_i v_i(t) + \ldots + \sum \hat{A}_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + \\ + R_1(t)\Big]y = \Big[A_0 + \sum A_i(t)v_i(t) + \ldots + \sum A_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R(t)\Big] \times \\ \times \Big[I + \sum Y_i(t)v_i(t) + \ldots + \sum Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y. \quad (17)$$

Заметим далее, что
$$v_i^\sigma = v_i(t) + \mu v_i^\Delta. \tag{18}$$
Кроме того,
$$\Big[\sum Y_i(t)v_i(t)+\ldots+\sum Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]^\Delta = \Big[\sum\Big(Y_i^\Delta(t)v_i(t)+Y_i^\sigma v_i^\Delta(t)\Big)+\ldots+$$
$$+\sum\Big(Y_{i_1\ldots i_k}^\Delta(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)+Y_{i_1\ldots i_k}^\sigma\big(v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\big)^\Delta\Big)\Big]=$$
$$=\Big[\sum Y_i^\Delta(t)v_i(t)+\ldots+\sum Y_{i_1\ldots i_k}^\Delta(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)+\big\{L_1^{\mathbb{T}}\big\}\Big], \tag{19}$$
где символом $\big\{L_1^{\mathbb{T}}\big\}$ обозначены слагаемые из класса $L_1^{\mathbb{T}}[t_0,\infty)$. Учитывая формулы (18), (19), а также предположения $3^0, 4^0, 6^0, 7^0$ теоремы, соберем слагаемые из класса $L_1^{\mathbb{T}}[t_0,\infty)$ в (17) по обе стороны от знака равенства. Кроме того, в полученное равенство включим также некоторые дополнительные слагаемые из класса $L_1^{\mathbb{T}}[t_0,\infty)$, которые возникнут позднее. Поскольку матрица
$$\Big[I+\sum Y_i^\sigma v_i^\sigma+\ldots+\sum Y_{i_1\ldots i_k}^\sigma v_{i_1}^\sigma\cdot\ldots\cdot v_{i_k}^\sigma\Big]$$
в силу предположения 2^0 и ограниченности матриц $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ (они определяются ниже) обратима и обратная к ней ограничена при $t\ge t_0$, то из полученного таким образом соотношения можно выразить матрицу $R_1(t)$ и она, очевидно, будет принадлежать классу $L_1^{\mathbb{T}}[t_0,\infty)$. Теперь будем приравнивать слагаемые при $v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_l}(t)$, $l\le k$, находящиеся в обеих частях равенства (17). Приравнивание «свободных членов» дает нам тривиальное тождество
$$IA_0 = A_0I.$$
Для дальнейшего изложения нам придется ввести несколько обозначений. Определим следующую символьную функцию:
$$\kappa(l)=\underbrace{\kappa\ldots\kappa}_{l\text{ раз}},\quad \kappa=1,2,\ldots,n,\quad l=1,2,\ldots,k$$
и $\kappa(0)=0$. Например, $1(2)=11$, $2(4)=2222$, $5(0)=0$ и т.д. Итак, нам требуется приравнять слагаемые при $v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_l}(t)$. Набор индексов
$$(i_1i_2\ldots i_l),\quad 1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_l\le n$$
мы представим в виде
$$\big(\kappa_1(j_1)\kappa_2(j_2)\ldots\kappa_s(j_s)\big),\quad \text{где}\quad \kappa_1<\kappa_2<\ldots<\kappa_s,\quad s\ge1,$$
и $j_1+j_2+\ldots+j_s=l$. К примеру, набор индексов (112333) мы записываем следующим образом: $\big(1(2)2(1)3(3)\big)$. В формулах, с которыми мы встретимся ниже, могут содержаться наборы индексов, включающие 0. Например, $\big(1(1)03(1)\big)$. Все нули из

таких наборов следует удалить. Таким образом, набор индексов в последнем примере должен иметь вид $\big(1(1)3(1)\big) = (13)$. Мы также будем считать, что $(00\dots0) = (0)$ и $Y_0(t) = I$. Наконец, введем следующие функции для $i = 1, \dots, s$:

$$\rho_i(x) = \begin{cases} 1, & x \le j_i \\ 0, & x > j_i \end{cases}.$$

Итак, приравнивая слагаемые при $v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_l}(t)$ в (17), мы получаем следующие линейные неоднородные уравнения для определения матриц $Y_{i_1\dots i_l}(t)$ и $\hat{A}_{i_1\dots i_l}(\mu)$:

$$Y^{\Delta}_{i_1i_2\dots i_l} + Y^{\sigma}_{i_1i_2\dots i_l}A_0 - A_0Y_{i_1i_2\dots i_l} = \sum_{r=0}^{l-1} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_s=r \\ \rho_1(l_1)\cdot\ldots\cdot\rho_s(l_s)\neq 0}} A_{\kappa_1(j_1-l_1)\dots\kappa_s(j_s-l_s)}(t)Y_{\kappa_1(l_1)\dots\kappa_s(l_s)}(t) - \\ - \sum_{r=0}^{l-1} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_s=r \\ \rho_1(l_1)\cdot\ldots\cdot\rho_s(l_s)\neq 0}} Y^{\sigma}_{\kappa_1(l_1)\dots\kappa_s(l_s)}\hat{A}_{\kappa_1(j_1-l_1)\dots\kappa_s(j_s-l_s)}(\mu). \quad (20)$$

Здесь целые числа $l_1, \dots, l_s$ могут принимать значения от нуля до r включительно. Матрицу $\hat{A}_{i_1\dots i_l}(\mu)$ определим из условия равенства нулю величины $\langle\cdot\rangle$, вычисленной для правой части (20). Именно,

$$\hat{A}_{i_1\dots i_l}(\mu) = \left\langle \sum_{r=0}^{l-1} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_s=r \\ \rho_1(l_1)\cdot\ldots\cdot\rho_s(l_s)\neq 0}} A_{\kappa_1(j_1-l_1)\dots\kappa_s(j_s-l_s)}(t)Y_{\kappa_1(l_1)\dots\kappa_s(l_s)}(t) \right\rangle. \quad (21)$$

Попробуем удовлетворить уравнению (20) с точностью до слагаемых, произведение которых с функцией $v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_l}(t)$ принадлежит классу $L_1^{\mathbb{T}}[t_0, \infty)$, при помощи подходящим образом построенной матрицы $Y_{i_1i_2\dots i_l}(t)$ из класса $\Sigma_0^{\mathbb{T}}$. Положим

$$Y_{i_1i_2\dots i_l}(t) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{Y}_j^{(i_1\dots i_l)}(\mu)e^{\mathrm{i}\lambda_j t}, \quad \lambda_j \neq 0, \quad (22)$$

