Модел. и анализ информ. систем. Т. **18**, № **1** (2011) 28–31

УДК 517.9

Динамика квазилинейной краевой задачи, обобщающей уравнение с большим запаздыванием

Кащенко С.А.[1]

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

получена 15 декабря 2010

Ключевые слова: квазинормальная форма, большое запаздывание

Построена квазинормальная форма для эволюционного уравнения, обобщающего дифференциальное уравнение с большим запаздыванием.

1. Постановка задачи. Нелинейное уравнение с большим запаздыванием вида

$$\dot{u} + u = f(u(t-T)),$$

где $T >> 1$, возникает во многих прикладных задачах [1, 2]. После замены времени $t \to T\tau$ это уравнение сводится к сингулярно возмущенному уравнению

$$\varepsilon\dot{u} + u = f(u(t-1)), \qquad \text{где} \quad \varepsilon = T^{-1} << 1. \tag{1}$$

Предположение о квазилинейности уравнения (1) означает, что

$$f(u) = au + \mu\varphi(u),$$

где $0 < \mu << 1$ — еще один малый параметр, а $\varphi(u)$ — некоторая достаточно гладкая функция. Наиболее сложная для изучения динамики (1) ситуация возникает при выполнении условий $a = 1$ или $a = -1$. В этом случае характеристический квазиполином

$$\varepsilon\lambda + 1 = a\exp(-\lambda) \tag{2}$$

(уравнение (1) при $\mu = 0$) имеет бесконечно много корней, которые стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$ и нет корней с положительными и отделенными от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественными частями. Тем самым реализуется критический в задаче об устойчивости нулевого решения случай бесконечной размерности. В работе [3]

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (государственные контракты № 02.740.11.0197 и № П2223).

исследована динамика (1) при $a = \pm 1$ в случае, когда $\mu = \varepsilon^2$. Показано, например, что при $a = -1$ поведение решений (1) с начальными условиями из произвольной ограниченной при $\varepsilon \to 0$ области фазового пространства $C[-1, 0]$ описывается в главном динамикой краевой задачи параболического типа

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + F(\xi), \quad F(\xi) = \frac{1}{2}(f(-\xi) - f(\xi)), \quad \tau = \varepsilon^2 t, \tag{3}$$

$$\xi(\tau, x + 1) \equiv -\xi(\tau, x). \tag{4}$$

Решения этой краевой задачи связаны с решением (1) формулой

$$u(t, \varepsilon) = \xi(\varepsilon^2 t, (1 - \varepsilon)t) + O(\varepsilon).$$

Более сложная ситуация возникает при условии $\mu = \varepsilon^{2\alpha}$ и $0 < \alpha < 1$. Динамика (1) в этом случае исследовалось в [4, 5]. Так, например, показано, что при $a = -1$ и $\alpha = 1/2$ динамика (1) определяется поведением решений зависящего от параметра $z \in [0, \infty)$ семейства краевых задач

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \Theta_z \frac{\partial \xi}{\partial x} + F(\xi), \tag{5}$$

$$\xi(\tau, x + 1) \equiv -\xi(\tau, x). \tag{6}$$

Здесь параметр $\Theta_z = \Theta_z(\varepsilon) \in [0, 2)$ дополняет величину $z\varepsilon^{-1/2}$ до целого нечетного числа. Решения (1) и (5), (6) связаны формулой

$$u(t, \varepsilon) = \xi\big(\varepsilon t, (z\varepsilon^{-1/2} + \Theta_z - z\varepsilon^{1/2})t\big) + O(\varepsilon^{1/2}).$$

Далее напомним один классический результат Н. Н. Красовского применительно к уравнению (1). В [6] показано, что это уравнение эквивалентно краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}, \qquad \varepsilon \frac{\partial u}{\partial s}\Big|_{s=0} + u\Big|_{s=0} = au\Big|_{s=-1} + \mu\varphi(u)\Big|_{s=-1}. \tag{7}$$

В настоящей работе рассматривается более общая по сравнению с (7) краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s} + \mu\psi(u), \tag{8}$$

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial s}\Big|_{s=0} + u\Big|_{s=0} = au\Big|_{s=-1} + \mu\varphi(u)\Big|_{s=-1}, \tag{9}$$

в которой $\psi(u)$ — некоторая достаточно гладкая функция. Ограничимся здесь рассмотрением только наиболее интересного случая, когда

$$a = -1, \qquad \mu = \varepsilon. \tag{10}$$

2. Основной результат. При условии (10) и при всех достаточно малых значениях ε поведение решений краевой задачи (8), (9) с начальными условиями из произвольной (ограниченной при $\varepsilon \to 0$) области фазового пространства определяется динамикой семейства краевых задач

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \Theta_z \frac{\partial \xi}{\partial x} + F(\xi) + \Phi(\xi), \tag{11}$$

$$\xi(\tau, x+1) \equiv -\xi(\tau, x), \tag{12}$$

где параметр $z \in [0, \infty), \tau = \varepsilon t, \Phi(\xi) = (\psi(-\xi) - \psi(\xi))/2$. Решения краевых задач (8), (9) и (11), (12) связаны формулой

$$u(t, s, \varepsilon) = \xi\big(\varepsilon(t+s), (z\varepsilon^{-1/2} + \Theta_z - z\varepsilon^{1/2})(t+s)\big) - \\ - \varepsilon s \psi\big(\xi\big(\varepsilon(t+s), (z\varepsilon^{-1/2} + \Theta_z - z\varepsilon^{1/2})(t+s)\big)\big) + \varepsilon V(t+s) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где $V(t)$ — некоторая функция, точное значение которой несущественно.

На основе результатов из [4, 5] можно получить и другие — многопараметрические семейства краевых задач, играющие ту же роль, что и (11), (12). Одним из таких семейств служат краевые задачи для произвольного целого n и произвольных $z_j \in [0, \infty) \quad (j = 1, \dots, n)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\Big(z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + z_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^2 \xi - \Big(\Theta_{z_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Theta_{z_n} \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)\xi + F(\xi) + \Phi(\xi),$$

а краевые условия по каждому из “пространственных” аргументов либо 1-периодические, либо 1-антипериодические, но последних должно быть нечетное число.

Список литературы

1. Diekmann O., van Gils S. A., Verduyn Lunel S. M., Walther H.-O. Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis. New York: Springer-Verlag, 1995.

2. Jianhong Wu. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996.

3. Кащенко С. А. Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Диф. уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1448–1451.

4. Кащенко И. С. Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 421, № 5. С. 586–589.

5. Кащенко И. С. Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. 2008. Т. 48, № 12. С. 2141–2150.

6. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

Dynamics of a quasi-linear boundary problem generalizing the equation with large delay

Kaschenko S. A.

Keywords: quasinormal form, large delay

We have built a quasinormal form for the evolution equation that generalizes the equation with large delay.

Сведения об авторе:
Кащенко Сергей Александрович,
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
доктор физ.-мат. наук, профессор