

УДК 517.51+514.17

Пространственно-неоднородные периодические решения уравнения Хатчинсона с распределенным насыщением

Глызин Д. С., Кащенко С. А., Полстянов А. С.¹

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

e-mail: glyzin@gmail.com, kasch@uniyar.ac.ru, pol_art@rambler.ru

получена 22 ноября 2010

Ключевые слова: асимптотические методы, распределенное уравнение Хатчинсона, метод шагов

Получены асимптотики пространственно-неоднородных периодических решений пространственно распределенного уравнения Хатчинсона с периодическими краевыми условиями в случаях симметричного и несимметричного насыщения. Численный анализ упрощенной модели демонстрирует мультистабильность — сосуществование периодических решений вида бегущих волн, среди которых, тем не менее, не наблюдается решений с полученной асимптотикой.

1. Постановка задачи. Настоящая работа тесно примыкает к работе авторов [1] в которой рассматривается распределенное уравнение Хатчинсона

$$\frac{\partial N}{\partial t} = r \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} F(s) N(t-h, x+s) ds \right] N + d \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \quad (1)$$

с периодическими краевыми условиями

$$N(t, x+2\pi) \equiv N(t, x). \quad (2)$$

Параметры r , h и d в (1) положительны, а функция $F(x)$, характеризующая насыщение, задана формулой

$$F(x) = (\pi\sigma)^{-1/2} \exp(-\sigma^{-1}(x+\alpha)^2), \quad (\sigma > 0). \quad (3)$$

Отметим, что $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = 1$. В [2, 3] исследовалась задача о поведении всех решений (1), (2) в малой окрестности состояния равновесия $N \equiv 1$. В настоящей работе

¹Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт № 02.740.11.0197).

речь пойдет о нелокальных периодических решениях этой краевой задачи. Как и в [2, 3], предполагаем, что диффузия в (1) достаточно мала, т.е. для некоторых фиксированных σ_0 и d_0 имеем

$$\sigma = \varepsilon \sigma_0, \quad d = \varepsilon d_0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (4)$$

Рассмотрим отдельно случаи симметричной $F(x)$, когда $\alpha = 0$, и существенно более сложный случай несимметричной $F(x)$, когда $\alpha \neq 0$.

2. Случай симметричной $F(x)$. Пусть

$$\alpha = 0. \quad (5)$$

Следующее важное условие

$$rh > \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

означает [4], что уравнение Хатчинсона

$$\dot{N} = r[1 - N(t - h)]N \quad (7)$$

имеет единственное (с точностью до фазового сдвига) непостоянное орбитально устойчивое периодическое решение $N_0(t)$. Обозначим его период через T_0 . Отметим ещё один факт из [5]: при увеличении значений rh количество различных периодических решений неограниченно возрастает.

Функция $N_0(t)$, очевидно, является однородным периодическим решением и краевой задачи (1), (2). Множество функций вида

$$N_0 \left(t + r \frac{kT_0 x}{2\pi} \right), \quad (8)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, также является решением уравнения (7). Отсюда и из условий (4) и (5) следует, что каждая из функций (8) удовлетворяет (1) с точностью до $O(\varepsilon)$.

3. Случай несимметричной $F(x)$. Здесь предполагаем что $\alpha \neq 0$. Для определенности, удобно считать, что

$$\alpha > 0.$$

В этом пункте, как и в предыдущем, считаем, что выполнено условие (6). Тем самым, уравнение (7) и краевая задача (1), (2) имеют одновременное периодическое решение $N_0(t)$.

