

УДК 517.9

Динамические свойства одной модели пассивного захвата мод

Кащенко И.С.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: iliyask@uniyar.ac.ru

получена 15 декабря 2010

Ключевые слова: пассивный захват мод, запаздывание, сингулярное возмущение, нормальная форма

Исследуется локальная динамика модели пассивного захвата мод для полупроводникового лазера. В критическом случае построены эволюционные уравнения, играющие роль нормальных форм. Показана возможность мультистабильности.

1. Введение

В работе [1] в качестве модели пассивного захвата мод в полупроводниковых лазерах предложена система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt}\right) A &= \sqrt{k} \exp \left\{ \frac{1}{2} [(1 - i\alpha_g)g(t-1) - (1 - i\alpha_q)q(t-1)] - i\varphi \right\} A(t-1), \\ \frac{dg}{dt} &= \gamma_g (G_0 - g) - \exp(-q) [\exp(g) - 1] |A|^2, \\ \frac{dq}{dt} &= \gamma_q (Q_0 - q) - s [1 - \exp(-q)] |A|^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $A(t)$ — это комплексная функция, $g(t)$ и $q(t)$ — действительные функции. Все параметры модели являются действительными константами. Их точный физический смысл, а также порядок вывода уравнений модели подробно описан в [1]. Отметим только, что значения k , γ_g , γ_q , s являются положительными. Кроме того, важным условием является то, что параметр γ , обозначающий ширину спектрального фильтра, достаточно большой, т.е. $\gamma \gg 1$ (в силу этого $\gamma^{-1} \ll 1$).

В [2] исследованы некоторые, в том числе и нелокальные, свойства модели (1) в случае, когда $A(t)$ — вещественнозначная функция, т.е. $\alpha_g = \alpha_q = \varphi = 0$.

В настоящей работе мы будем исследовать поведение решений в некоторой малой (но фиксированной) окрестности состояния равновесия $A = 0$, $g = G_0$, $q = Q_0$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (государственные контракты № 02.740.11.0197 и № П2223).

2. Основная часть

Начнем исследования с линейного анализа. Линеаризуем задачу (1) на состоянии равновесия. Для этого подставим

$$A = x, \quad g = G_0 + y, \quad q = Q_0 + z,$$

предполагая x , y и z достаточно малыми. Тогда, если отбросить все слагаемые порядка малости выше первого, получим линейную систему, в которой все уравнения разделились

$$\left(1 + \gamma^{-1} \frac{d}{dt}\right) x = \sqrt{k} \exp \left\{ \frac{1}{2} [(1 - i\alpha_g)G_0 - (1 - i\alpha_q)Q_0] - i\varphi \right\} x(t-1), \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma_g y, \quad \frac{dz}{dt} = -\gamma_q z.$$

Отсюда видно, что y и z экспоненциально стремятся к нулю. Следовательно, потеря устойчивости может произойти только за счет переменной x . Построим характеристический квазимногочлен, расположение корней которого будет определять устойчивость нулевого состояния равновесия линейной задачи (2)

$$1 + \gamma^{-1} \lambda = a e^{i\psi} e^{-\lambda}. \quad (3)$$

Действительные параметры $a > 0$ и ψ — это соответственно модуль и аргумент $\sqrt{k} \exp \left\{ \frac{1}{2} [(1 - i\alpha_g)G_0 - (1 - i\alpha_q)Q_0] - i\varphi \right\}$, т.е.

$$a = \sqrt{k} \exp \left\{ \frac{1}{2} [G_0 - Q_0] \right\}, \quad \psi = \frac{1}{2} [-\alpha_g G_0 + \alpha_q Q_0] - \varphi.$$

Легко доказать следующее простое утверждение относительно расположения корней (3).

Лемма 1. *Если $a < 1$, то все корни (3) лежат в левой комплексной полуплоскости и отделены от мнимой оси при $\gamma \rightarrow \infty$.*

Если $a > 1$, то при достаточно больших γ найдется корень (3), вещественная часть которого положительна и отделена от нуля при $\gamma \rightarrow \infty$.

Таким образом, локальная динамика (1) в окрестности состояния равновесия при $a < 1$ тривиальна: все решения из некоторой малой (но фиксированной) его окрестности стремятся к состоянию равновесия; а при $a > 1$ задача перестает быть локальной.

Пусть параметры таковы, что система (1) находится вблизи критического случая, т.е.

$$a = 1 + \gamma^{-p} a_1, \quad 0 < p < 2.$$

Для этого нам достаточно “шевелинуть” все параметры на величину порядка γ^{-p} . При этом на такую же по порядку величину изменится и значение ψ :

$$\psi \Rightarrow \psi + \gamma^{-p} \psi_1.$$

В этом случае уравнение (3) имеет бесконечное количество корней, которые стремятся к мнимой оси при $\gamma \rightarrow \infty$. Таким образом, рассматриваемый критический случай имеет бесконечную размерность. Для исследования поведения решений (1) в этой ситуации воспользуемся методом, изложенным в [3, 4].

Для дальнейших исследований введем несколько обозначений. Фиксируем произвольное $\omega > 0$. Обозначим через $\theta = \theta(\omega, \gamma)$ такое число из полуинтервала $[0; 2\pi)$, что выражение $\omega\gamma^{1-p/2} + \theta$ является целым.