и

$$\tilde{Y}_j^{(i_1\dots i_l)}(\mu) = \sum_{r=0}^{p} \beta_r^{(j)}\mu^r(t), \quad (23)$$

где постоянные матрицы $\beta_r^{(j)}$ подлежат определению. Имеем

$$Y^{\sigma}_{i_1i_2\dots i_l} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{Y}_j^{(i_1\dots i_l)}\big(\mu(\sigma)\big)e^{\mathrm{i}\lambda_j\sigma(t)} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{Y}_j^{(i_1\dots i_l)}\big(\mu(\sigma)\big)e^{\mathrm{i}\lambda_j\mu(t)}e^{\mathrm{i}\lambda_j t}.$$

Замечая, что

$$\mu(\sigma) = \mu\big(1 + \mu^{\Delta}\big),$$

получаем

$$\tilde{Y}_j^{(i_1\dots i_l)}\big(\mu(\sigma)\big) = \sum_{r=0}^{p} \beta_r^{(j)}\mu^r\big(\sigma(t)\big) = \sum_{r=0}^{p} \beta_l^{(j)}\mu^r(t) + O\big(\mu\mu^{\Delta}\big) = \tilde{Y}_j^{(i_1\dots i_l)}(\mu) + O\big(\mu\mu^{\Delta}\big).$$

Откуда

$$Y^{\sigma}_{i_1 i_2\dots i_l} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{Y}_j^{(i_1\dots i_l)}(\mu) e^{\mathrm{i}\lambda_j \mu(t)} e^{\mathrm{i}\lambda_j t} + O\big(\mu \mu^{\Delta}\big).$$

Поскольку

$$\exp\{\mathrm{i}\lambda_j \mu(t)\} = \sum_{l=0}^{p} \frac{(\mathrm{i}\lambda_j)^l}{l!} \mu^l(t) + O\big(\mu^{p+1}(t)\big), \qquad t\to\infty, \tag{24}$$

а перед уравнением (20) имеется множитель $v_{i_1}(t)\cdot \ldots \cdot v_{i_l}(t)$, то в силу предположения 8^0 мы можем не учитывать соответствующие слагаемые из класса $L_1^{\mathbb{T}}[t_0,\infty)$. Таким образом, мы можем считать, что матрица $Y^{\sigma}_{i_1 i_2\dots i_l}$ принадлежит классу $\Sigma_0^{\mathbb{T}}$, что окончательно обосновывает формулу (21).

Предположим сначала, что $\mu(t)\neq 0$. Тогда уравнение (20) может быть переписано следующим образом:

$$Y^{\sigma}_{i_1 i_2\dots i_l}\Big[\mu^{-1}I + A_0\Big] - \Big[\mu^{-1}I + A_0\Big] Y_{i_1 i_2\dots i_l} = \sum_{j=1}^{N} \Upsilon_j^{(i_1\dots i_l)}(\mu) e^{\mathrm{i}\lambda_j t}, \qquad \lambda_j \neq 0, \tag{25}$$

$$\Upsilon_j^{(i_1\dots i_l)}(\mu) = \sum_{r=0}^{p} \gamma_r^{(j)} \mu^r(t). \tag{26}$$

Здесь мы учли вид матриц, находящихся в правой части (20). Подставим в формулу (25) разложения для матриц $Y^{\sigma}_{i_1 i_2\dots i_l}$ и $Y_{i_1 i_2\dots i_l}$ и соберем слагаемые при одинаковых показателях экспоненты. Отбрасывая слагаемые из класса $L_1^{\mathbb{T}}[t_0,\infty)$, получаем

$$\tilde{Y}_j^{(i_1\dots i_l)} e^{\mathrm{i}\lambda_j \mu}\Big[\mu^{-1}I + A_0\Big] - \Big[\mu^{-1}I + A_0\Big]\tilde{Y}_j^{(i_1\dots i_l)} = \Upsilon_j^{(i_1\dots i_l)}(\mu).$$

Подставим в это равенство формулы (22), (26), а также разложение (24). Имеем

$$\Bigg[\sum_{\nu=0}^{p} \beta_\nu^{(j)} \mu^\nu\Bigg]\Bigg[\sum_{\nu=0}^{p+1} \frac{\big(\mathrm{i}\lambda_j\big)^\nu}{\nu!}\mu^\nu(t)\Bigg]\Big[\mu^{-1}I + A_0\Big] -$$
$$- \Big[\mu^{-1}I + A_0\Big]\Bigg[\sum_{\nu=0}^{p} \beta_\nu^{(j)} \mu^\nu(t)\Bigg] = \sum_{\nu=0}^{p} \gamma_\nu^{(j)} \mu^\nu(t). \tag{27}$$

Собирая теперь слагаемые при одинаковых степенях $\mu(t)$, получаем следующие матричные уравнения для определения матриц $\beta_\nu^{(j)}$ $(\nu = 0,\dots,p)$:

$$\begin{aligned}
&\mu^0: &&\beta_0^{(j)}\big[\mathrm{i}\lambda_j I + A_0\big] - A_0\beta_0^{(j)} = \gamma_0^{(j)},\\
&\mu^1: &&\beta_1^{(j)}\big[\mathrm{i}\lambda_j I + A_0\big] - A_0\beta_1^{(j)} = \gamma_1^{(j)} - \beta_0^{(j)}\Big[\frac{\mathrm{i}\lambda_j}{2} I + A_0\Big]\mathrm{i}\lambda_j,\\
&\dots &&\dots\\
&\mu^p: &&\beta_p^{(j)}\big[\mathrm{i}\lambda_j I + A_0\big] - A_0\beta_p^{(j)} = \gamma_p^{(j)} - \sum_{\nu=0}^{p-1}\beta_\nu^{(j)}\Big[\frac{\mathrm{i}\lambda_j}{p-\nu+1} I + A_0\Big]\frac{(\mathrm{i}\lambda_j)^{p-\nu}}{(p-\nu)!}.
\end{aligned}$$

Эти уравнения однозначно разрешимы в силу вещественности спектра матрицы A_0 (см. [10]).