Введем несколько обозначений. Фиксируем сначала произвольно величину $T > 0$ и при всех значениях параметра z из промежутка $z \in (-\infty, \infty)$ рассмотрим семейство уравнений Хатчинсона

$$\dot{N} = r[1 - N(t - h - zT)]N. \quad (9)$$

Как уже отмечалось, это уравнение имеет нетривиальное устойчивое периодическое решение при условии

$$r(h + zT) > \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая (6), заключаем, что уравнение (9) имеет (непостоянное) периодическое решение $N = M_z(t)$ при

$$z > z^-, \quad \text{где } z^- = (\pi - 2rh) \cdot (2rT)^{-1} \quad (z^- < 0).$$

Обозначим через $R(zT)$ период функции $M_z(t)$. Функция $R(zT)$ является монотонно возрастающей, причем

$$\lim_{z \rightarrow z^- + 0} R(zT) = 2\pi(T)^{-1}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} R(zT) = \infty.$$

Из асимптотических формул, приведенных в [5], получаем асимптотику $R(zT)$ при $z \rightarrow \infty$:

$$R(zT) = r^{-1} \exp r(h + zT) \cdot (1 + o(1)). \quad (10)$$

Отметим что формула (10) дает хорошее приближение уже начиная со значений $zT \approx 2r^{-1} - h$.

Далее, при увеличении z , начиная от z^- , найдется такое значение $z = z_0$, что

$$R(z_0T) = T, \quad z_0R'(z_0T) = 1. \quad (11)$$

Можно предположить, что значение z_0 определяется единственным образом. Это проверяется асимптотической формулой (10) и результатами численного счета. Отсюда же получаем, что значение z_0 и корень $T = T_0$ уравнения (11) близки, соответственно к значениям

$$z_0 \approx r^{-1} \exp r(h + r^{-1}), \quad T_0 \approx \exp r(h + r^{-1}).$$

Изложим основную конструкцию. Будем искать периодическое с некоторым периодом T решение краевой задачи (1), (2), зависящее от линейной комбинации переменных t и x . Тем самым T -периодическое решение имеет вид

$$N = N \left(t + \frac{kT}{2\pi} x \right), \quad (12)$$

где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Подставим (12) в (1). При достаточно малых ε функция $N_k(s) = N \left(t + \frac{kT}{2\pi} x \right)$ ($s = t + \frac{kT}{2\pi} x$) удовлетворяет условию

$$\dot{N}_k = r \left[1 + N_k \left(t - h + \frac{k\alpha T}{2\pi} \right) + O(\varepsilon) \right] N + O(\varepsilon).$$

Таким образом, уравнение Хатчинсона (9) при $z = \frac{k\alpha}{2\pi}$ играет роль нулевого приближения для нахождения T -периодического решения $N_k(s)$. В результате приходим к задаче нахождения периодического решения с периодом T для уравнения (9). Отсюда получаем уравнение для определения T :

$$R(k\alpha T(2\pi)^{-1}) = T. \quad (13)$$

Согласно введенным выше обозначениям заключаем, что это уравнение имеет один корень для всех тех целых неположительных k , для которых

$$z^- < \frac{k\alpha}{2\pi} \leq 0, \quad (14)$$

и ровно два корня для положительных целых k , удовлетворяющих неравенству

$$0 < \frac{k\alpha}{2\pi} < z_0. \quad (15)$$

Очевидно, таких значений k тем больше, чем меньше значение отклонения α .

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. При условии (15) и достаточно малых значениях параметра ε краевая задача (1), (2) имеет асимптотическое по невязке решение $N(t, x, \varepsilon) = N_0((1 + o(1))t, rkT_0x/(2\pi)) + o(1)$.

Отметим, что при $\alpha = \alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$ количество периодических решений неограниченно растет и периоды заполняют в пределе всю полуось $(2\pi r^{-1}, \infty)$.

Отличие от результатов, сформулированных выше при условии (6), только в том, что решение вида (12) существует при условии (15) и дополнительном условии

$$r(h + \frac{\alpha k T}{2\pi}) > \frac{\pi}{2}.$$

4. Результаты численного исследования. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial N(t, x)}{\partial t} = r[1 - N(t, x - \alpha)]N(t, x) + d \frac{\partial^2 N(t, x)}{\partial x^2}, \quad N(t, x + 2\pi) = N(t, x), \quad (16)$$

предельный случай задачи (1), (2) при $\sigma \rightarrow 0$ и при значении запаздывания $h = 0$.

Отметим, что некоторые результаты численного анализа краевой задачи (1), (2) при $\alpha = 0$ приведены в [6]. Здесь мы рассмотрим случай $\alpha > 0$.