Сделаем в (1) подстановку

$$A = \gamma^{-p/2} e^{i\psi t} u(\tau, r) + \gamma^{-p} u_2(\tau, r, t) + \gamma^{-3p/2} u_3(\tau, r, t) + \dots,$$

$$g = G_0 + \gamma^{-p} g_1(\tau, r, t) + \dots, \quad q = Q_0 + \gamma^{-q} q_1(\tau, r, t) + \dots$$

Здесь $\tau = \gamma^{-p} t$, $r = (\omega\gamma^{1-p/2} + \theta - \gamma^{-p/2}\omega + \gamma^{-p}\omega)t$, а функции $u_2(\tau, r, t)$, $u_3(\tau, r, t)$, $g_1(\tau, r, t)$ и $q_1(\tau, r, t)$ $2\pi/\psi$ -периодические по t и периодические по r с периодом 1. После подстановки будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях γ . На первом шаге мы получим тождество, затем определим

$$\begin{aligned} u_2 &\equiv 0, \\ g_1 &= \gamma_g^{-1} (G_{01} - \exp(-Q_0)[\exp(G_0) - 1]|u|^2) = h_1 + h_2|u|^2, \\ q_1 &= \gamma_q^{-1} (Q_{01} - s[1 - \exp(-Q_0)]|u|^2) = h_3 + h_4|u|^2. \end{aligned}$$

На следующем шаге мы, из условия разрешимости получившегося уравнения относительно u_3 , получим краевую задачу типа Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + bu + cu|u|^2, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r + 1). \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} b &= a_1 + \frac{1}{2}(h_1 - h_3) + i(\psi_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 h_1 - \alpha_1 h_3)), \\ c &= \frac{1}{2}((1 - i\alpha_1)h_2 - (1 - i\alpha_2)h_4). \end{aligned}$$

Краевая задача (4) является квазинормальной формой для исходного уравнения (1). Сформулируем этот результат более аккуратно.

Теорема 1. Пусть краевая задача (4) имеет решение $u(\tau, r)$. Тогда исходная задача (1) имеет асимптотическое по невязке решение вида

$$\begin{aligned} A &= \gamma^{-p/2} e^{i\psi t} u(\gamma^{-p} t, (\omega\gamma^{1-p/2} + \theta + o(1))t) + o(\gamma^{-p}), \\ g &= G_0 + \gamma^{-p}(h_1 + h_2|u(\gamma^{-p} t, (\omega\gamma^{1-p/2} + \theta + o(1))t)|^2) + o(\gamma^{-p}), \\ q &= Q_0 + \gamma^{-p}(h_3 + h_4|u(\gamma^{-p} t, (\omega\gamma^{1-p/2} + \theta + o(1))t)|^2) + o(\gamma^{-p}). \end{aligned} \quad (5)$$

При определенных условиях можно сформулировать условия существования точного решения (1).

Теорема 2. Пусть краевая задача (4) имеет грубое, периодическое по τ решение $u(\tau, r)$. Тогда исходная задача имеет решение вида (5) той же устойчивости.

3. Заключение

Уравнение (4) является уравнением типа Гинзбурга–Ландау, динамика таких уравнений может быть очень сложной [5]. Однако, если рассматривать только случай, когда $A(t)$ — вещественная функция, как в [2], то уравнение (4) становится скалярным уравнением параболического типа с периодическими краевыми условиями. Хорошо известно, что у таких систем устойчивыми могут быть только пространственно-однородные состояния равновесия.

В краевую задачу (4), а также в формулы (5) перехода от решений квазинормальной формы к решениям исходной задачи, входит произвольный параметр ω . Разным значениям этого параметра могут соответствовать разные устойчивые решения как (4), так и (1). Это дает основание говорить о возможности явления мультистабильности в изучаемой модели. Вообще, мультистабильность в сингулярно возмущенных лазерных системах является широко распространенным явлением [6].

Отметим также, что в реальной задаче все параметры как-то фиксированы. Следовательно, мы можем точно определить только значение $a_1\gamma^{-p} = a - 1$, но не каждый из параметров a_1 и p в отдельности. Следовательно, для одной и той же системы вида (1) мы можем построить различные квазинормальные формы для различных пар a_1 и p . Динамика разных задач может быть различной при разных значениях a_1 .

Также отметим, что для практических задач представляет интерес ситуация, когда в дополнение к $\gamma \gg 1$ выполняется $\gamma_g \ll 1$.

Список литературы

1. Vladimirov A., Turaev D. Model for passive mode locking in semiconductor lasers // Phys. Rev. 2005. A 72, 033808.
2. Nizette M., Rachinskii D., Vladimirov A. G., and Wolfrum M. Pulse interaction via gain and loss dynamics in passive mode-locking // Physica D. 2006. 218, No 1. P. 95–104.
3. Кащенко И. С. Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 421, № 5. С. 586–589.
4. Кащенко И. С. Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 12. С. 2141–2150.
5. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. и др. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука. 1992.
6. Григорьева Е. В., Кащенко И. С., Кащенко С. А. Мультистабильность в модели лазера с большим запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2010. Т. 17, № 2. С. 17–27.

Dynamical properties of a model for the passive mode locking

Kashchenko I. S.

Keywords: passive mode locking, delay, singular perturbation, normal form

We study the local dynamics of a model for the passive mode locking in semiconductor lasers. In critical cases special equations (normal forms) were built. The existence of multistability is shown.

Сведения об авторе:

Кащенко Илья Сергеевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд.-физ. мат. наук, доцент