Пусть теперь $\mu(t)=0$ и уравнение (20) приобретает следующий вид:

$$Y^{\Delta}_{i_1 i_2\dots i_l}+Y^{\sigma}_{i_1 i_2\dots i_l}A_0-A_0Y_{i_1 i_2\dots i_l}=\sum_{j=1}^{N}\gamma_0^{(j)}e^{\mathrm{i}\lambda_j t},\qquad \lambda_j\neq 0. \tag{28}$$

Подставим выражение (22), в котором все матрицы $Y_j^{(i_1\dots i_l)}(\mu)$ суть матрицы вида (23), в формулу (28). При этом считаем, что матрицы $\beta_r^{(j)}$ найдены так, как это сделано для случая $\mu(t)\neq 0$. Соберем затем слагаемые при одинаковых показателях экспоненты. Заметим, что

$$\left(e^{\mathrm{i}\lambda_j t}\right)^{\Delta}=\left(e^{\mathrm{i}\lambda_j t}\right)'=\mathrm{i}\lambda_j e^{\mathrm{i}\lambda_j t},$$

и, поскольку $\mu(t)=0$,

$$\big(\mu^n(t)\big)^{\Delta}=n\mu^{n-1}(t)\mu^{\Delta}(t).$$

Откуда получаем

$$\beta_0^{(j)}\big[\mathrm{i}\lambda_j I+A_0\big]-A_0\beta_0^{(j)}+\beta_1^{(j)}\mu^{\Delta}(t)=\gamma_0^{(j)}. \tag{29}$$

Так как $\mu^{\Delta}(t)v_i(t)\in L_1^{\mathbb{T}}[t_0,\infty)$ $(i=1,\dots,n)$, то слагаемое $\beta_1^{(j)}\mu^{\Delta}(t)$ мы можем не учитывать. Уравнение (29) оказывается тогда выполненным в силу выбора матрицы $\beta_0^{(j)}$. Теорема доказана. □

Перейдем теперь к другому типу шкал — к шкалам, для которых $\mu(t)\to 1$ при $t\to\infty$. Поскольку в данном случае шкала состоит только из изолированных точек, исходную систему (11) удобно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}x^{\sigma}=\Big(A_0+\sum_{i=1}^{n}A_i(t)v_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}A_{i_1i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+\\ +\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}A_{i_1\dots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)+R(t)\Big)x(t).\end{aligned} \tag{30}$$

Определим далее функцию

$$\mu^*(t)=\mu(t)-1.$$

Будем говорить, что матрица $A(t)\in\Sigma^{\mathbb{T}}$, если она имеет вид (12), (13), где вместо функции $\mu(t)$ используется функция $\mu^*(t)$. Определение среднего значения (14) видоизменим следующим образом:

$$\langle A(t)\rangle=\sum_{\substack{\lambda_j=2\pi M\\ M\in\mathbb{Z}}}A_j(\mu^*)e^{\mathrm{i}\lambda_j t}. \tag{31}$$

Будем писать, что $A(t)\in\Sigma_0^{\mathbb{T}}$, если $A(t)\in\Sigma^{\mathbb{T}}$ и $\langle A(t)\rangle\equiv 0$.

Предположим, что для системы (30) выполнены следующие условия:

1^0. A_0 — постоянная невырожденная матрица с вещественными собственными значениями. Кроме того, предположим, что спектры матриц A_0 и $(-A_0)$ не пересекаются.

2^0. $v_1(t) \to 0, v_2(t) \to 0, \ldots, v_n(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

3^0. $v_1^\Delta(t), v_2^\Delta(t), \ldots, v_n^\Delta(t) \in L_1^{\mathbb{T}}[t_0, \infty)$.

4^0. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1^{\mathbb{T}}[t_0, \infty)$ для любого набора индексов $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{k+1} \le n$.

5^0. Матрицы $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ принадлежат классу $\Sigma^{\mathbb{T}}$.

6^0. Матрица $R(t) \in L_1^{\mathbb{T}}[t_0, \infty)$.

7^0. $\mu(t) \to 1$ при $t \to \infty$.

8^0. $\big(\mu^*(t)\big)^{p+1} v_i(t) \in L_1^{\mathbb{T}}[t_0, \infty)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $p \ge 0$. Кроме того, если $p > 0$, то мы потребуем, чтобы $\big(\mu^*(t)\big)^{\Delta} v_i(t) \in L_1^{\mathbb{T}}[t_0, \infty)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Теорема 4. *Система* (30) *при достаточно больших t заменой*

$$x(t) = \Big[I + \sum_{i=1}^{n} Y_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} Y_{i_1 i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y(t), \quad (32)$$

где I — единичная матрица, а матрицы $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ принадлежат классу $\Sigma_0^{\mathbb{T}}$, приводится к усредненной форме

$$y^\sigma = \Big(A_0 + \sum_{i=1}^{n} \hat{A}_i(\mu^*)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} \hat{A}_{i_1 i_2}(\mu^*)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} \hat{A}_{i_1\ldots i_k}(\mu^*)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R_1(t)\Big)y(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (33)$$

с матрицами $\hat{A}_{i_1\ldots i_l}(\mu^*)$ вида

$$\hat{A}_{i_1\ldots i_l}(\mu^*) = \sum_{\substack{\lambda_j = 2\pi M \\ M\in\mathbb{Z}}} A_j^{(i_1\ldots i_l)}(\mu^*)e^{\mathrm{i}\lambda_j t}$$

и матрицей $R_1(t) \in L_1^{\mathbb{T}}[t_0, \infty)$.

Доказательство. Повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 3, приходим к следующим уравнениям для определения матриц $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ и $\hat{A}_{i_1\ldots i_l}(\mu^*)$:

$$Y^\sigma_{i_1 i_2\ldots i_l}A_0 - A_0 Y_{i_1 i_2\ldots i_l} = \sum_{r=0}^{l-1} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_s=r \\ \rho_1(l_1)\cdot\ldots\cdot\rho_s(l_s)\ne 0}} A_{\kappa_1(j_1-l_1)\ldots\kappa_s(j_s-l_s)}(t)Y_{\kappa_1(l_1)\ldots\kappa_s(l_s)}(t) - \\ - \sum_{r=0}^{l-1} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_s=r \\ \rho_1(l_1)\cdot\ldots\cdot\rho_s(l_s)\ne 0}} Y^\sigma_{\kappa_1(l_1)\ldots\kappa_s(l_s)}\hat{A}_{\kappa_1(j_1-l_1)\ldots\kappa_s(j_s-l_s)}\big(\mu^*\big). \quad (34)$$

Как и в теореме 3, матрицу $\hat{A}_{i_1\ldots i_l}(\mu^*)$ определим из условия равенства нулю величины $\langle\cdot\rangle$, вычисленной для выражения стоящего в правой части (34). Именно,

$$\hat{A}_{i_1\ldots i_l}(\mu^*) = \left\langle \sum_{r=0}^{l-1} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_s=r \\ \rho_1(l_1)\cdot\ldots\cdot\rho_s(l_s)\neq 0}} A_{\kappa_1(j_1-l_1)\ldots\kappa_s(j_s-l_s)}(t) Y_{\kappa_1(l_1)\ldots\kappa_s(l_s)}(t) \right\rangle. \tag{35}$$