Вернемся к уравнению Хатчинсона (7), в котором будем считать выполненным соотношение (6). Зафиксируем r и обозначим единственное устойчивое периодическое решение этого уравнения $u_h(t)$, а его период — T_h . Отметим, что $u_h(t + cx)$ также является решением уравнения Хатчинсона при любом c .

Подставим в задачу (16) $N(t, x) = u_h(t + cx)$, получим:

$$\begin{aligned} \dot{u}_h(t + cx) &= r(1 - u_h(t + cx - c\alpha))u_h(t + cx) + dc^2\ddot{u}_h(t + cx), \\ u_h(t + c(x + 2\pi)) &= u_h(t + cx). \end{aligned} \quad (17)$$

Если положить $d = \varepsilon d_0$, то $u_h(t + cx)$ будет удовлетворять этому уравнению с невязкой $O(\varepsilon)$ при условии, что $c\alpha = h$ и $2\pi c = kT_h$ для некоторого целого k .

Таким образом, если при некоторых значениях параметров k и α уравнение

$$T_h = \frac{2\pi h}{k\alpha} \quad (18)$$

имеет решение, то функция

$$u_h(t + \frac{h}{\alpha}x) = u_h(t + \frac{kT_h}{2\pi}x) \quad (19)$$

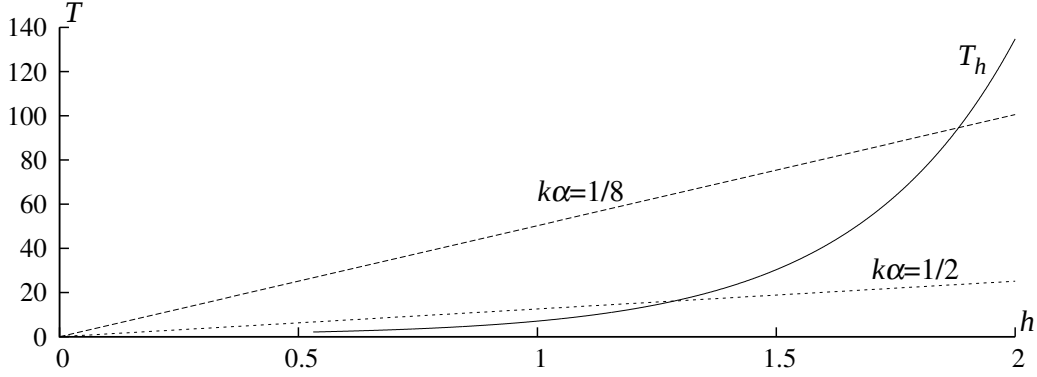


Рис. 1. Зависимость периода решения уравнения Хатчинсона от запаздывания при $r = 3$.

будет удовлетворять (16) с точностью до порядка ε .

На Рис. 1 изображен график зависимости периода решения уравнения Хатчинсона от величины запаздывания и прямые вида $f(h) = \frac{2\pi}{k\alpha}h$ при различных $k\alpha$. Методика численного анализа задачи (16) сводится к следующему: зафиксировав k и α , мы можем найти численно точку пересечения кривой T_h с прямой $f(h) = \frac{2\pi}{k\alpha}h$. Полученное таким образом h мы подставляем в уравнение (7), которое затем решаем методом шагов. Мы вычисляем приближение орбиты $u_h(t)$, то есть такой функции $\bar{u}_h(t)$, $t \in [0, T_h]$, что $u_h(t) = \bar{u}_h(t \bmod T_h)$. Отметим, что для любого выбора начальной функции уравнения (7) функция $\bar{u}_h(t)$ будет одной и той же с точностью до фазы.