Попробуем удовлетворить уравнению (34) с точностью до слагаемых, произведение которых с функцией $v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_l}(t)$ принадлежит классу $L_1^{\mathbb{T}}[t_0,\infty)$, при помощи подходящим образом построенной матрицы $Y_{i_1 i_2\ldots i_l}(t)$ из класса $\Sigma_0^{\mathbb{T}}$. Пусть

$$Y_{i_1 i_2\ldots i_l}(t) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{Y}_j^{(i_1\ldots i_l)}(\mu^*) e^{\mathrm{i}\lambda_j t}, \quad \lambda_j \neq 2\pi M, \quad M\in\mathbb{Z}, \tag{36}$$

и

$$\tilde{Y}_j^{(i_1\ldots i_l)}(\mu^*) = \sum_{r=0}^{p} \beta_r^{(j)} \big(\mu^*(t)\big)^r, \tag{37}$$

где постоянные матрицы $\beta_l^{(j)}$ подлежат определению. Имеем

$$Y^{\sigma}_{i_1 i_2\ldots i_l} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{Y}_j^{(i_1\ldots i_l)}\big(\mu^*(\sigma)\big) e^{\mathrm{i}\lambda_j\sigma(t)} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{Y}_j^{(i_1\ldots i_l)}\big(\mu^*(\sigma)\big) e^{\mathrm{i}\lambda_j} e^{\mathrm{i}\lambda_j\mu^*(t)} e^{\mathrm{i}\lambda_j t}.$$

Замечая, что

$$\mu^*(\sigma) = \mu^* + \mu\big(\mu^*\big)^{\Delta},$$

получаем

$$\tilde{Y}_j^{(i_1\ldots i_l)}\big(\mu^*(\sigma)\big) = \sum_{r=0}^{p} \beta_r^{(j)} \big(\mu^*(\sigma)\big)^r = \sum_{r=0}^{p} \beta_r^{(j)} (\mu^*)^r + O\Big(\big(\mu^*\big)^{\Delta}\Big) = \tilde{Y}_j^{(i_1\ldots i_l)}(\mu^*) + O\Big(\big(\mu^*\big)^{\Delta}\Big).$$

Откуда

$$Y^{\sigma}_{i_1 i_2\ldots i_l} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{Y}_j^{(i_1\ldots i_l)}(\mu^*) e^{\mathrm{i}\lambda_j} e^{\mathrm{i}\lambda_j\mu^*(t)} e^{\mathrm{i}\lambda_j t} + O\Big(\big(\mu^*\big)^{\Delta}\Big).$$

Поскольку мы не учитываем слагаемые из класса $L_1^{\mathbb{T}}[t_0,\infty)$ и для функции $\exp\{\mathrm{i}\lambda_j\mu^*(t)\}$ справедливо разложение (24), мы можем считать, что матрица $Y^{\sigma}_{i_1 i_2\ldots i_l}$ принадлежит классу $\Sigma_0^{\mathbb{T}}$. Подставим в равенство (34) все необходимые разложения и соберем слагаемые при одинаковых показателях экспоненты. Имеем

$$\left[\sum_{\nu=0}^{p} \beta_\nu^{(j)} \big(\mu^*(t)\big)^{\nu}\right] e^{\mathrm{i}\lambda_j} \left[\sum_{\nu=0}^{p} \frac{\big(\mathrm{i}\lambda_j\big)^{\nu}}{\nu!} \big(\mu^*(t)\big)^{\nu}\right] A_0 - A_0 \left[\sum_{\nu=0}^{p} \beta_\nu^{(j)} \big(\mu^*(t)\big)^{\nu}\right] = \sum_{\nu=0}^{p} \gamma_\nu^{(j)} \big(\mu^*(t)\big)^{\nu}. \tag{38}$$

Собирая теперь слагаемые при одинаковых степенях $\mu(t)$, получаем следующие матричные уравнения для определения матриц $\beta_\nu^{(j)}$ $(\nu = 0, \dots, p)$:

$$\begin{aligned}
&\big(\mu^*\big)^0: && \beta_0^{(j)} A_0 e^{\mathrm{i}\lambda_j} - A_0 \beta_0^{(j)} = \gamma_0^{(j)},\\
&\big(\mu^*\big)^1: && \beta_1^{(j)} A_0 e^{\mathrm{i}\lambda_j} - A_0 \beta_1^{(j)} = \gamma_1^{(j)} - \beta_0^{(j)} e^{\mathrm{i}\lambda_j} A_0 \mathrm{i}\lambda_j,\\
&\quad\dots && \dots\\
&\big(\mu^*\big)^p: && \beta_p^{(j)} A_0 e^{\mathrm{i}\lambda_j} - A_0 \beta_p^{(j)} = \gamma_p^{(j)} - e^{\mathrm{i}\lambda_j} \sum_{\nu=0}^{p-1} \beta_\nu^{(j)} \frac{(\mathrm{i}\lambda_j)^{p-\nu}}{(p-\nu)!} A_0.
\end{aligned}$$

Каждое из этих уравнений имеет единственное решение при любой правой части тогда и только тогда, когда спектры матриц A_0 и $e^{\mathrm{i}\lambda_j} A_0$ не пересекаются. В силу вещественности спектра невырожденной матрицы A_0 это условие оказывается заведомо выполненным, если величина $e^{\mathrm{i}\lambda_j}$ является комплексной, т.е. когда $\lambda_j \neq \pi M$, $M \in \mathbb{Z}$. Поскольку $\lambda_j \neq 2\pi M$ нам необходимо рассмотреть лишь случай $\lambda_j = (2M+1)\pi$, $M \in \mathbb{Z}$. Но в последнем случае матрица $e^{\mathrm{i}\lambda_j} A_0$ есть матрица $(-A_0)$. Спектры же матриц A_0 и $(-A_0)$, согласно нашему предположению, не пересекаются. □

4. Построение асимптотики решений уравнения (2)**,** (3)**.** От уравнения (2) перейдем к системе уравнений первого порядка стандартным образом:

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos\omega \end{pmatrix} - q(n) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix}. \tag{39}$$

В системе (39) осуществим замену

$$\begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix} = Cz(n), \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mathrm{i}\omega} & e^{-\mathrm{i}\omega} \end{pmatrix}, \qquad z(n) = \begin{pmatrix} z^{(1)}(n) \\ z^{(2)}(n) \end{pmatrix}.$$

Приходим к системе

$$z(n+1) = \left[\operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}\omega}, e^{-\mathrm{i}\omega}\big) - \frac{q(n)}{e^{\mathrm{i}\omega} - e^{-\mathrm{i}\omega}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] z(n). \tag{40}$$