Теперь в задаче (16) дискретизируем пространственную переменную и перейдем к системе M обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial N_i(t)}{\partial t} = r(1 - N_{i-p}(t))N_i(t) + d\frac{4\pi^2}{M^2}(N_{i+1} - 2N_i(t) + N_{i-1}), \quad i = 0, \dots, M-1, \quad (20)$$

где $p = \left[\frac{\alpha N}{2\pi}\right]$, а все индексы в правой части берутся по модулю M . В качестве начального условия выберем дискретизацию функции

$$\bar{u}_h\left(\left(\frac{kT_h}{2\pi}x\right) \bmod T_h\right), \quad x \in [0, 2\pi]. \quad (21)$$

Полученная задача решалась методом Дормана–Принса 5(4) с абсолютной погрешностью на шаге, равной 10^{-6} , на промежутке времени $t \in [0, 200]$ при значении $M = 2000$. В зависимости от параметров α и d задача демонстрирует численно наблюдаемые устойчивые пространственно-неоднородные режимы с различным количеством всплесков на пространственном отрезке $[0, 2\pi]$. Типичные графики временных срезов полученного таким образом решения при значениях параметров $\alpha = 0.6$, $d = 0.04$ представлены на Рис. 2. Пространственный срез при тех же значениях параметров для $x = \pi$ приводится на Рис. 3.

На Рис. 4 изображена зависимость количества всплесков в установившемся режиме от α и d .

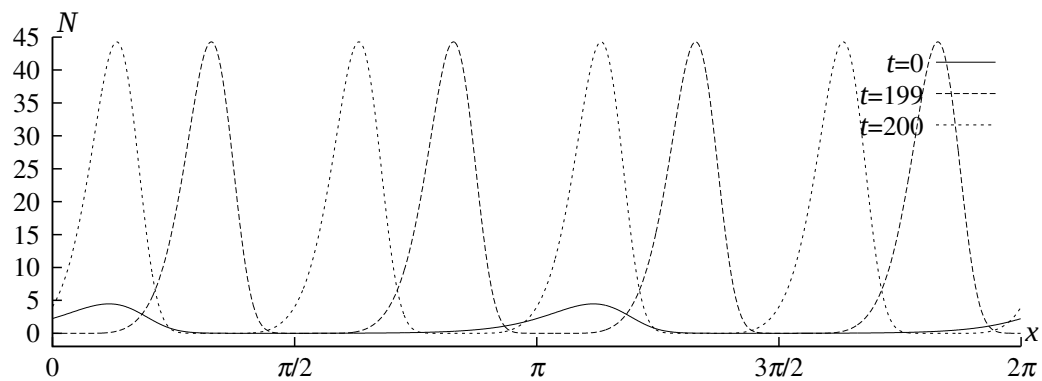


Рис. 2. Временные срезы решения задачи (20), (21) при $\alpha = 0.6$, $d = 0.04$

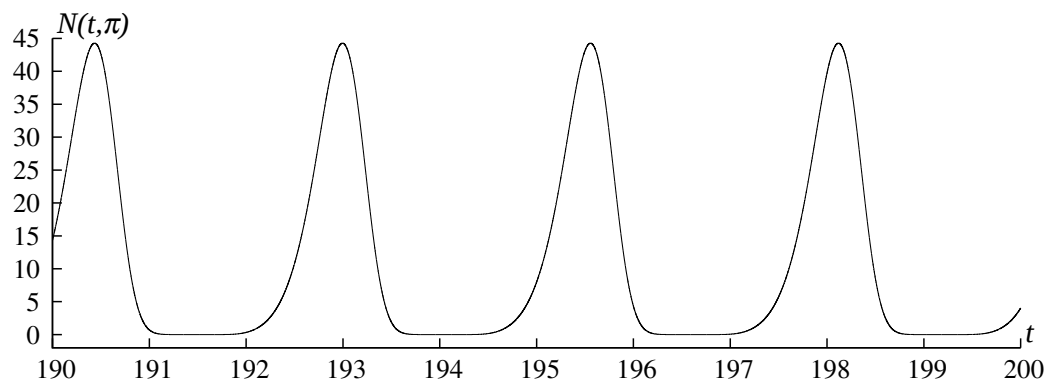


Рис. 3. Пространственный срез решения задачи (20), (21) при $\alpha = 0.6$, $d = 0.04$, $x = \pi$