В системе (40) перейдем к новой шкале

$$\mathbb{T} = \Big\{ t = n + \tilde{\alpha} \ln n, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda\omega}, \quad n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Далее нам потребуется асимптотика корня $n = n(t)$ уравнения

$$t = n + \tilde{\alpha} \ln n, \qquad t \in \mathbb{T} \tag{41}$$

при $t \to \infty$. Ее несложно построить:

$$n(t) = t - \tilde{\alpha} \ln t + o(1), \qquad t \to \infty, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Откуда

$$\sigma(t) = t(n+1)\Big|_{n=n(t)} = t + 1 + o(1), \qquad t \to \infty, \quad t \in \mathbb{T},$$

где функция $t = t(n)$ определяется формулой (41). Полагая

$$\bar{z}(t) = z\big(n(t)\big),$$

перепишем систему (40) на шкале $\mathbb{T}$. Получаем

$$\bar{z}^\sigma = \left[\operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}\omega}, e^{-\mathrm{i}\omega}\big) - \frac{\bar{q}(t)}{e^{\mathrm{i}\omega} - e^{-\mathrm{i}\omega}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right] \bar{z}(t), \qquad t \in \mathbb{T}, \tag{42}$$

где

$$\bar{q}(t) = q\big(n(t)\big) = \frac{a \sin \lambda\omega t}{t^\rho} + O\Big(\frac{\ln t}{t^{1+\rho}}\Big).$$

В системе (42) сделаем замену

$$\bar{z}(t) = \operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}\omega t}, e^{-\mathrm{i}\omega t}\big) z_1(t), \qquad t \in \mathbb{T},$$

которая приводит эту систему к виду

$$z_1^\sigma = \left[\operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}\omega} e^{-\mathrm{i}\omega\mu(t)}, e^{-\mathrm{i}\omega} e^{\mathrm{i}\omega\mu(t)}\big) - \frac{a \sin(\lambda\omega t)}{e^{\mathrm{i}\omega} - e^{-\mathrm{i}\omega}} \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\omega\mu(t)} & e^{-\mathrm{i}\omega(2t+\mu(t))} \\ -e^{\mathrm{i}\omega(2t+\mu(t))} & -e^{\mathrm{i}\omega\mu(t)} \end{pmatrix} \frac{1}{t^\rho} + \right.$$
$$\left. + O\Big(\frac{\ln t}{t^{1+\rho}}\Big)\right] z_1(t). \tag{43}$$

Здесь

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t(n+1) - t(n)\Big|_{n=n(t)} = 1 + \frac{\tilde{\alpha}}{t} + O\Big(\frac{\ln t}{t^2}\Big), \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Заметим, что

$$\exp\{\pm\mathrm{i}\omega\mu(t)\} = \exp\{\pm\mathrm{i}\omega\}\Big(1 \pm \frac{\mathrm{i}\omega\tilde{\alpha}}{t} + O\Big(\frac{\ln t}{t^2}\Big)\Big), \qquad t \to \infty.$$

Используя это разложение, мы можем переписать систему (43) в следующем виде:

$$z_1^\sigma = \Big[I + A_1(t) t^{-\rho} + A_2 t^{-1} + O\Big(\frac{\ln t}{t^{1+\rho}}\Big)\Big] z_1(t). \tag{44}$$

Здесь матрица $A_1(t)$ определяется формулой

$$A_1(t) = \frac{a}{4 \sin \omega} \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\omega}\big(e^{\mathrm{i}\lambda\omega t} - e^{-\mathrm{i}\lambda\omega t}\big) & e^{-\mathrm{i}\omega}\big(e^{\mathrm{i}(\lambda-2)\omega t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda+2)\omega t}\big) \\ -e^{\mathrm{i}\omega}\big(e^{\mathrm{i}(\lambda+2)\omega t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda-2)\omega t}\big) & -e^{\mathrm{i}\omega}\big(e^{\mathrm{i}\lambda\omega t} - e^{-\mathrm{i}\lambda\omega t}\big) \end{pmatrix}, \tag{45}$$

а постоянная матрица A_2 — формулой

$$A_2 = -\mathrm{i}\omega\tilde{\alpha} \operatorname{diag}(1, -1) = -\frac{\mathrm{i}\alpha}{\lambda} \operatorname{diag}(1, -1). \tag{46}$$

Система (44) имеет вид (30). Для ее упрощения воспользуемся техникой усреднения на шкалах с функцией $\mu(t) \to 1$. Пусть сначала

а). $(\lambda \pm 2)\omega \neq 0 \mod 2\pi$.

Предположим, что
$$1/2 < \rho \leq 1.$$
В системе (44) сделаем усредняющую замену
$$z_1(t) = \big[I + Y_1(t)t^{-\rho} + Y_2(t)t^{-1}\big] z_2(t), \tag{47}$$
где $Y_1(t), Y_2(t) \in \Sigma_0^{\mathbb{T}}$ (матрица $Y_2(t)$, на самом деле, нулевая, поскольку матрица A_2 постоянная). В результате этой замены приходим к усредненной системе
$$z_2^{\sigma} = \Big[I + A_2 t^{-1} + O\big(t^{-2\rho}\big) + O\Big(\frac{\ln t}{t^{1+\rho}}\Big)\Big] z_2(t). \tag{48}$$
Здесь мы учли, что в рассматриваемом случае $\hat{A}_1 = \langle A_1(t)\rangle \equiv 0$. В усредненной системе (48) перейдем к исходной шкале $\mathbb{T}_0 = \mathbb{N}$, положив $\tilde{z}_2(n) = z_2\big(t(n)\big)$. Приходим к системе
$$\tilde{z}_2(n+1) = \Big[I + A_2 n^{-1} + O\big(n^{-2\rho}\big) + O\Big(\frac{\ln n}{n^{1+\rho}}\Big)\Big] \tilde{z}_2(n). \tag{49}$$
Используя теорему 2, заключаем, что фундаментальная матрица $Z_2(n)$ этой системы имеет следующее асимптотическое представление при $n \to \infty$:
$$Z_2(n) = \big[I + o(1)\big]\, \mathrm{diag}\Big(\exp\Big\{-\frac{\mathrm{i}\alpha}{\lambda}\ln n\Big\}, \exp\Big\{\frac{\mathrm{i}\alpha}{\lambda}\ln n\Big\}\Big).$$
Возвращаясь к исходному уравнению (2), получаем следующие асимптотические формулы для его линейно независимых решений при $n \to \infty$:
$$x_{1,2}(n) = \exp\{\pm \mathrm{i}\omega n\}\big(1 + o(1)\big). \tag{50}$$

б). $(\lambda - 2)\omega = 0 \mod 2\pi$ (или $(\lambda + 2)\omega = 0 \mod 2\pi$).

Сперва заметим, что достаточно рассмотреть, например, случай $\lambda = 2$. Действительно, если $(\lambda \mp 2)\omega = 0 \mod 2\pi$, то $\lambda\omega = \pm 2\omega + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Тогда в исходном уравнении имеем $a\sin\big(\lambda\omega n + \alpha \ln n\big) = \pm a \sin\big(2\omega n \pm \alpha \ln n\big)$. Итак, считаем далее, что $\lambda = 2$.

С помощью усредняющей замены
$$z_1(t) = \big[I + Y_1(t)t^{-\rho} + Y_{11}(t)t^{-2\rho} + \ldots + Y_2(t)t^{-1}\big] z_2(t)$$
от системы (44) мы переходим к усредненной системе
$$z_2^{\sigma} = \Big[I + A_1 t^{-\rho} + A_2 t^{-1} + O\big(t^{-2\rho}\big) + O\Big(\frac{\ln t}{t^{1+\rho}}\Big)\Big] z_2(t), \tag{51}$$
где матрица $\hat{A}_1 = \langle A_1(t)\rangle$ определяется формулой
$$A_1 = \frac{a}{4\sin\omega}\begin{pmatrix} 0 & e^{-\mathrm{i}\omega} \\ e^{\mathrm{i}\omega} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega \neq \frac{\pi}{2}, \tag{52}$$

и

$$A_1 = \frac{a}{4\sin\omega}\begin{pmatrix} 0 & e^{-\mathrm{i}\omega}(1-e^{-4\mathrm{i}\omega t}) \\ e^{\mathrm{i}\omega}(1-e^{4\mathrm{i}\omega t}) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \frac{\pi}{2}. \tag{53}$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\omega \neq \frac{\pi}{2}.$$

Переходя к исходной шкале $\mathbb{T}_0 = \mathbb{N}$, систему (51) запишем в виде

$$\tilde{z}_2(n+1) = \Big[I + A_1 n^{-\rho} + A_2 n^{-1} + O\big(n^{-2\rho}\big) + O\Big(\frac{\ln n}{n^{1+\rho}}\Big)\Big]\tilde{z}_2(n), \tag{54}$$

где $\tilde{z}_2(n) = z_2\big(t(n)\big)$. Очевидно, что необходимо рассмотреть следующие возможности.

$\boxed{\rho = 1}$

Систему (54) перепишем в виде

$$\tilde{z}_2(n+1) = \Big[I + \Gamma n^{-1} + O\Big(\frac{\ln n}{n^2}\Big)\Big]\tilde{z}_2(n), \tag{55}$$

где

$$\Gamma = A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{\mathrm{i}\alpha}{2} & \dfrac{ae^{-\mathrm{i}\omega}}{4\sin\omega} \\ \dfrac{ae^{\mathrm{i}\omega}}{4\sin\omega} & \dfrac{\mathrm{i}\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

Для определения собственных чисел $\nu_{1,2}$ матрицы Γ получаем характеристическое уравнение

$$\nu^2 + \left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{a^2}{16\sin^2\omega}\right) = 0.$$

Пусть

- $|\alpha| < \dfrac{|a|}{2\sin\omega}$.

Собственные числа матрицы $I + \Gamma n^{-1}$ действительны и имеют вид

$$\nu_{1,2}(n) = 1 \pm \kappa n^{-1}, \qquad \kappa = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\omega} - \alpha^2}.$$

Поскольку собственные числа матрицы Γ различны, то система (55) заменой $\tilde{z}_2(n) = \tilde{C}\tilde{z}_3(n)$, где матрица $\tilde{C}$ приводит матрицу Γ к диагональному виду, может быть преобразована к ℓ-диагональной форме

$$\tilde{z}_3(n+1) = \Big[I + \Lambda n^{-1} + O\Big(\frac{\ln n}{n^2}\Big)\Big]\tilde{z}_3(n),$$

где $\Lambda = \kappa\,\mathrm{diag}(1,-1)$. Асимптотика фундаментальной матрицы $\tilde{Z}_3(n)$ имеет вид

$$\tilde{Z}_3(n) = \big[I + o(1)\big]\,\mathrm{diag}\big(n^{\kappa}, n^{-\kappa}\big), \qquad n \to \infty.$$

Для линейно независимых решений исходного уравнения (2) в этом случае справедливы следующие асимптотические представления:

$$x_{1,2}(n) = n^{\pm\kappa}\Big[e^{\mathrm{i}(\omega n+\alpha/2\ln n)} + \delta_{1,2}e^{-\mathrm{i}(\omega n+\alpha/2\ln n)} + o(1)\Big], \qquad n\to\infty,$$

где

$$\delta_{1,2} = \frac{4\sin\omega}{a}\left(\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}\pm\kappa\right)e^{\mathrm{i}\omega}.$$

- $|\alpha| > \dfrac{|a|}{2\sin\omega}$.

Собственные числа матрицы $I+\Gamma n^{-1}$ комплексны и имеют вид

$$\nu_{1,2}(n) = 1\pm\mathrm{i}\kappa^* n^{-1}, \qquad \kappa^* = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-\frac{a^2}{4\sin^2\omega}}.$$

Система (55) может быть преобразована к ℓ-диагональной форме

$$\tilde z_3(n+1) = \Big[I+\Lambda n^{-1}+O\Big(\frac{\ln n}{n^2}\Big)\Big]\tilde z_3(n),$$

где $\Lambda = \mathrm{i}\kappa^*\,\mathrm{diag}(1,-1)$. Фундаментальная матрица $\tilde Z_3(n)$ этой системы имеет следующую асимптотику:

$$\tilde Z_3(n) = \big[I+o(1)\big]\,\mathrm{diag}\Big(\exp\{\mathrm{i}\kappa^*\ln n\}, \exp\{-\mathrm{i}\kappa^*\ln n\}\Big), \qquad n\to\infty.$$

Для фундаментальных решений исходного уравнения (2) в этом случае справедливы следующие асимптотические представления при $n\to\infty$:

$$x_1(n) = \exp\Big\{\mathrm{i}\Big(\omega n+(\alpha/2+\kappa^*)\ln n\Big)\Big\} + \delta_1^*\exp\Big\{-\mathrm{i}\Big(\omega n+(\alpha/2-\kappa^*)\ln n\Big)\Big\} + o(1),$$
$$x_2(n) = \exp\Big\{\mathrm{i}\Big(\omega n+(\alpha/2-\kappa^*)\ln n\Big)\Big\} + \delta_2^*\exp\Big\{-\mathrm{i}\Big(\omega n+(\alpha/2+\kappa^*)\ln n\Big)\Big\} + o(1),$$

где

$$\delta_{1,2}^* = \frac{4\sin\omega}{a}\left(\frac{\alpha}{2}\pm\kappa^*\right)\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\omega}, \qquad a\neq 0.$$

- $|\alpha| = \dfrac{|a|}{2\sin\omega}$.