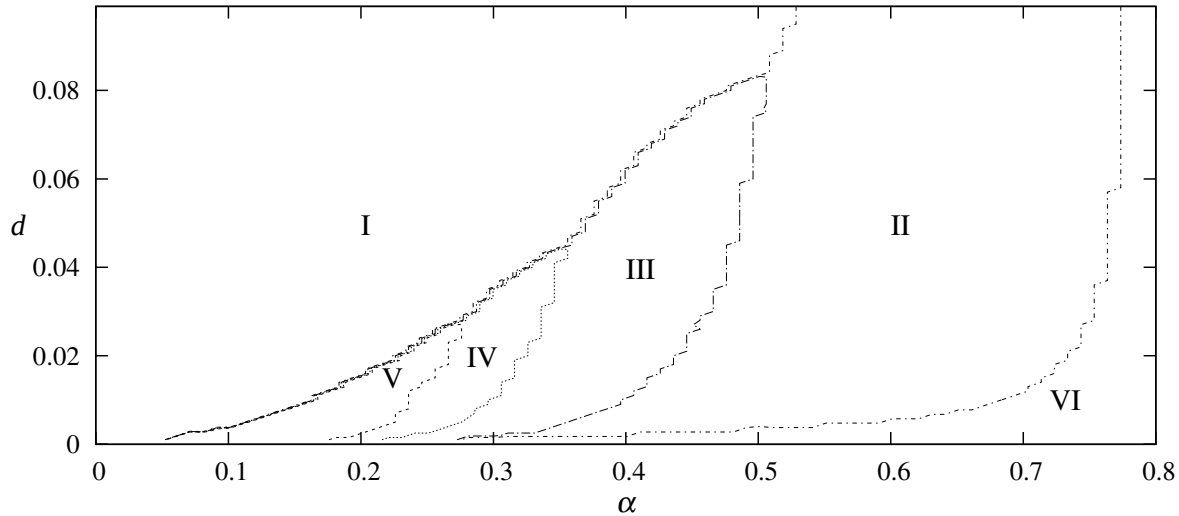


Рис. 4. Характерные области значений параметров при начальном условии с количеством волн $k = 2$

В области I решение стремится к пространственно-однородному стационарному режиму $N(t, x) = 1$.

Область II отвечает устойчивости режима с четырьмя всплесками, III — с шестью, IV — с восьмью.

В области V притягивающими являются режимы с 10 и более всплесками, причем это количество растет с уменьшением α .

В области VI решения обладают амплитудой более 10^5 , и вычисление количества всплесков в ней не выполнялось.

Резкий рост амплитуды при приближении d сверху к границе области VI характерен для всех значений α .

Обнаружить устойчивые решения непосредственно вида (19), то есть с числом всплесков, равным k , в данном численном эксперименте не удалось. При этом задача демонстрирует мультистабильность: на Рис. 5 и Рис. 6 представлены временные срезы решений задачи с теми же параметрами $\alpha = 0.6$, $d = 0.04$, но различными начальными условиями: в первом случае это функция $N(0, x) = \bar{u}_h(T_h x / (2\pi))$, где h — решение уравнения (18) при $k = 1$, $\alpha = 0.6$, и во втором случае — $N(0, x) = 1.1 + \sin(6x)$. Таким образом, хотя наблюдаются устойчивые режимы с тремя и более волнами, напоминающими по поведению периодические решения уравнения Хатчинсона, они не относятся к классу (19), поскольку при данном α уравнение (18) разрешимо лишь при $k = 1$ или $k = 2$, причем эта ситуация является общей, то есть не удалось найти такое α , при котором бы существовали решения с допустимыми (в смысле уравнения (18)) k .

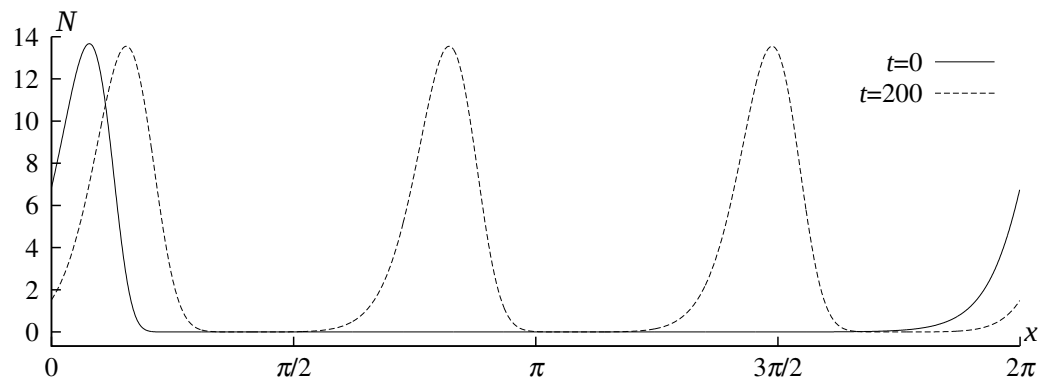


Рис. 5. Временные срезы решения задачи (20), (21) при $\alpha = 0.6$, $d = 0.04$

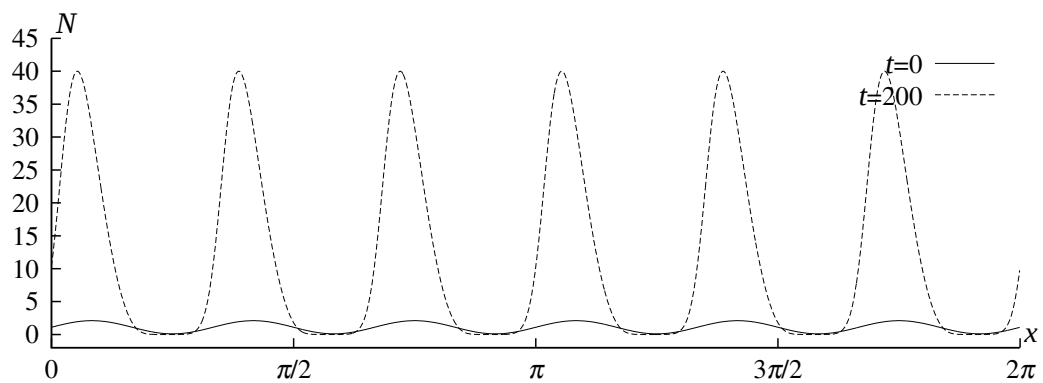


Рис. 6. Временные срезы решения задачи (20), (21) при $\alpha = 0.6$, $d = 0.04$

Список литературы

1. Глызин Д. С., Кащенко С. А., Полстянов А. С. Пространственно-неоднородные периодические решения в распределенном уравнении Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16. N 4. С. 77–85.
2. Кащенко С. А. Пространственно-неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, N 10. С. 49–69.
3. Кащенко Д. С., Кащенко И. С. Динамика логистического уравнения с пространственно-распределенным насыщением // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16. N 1. С. 54–61.
4. Jones G. S. On the nonlinear differential-difference equation $f'(x) = -\alpha f(x-1)\{1+f(x)\}$ // J. Math. Anal. Appl. 4 (1962), 440–469.
5. Кащенко, С. А. Асимптотика периодического решения обобщенного уравнения Хатчинсона // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1981. С. 64–85.
6. Bestehorn M., Grigorieva E. V., Kaschenko S. A. Spatio-temporal structures in a biological model with delay and diffusion // The Third International Conference "Tools for mathematical modelling", June 18 - 23, 2001. Saint Petersburg, 2001.

Spatially inhomogeneous periodic solutions in the Hutchinson equation with distributed saturation

Glyzin D. S., Kaschenko S. A., Polstyanyov A. S.

Keywords: asymptotic methods, distributed Hutchinson equation, method of steps

The asymptotics of spatially inhomogeneous periodic solutions of a complex spatially distributed Hutchinson equation with periodic boundary conditions are presented. It is shown that such solutions are not observed in a numerical experiment.

Сведения об авторах:

Глызин Дмитрий Сергеевич,

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования;

Кащенко Сергей Александрович,

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой математического моделирования;

Полстянов Артем Сергеевич,

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
аспирант.