Собственные числа матрицы Γ совпадают и равны нулю. Подходящей заменой вида $\tilde z_2(n) = \tilde C\tilde z_3(n)$ система (55) приводится к виду:

$$\tilde z_3(n+1) = \Big[I+Jn^{-1}+O\Big(\frac{\ln n}{n^2}\Big)\Big]\tilde z_3(n), \tag{56}$$

где

$$J = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Заменой $\tilde{z}_3(n) = \Phi(n)\tilde{z}_4(n)$ с матрицей $\Phi(n)$ вида

$$\Phi(n) = \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

от системы (56) переходим к системе

$$\tilde{z}_4(n+1) = \Big[I + O\Big(\frac{\ln^3 n}{n^2}\Big)\Big]\tilde{z}_4(n). \tag{57}$$

Мы естественно учли, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \ln n + C_1 + o(1), \qquad C_1 = \mathrm{const}.$$

Используя результаты работы [11], заключаем, что система (57) имеет линейно независимые решения, для которых справедливы следующие асимптотические представления:

$$\tilde{Z}_4^{(1)}(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O\Big(\frac{\ln^3 n}{n}\Big), \qquad \tilde{Z}_4^{(2)}(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O\Big(\frac{\ln^3 n}{n}\Big).$$

Возвращаясь к исходному уравнению, получаем следующие асимптотические формулы для его базисных решений при $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \exp\big\{\mathrm{i}\big(\omega n + \alpha/2 \ln n\big)\big\} + \delta \exp\big\{-\mathrm{i}\big(\omega n + \alpha/2 \ln n\big)\big\} + o(1), \\ x_2(n) &= \ln n\Big[\exp\big\{\mathrm{i}\big(\omega n + \alpha/2 \ln n\big)\big\} + \delta \exp\big\{-\mathrm{i}\big(\omega n + \alpha/2 \ln n\big)\big\} + o(1)\Big], \end{aligned}$$

где

$$\delta = \frac{4\sin\omega}{a}\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}e^{\mathrm{i}\omega}, \qquad a \neq 0.$$

$\boxed{\rho < 1}$

Вернемся к рассмотрению системы (54). Обратим внимание на следующее обстоятельство: в системе (51) в состав члена $O\big(t^{-2\rho}\big)$ могут входить колебательные величины $\exp\{\mathrm{i}\lambda t\}O\big(t^{-2\rho}\big)$ с частотами $\lambda = 2\pi M$, $M \in \mathbb{Z}$. В системе (54) им соответствуют функции типа $s(n) = \exp\{\mathrm{i}\psi \ln n\}O\big(n^{-2\rho}\big)$, где ψ – некоторое ненулевое действительное число. Заметим, что $\Delta s(n) = O\big(n^{-2\rho-1}\big)$. Откуда, обозначая слагаемое $O\big(n^{-2\rho}\big)$ через $G(n)$, мы заключаем, что $\Delta G(n) \in \ell_1$. Это обстоятельство позволяет воспользоваться леммой 1 для приведения системы (54) к ℓ-диагональному виду.

Поскольку собственные числа матрицы A_1 различны, система (54) приводится к ℓ-диагональной форме

$$\tilde{z}_3(n+1) = \Big[\Lambda(n) + R(n)\Big]\tilde{z}_3(n). \tag{58}$$

Здесь $\Lambda(n)$ — диагональная матрица вида

$$\Lambda(n) = I + \frac{a}{4\sin\omega} n^{-\rho} \operatorname{diag}(1, -1) + O\bigl(n^{-2\rho}\bigr),$$

а матрица $R(n) \in \ell_1$. Используя теорему Бензаида—Латса, строим асимптотическое представление для фундаментальной матрицы системы (58). Для исходного уравнения (2) получаем следующие асимптотические формулы для фундаментальных решений при $n \to \infty$:

$$x_{1,2}(n) = e^{\pm f(n)} \Bigl[e^{\mathrm{i}(\omega n + \alpha/2 \ln n)} \pm e^{\mathrm{i}\omega} e^{-\mathrm{i}(\omega n + \alpha/2 \ln n)} + o(1) \Bigr], \qquad n \to \infty, \tag{59}$$

где $f(n) = \hat{\kappa} f_1(n) + r(n)$, $\hat{\kappa} = \dfrac{a}{4\sin\omega}$, и

$$f_1(n) = \frac{n^{1-\rho}}{1-\rho}, \qquad r(n) = \begin{cases} 0, & 1/2 < \rho < 1, \\ O\bigl(\ln n\bigr), & \rho = 1/2, \\ O\bigl(n^{1-2\rho}\bigr), & \rho < 1/2. \end{cases}$$

Таким образом, нам осталось рассмотреть последний случай, когда

$$\lambda = 2, \qquad \omega = \frac{\pi}{2}.$$

В этой ситуации использование методики усреднения не приводит к успеху. Асимптотика решений уравнения (2) в этом случае может быть построена следующим образом. Уравнение (2) с функцией $q(n)$, определяемой формулой (3), принимает следующий вид:

$$x(n+2) + \Bigl(1 + \frac{a(-1)^n \sin(\alpha \ln n)}{n^\rho}\Bigr) x(n) = 0. \tag{60}$$

Построим асимптотические формулы для линейно независимых решений этого уравнения, удовлетворяющих следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} x_1(1) &= 1, \qquad x_1(2) = 0, \\ x_2(1) &= 0, \qquad x_2(2) = 1. \end{aligned} \tag{61}$$

Из уравнения (60) следует, что

$$x_1(2k) = 0, \qquad x_2(2k-1) = 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Далее, полагая в (60) $n = 2k-1$, имеем

$$x_1(2k+1) = \prod_{j=1}^{k} \Bigl[-\Bigl(1 - \frac{a \sin\bigl(\alpha \ln(2j-1)\bigr)}{(2j-1)^\rho}\Bigr) \Bigr] = (-1)^k \prod_{j=1}^{k} \Bigl[1 - \frac{a \sin\bigl(\alpha \ln(2j-1)\bigr)}{(2j-1)^\rho} \Bigr].$$

Обозначим

$$f(k) = \prod_{j=j_0}^{k} \Bigl[1 - \frac{a \sin\bigl(\alpha \ln(2j-1)\bigr)}{(2j-1)^\rho} \Bigr],$$

где j_0 выбрано так, что $f(k) > 0$ для всех $k \geq j_0$. Тогда

$$x_1(2k+1) = (-1)^k f(k) c(j_0),$$

где $c(j_0)$ — некоторая постоянная. Таким образом, задача свелась к построению асимптотики функции $f(k)$ при $k \to \infty$. Имеем

$$\ln f(k) = \sum_{j=j_0}^{k} \ln\Big[1 - \frac{a \sin\big(\alpha \ln(2j-1)\big)}{(2j-1)^\rho}\Big] = -a \sum_{j=j_0}^{k} \frac{\sin\big(\alpha \ln(2j-1)\big)}{(2j-1)^\rho} + \sum_{j=j_0}^{k} O\big(j^{-2\rho}\big).$$

Воспользуемся формулой суммирования Эйлера—Маклорена в следующем ее виде:

$$\sum_{j=j_0}^{k} f(j) = \int_{j_0}^{k} f(x)dx + \frac{f(j_0) + f(k)}{2} + \int_{j_0}^{k} B_1\big(\{x\}\big) f'(x)dx,$$

где $B_1(x) = x - 1/2$, а $\{x\}$ — дробная часть x. Получаем

$$\sum_{j=j_0}^{k} \frac{\sin\big(\alpha \ln(2j-1)\big)}{(2j-1)} = -\frac{1}{2\alpha} \cos\big(\alpha \ln(2k-1)\big) + c_1(j_0) + o(1),$$

и

$$\sum_{j=j_0}^{k} \frac{\sin\big(\alpha \ln(2j-1)\big)}{(2j-1)^\rho} = \frac{(1-\rho)(2k-1)^{1-\rho}}{2\big[(1-\rho)^2 + \alpha^2\big]} \Big[\sin\big(\alpha \ln(2k-1)\big) - \\ - \frac{\alpha}{1-\rho} \cos\big(\alpha \ln(2k-1)\big)\Big] + c_2(j_0) + o(1), \qquad \rho < 1.$$

Здесь $c_1(j_0), c_2(j_0)$ — некоторые постоянные. Окончательно заключаем, что для интересующего нас решения $x_1(n)$ при $n \to \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$x_1(2k+1) = (-1)^k \exp\Big\{\frac{a}{2\alpha} \cos\big(\alpha \ln(2k-1)\big)\Big\}\big(1 + o(1)\big)\tilde{c}_1, \qquad \rho = 1,$$

и

$$x_1(2k+1) = (-1)^k \exp\Big\{-\frac{a}{2} \frac{(1-\rho)(2k-1)^{1-\rho}}{(1-\rho)^2 + \alpha^2} \Big[\sin\big(\alpha \ln(2k-1)\big) - \\ - \frac{\alpha}{1-\rho} \cos\big(\alpha \ln(2k-1)\big)\Big] + \varphi(k)\Big\}\big(1 + o(1)\big)\tilde{c}_2, \qquad \rho < 1,$$

где

$$\varphi(k) = \begin{cases} 0, & 1/2 < \rho < 1, \\ O\big(\ln k\big), & \rho = 1/2, \\ O\big(k^{1-2\rho}\big), & \rho < 1/2. \end{cases} \tag{62}$$

Здесь $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ — некоторые постоянные, зависящие от параметров уравнения.

Аналогично для решения $x_2(n)$ получаем следующие асимптотические формулы при $k \to \infty$:

$$x_2(2k+2) = (-1)^k \exp\Big\{-\frac{a}{2\alpha}\cos\big(\alpha\ln(2k)\big)\Big\}\big(1+o(1)\big)\tilde{c}_3, \qquad \rho = 1,$$

и

$$x_2(2k+2) = (-1)^k \exp\Big\{\frac{a}{2}\frac{(1-\rho)(2k)^{1-\rho}}{(1-\rho)^2+\alpha^2}\Big[\sin\big(\alpha\ln(2k)\big) - \\ - \frac{\alpha}{1-\rho}\cos\big(\alpha\ln(2k)\big)\Big] + \varphi(k)\Big\}\big(1+o(1)\big)\tilde{c}_4, \qquad \rho < 1.$$

Здесь $\tilde{c}_3, \tilde{c}_4$ — некоторые постоянные, зависящие от параметров уравнения, а для функции $\varphi(k)$ справедливо представление (62).

5. Заключение. Анализируя полученные асимптотические формулы, мы можем сделать следующий вывод. Если $\rho > 1$, то все решения уравнения (2) с функцией $q(n)$ вида (3) ограничены, и для линейно независимых решений справедливы асимптотические представления (50) (этот факт следует сразу же, если воспользоваться теоремой 2 применительно к системе (39)). Если же $(\lambda \pm 2)\omega = 0 \mod 2\pi$, то при $\rho < 1$ существуют неограниченные решения, а на границе области устойчивости и неустойчивости, $\rho = 1$, имеется зона параметрического резонанса

$$|\alpha| \le \frac{|a|}{2\sin\omega}, \qquad \omega \ne \frac{\pi}{2}.$$

Список литературы

1. *Нестеров П.Н.* Об устойчивости решений некоторых уравнений из класса адиабатических осцилляторов // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, №2. С. 10–17.

2. *Burd V., Nesterov P.* Parametric resonance in adiabatic oscillators // Results in Mathematics. 2010. Vol. 58, №1-2. P. 1–15.

3. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 475 с.

4. *Нестеров П.Н.* Асимптотическое представление решений систем линейных разностных уравнений и метод усреднения // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, №2. С. 63–67.

5. *Benzaid Z., Lutz D.A.* Asymptotic representation of solutions of perturbed systems of linear difference equations // Studies in Appl. Math. 1987. V. 77. P. 195–221.

6. *Aulbach B., Hilger S.* Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale // *Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems (Gaussig, 1990)*. 1990. V. 59 of *Math. Res.* Akademie Verlag. Berlin. P. 9–20.

7. *Hilger S.* Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus // Results in Mathematics. 1990. V. 18. P. 18–56.

8. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications. Boston: Birkhäuser, 2003.

9. *Bohner M., Lutz D.A.* Asymptotic behavior of dynamic equations on time scales // Journal of Difference Equations and Applications. 2001. V. 7, №1. P. 21–50.

10. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.

11. *Bodine S., Lutz D.A.* Asymptotic solutions and error estimates for linear systems of difference and differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2004. V. 290. P. 343–362.

Time scales and the asymptotics for the solutions of discrete adiabatic oscillators

Nesterov P. N.

Keywords: discrete adiabatic oscillator, time scale, method of averaging, asymptotics

We develop a method of averaging for the study of linear systems of dynamic equations on time scales. We use the obtained results to construct the asymptotics for the solutions of some equations of discrete adiabatic oscillators.

Сведения об авторе:
Нестеров Павел Николаевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент