

УДК 534.1

Хаотические колебания одной распределенной динамической системы с бесконечным запаздыванием

Коверга А. Ю., Кубышкин Е. П.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

e-mail: kubysh@uniyar.ac.ru

получена 20 мая 2010

Ключевые слова: бесконечное запаздывание, распределенный ротор, вибрация, метод интегральных многообразий, теория нормальных форм, ядро Абеля, бифуркация

Изучается динамика распределенного ротора из материала с нелинейно-наследственными свойствами, одна из опор которого испытывает периодическую вибрацию. Математической моделью рассматриваемой механической системы является система дифференциальных уравнений в частных производных с бесконечным запаздыванием аргумента. Выявлены условия существования хаотических колебаний. Вычислены ляпуновские показатели и ляпуновская размерность.

1. Рассматривается идеальный распределенный ротор постоянного сечения длины l , вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω , концы которого опираются на подшипники. Предполагается, что одна из опор ротора испытывает периодическое воздействие (вибрацию). Материал ротора считаем наследственно вязкоупругим и подчиненным следующей реологической модели вязкоупругого тела [1]:

$$\sigma(t) = E \left(f(\varepsilon(t)) - \int_{-\infty}^0 R(\tau) f(\varepsilon(t + \tau)) d\tau \right),$$

где $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ – соответственно напряжение и относительная деформация, E – модуль Юнга, $R(\tau)$ – функция релаксации, $f(\varepsilon) = \varepsilon + f_3\varepsilon^3 + f_5\varepsilon^5 + \dots$, ($f_j > 0$) – нелинейная функция деформации. Относительно функции $R(\tau)$ ($-\infty < \tau < 0$) предполагаем выполнение следующих условий:

$$R(\tau) > 0, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} R(\tau) > 0, \quad \int_{-\infty}^0 R(\tau) d\tau < 1,$$

$$R(\tau) \leq M_0 \exp(\gamma_0 \tau), \quad (M_0, \gamma_0 > 0), \quad \tau \rightarrow -\infty. \quad (1)$$

Математической моделью рассматриваемой механической системы является следующая краевая задача [2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(b \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \int_{-\infty}^0 R(\tau) \exp(-i\Omega\tau) b \left(\left| \frac{\partial^2 u(s, t + \tau)}{\partial s^2} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u(s, t + \tau)}{\partial s^2} d\tau \right) = 0, \quad (2)$$

$$u|_{s=0} = \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{s=0} = 0, \quad (3)$$

$$\left(b \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \int_{-\infty}^0 R(\tau) \exp(-i\Omega\tau) b \left(\left| \frac{\partial^2 u(s, t + \tau)}{\partial s^2} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u(s, t + \tau)}{\partial s^2} d\tau \right) \Big|_{s=1} = \nu_1 \exp(i(\omega t + \gamma_1)), \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(b \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \int_{-\infty}^0 R(\tau) \exp(-i\Omega\tau) b \left(\left| \frac{\partial^2 u(s, t + \tau)}{\partial s^2} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u(s, t + \tau)}{\partial s^2} d\tau \right) \Big|_{s=1} = \nu_2 \exp(i(\omega t + \gamma_2)), \quad (5)$$

где

$$u(s, t) = u_x(s, t) + iu_y(s, t), \quad i = \sqrt{-1}, \quad 0 < \nu_1, \nu_2 \ll 1, \quad 0 \leq \gamma_1, \gamma_2 \leq 2\pi, \quad \omega \in R.$$

Начальные условия для решений уравнения (2) будут сформулированы ниже.

Краевая задача (2)–(5) приведена в безразмерных переменных

$$s = z/l, \quad u = u'/l, \quad t = t'/t_0, \quad \Omega = \Omega't_0, \quad t_0 = m^{1/2}l^2(EI_0)^{-1/2},$$

функции $a(\zeta)$, $b(\zeta)$ являются аналитическими в окрестности точки $\zeta = 0$ и имеют вид

$$a(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \dots, \quad b(\zeta) = 1 + b_1\zeta + \dots \quad (6)$$

Здесь $u'(z, t') = u'_x(z, t') + iu'_y(z, t')$ – смещения средней линии ротора в направлении осей OX и OY соответственно; ось OZ системы координат $OXYZ$, связанной с инерциальным пространством, направлена вдоль средней оси недеформированного ротора; t' – время; m – погонная масса ротора; $a_j = l^{4-2j}m^{1-j}(EI_0)^{j-1}a_j^*$, $b_j = (I_0l^{2j})^{-1}I_jf_{2j+1}$; $I_j = \int x_1^{2(j+1)}dx_1 = \int y_1^{2(j+1)}dy_1$ – моменты инерции поперечного сечения ротора относительно одной из осей соответствующих порядков; функция

$a^*(\zeta) = a_0^* + a_1^*\zeta + \dots$ ($a_j^* > 0$) характеризует внешнее нелинейное трение; ν_j , γ_j ($j = 1, 2$) и ω характеризуют амплитуду, фазу и частоту внешних периодического изгибающего момента и периодической силы.

Ниже изучается возможность возникновения у краевой задачи (2)–(5) хаотических колебаний (странных аттракторов). В качестве методов исследования используются метод интегральных многообразий и теория бифуркаций.

2. Уравнение (2) является уравнением с бесконечным запаздыванием аргумента. Прежде чем дать определение решения начально-краевой задачи для уравнения (2), сделаем следующие ограничения относительно функций $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$, обусловленные постановкой задачи, и введем некоторые функциональные подпространства. Ввиду того, что амплитуды колебаний ротора незначительны по сравнению с его длиной, в дальнейшем будем считать функции $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ бесконечно дифференцируемыми при $\zeta \in R$, совпадающими с (6) при $|\zeta| < \zeta_0$ и $a(\zeta) \equiv a_0$, $b(\zeta) \equiv 1$ при $|\zeta| > \zeta_1$, где $\zeta_0 < \zeta_1$ – некоторые фиксированные числа, выбором которых можем распорядиться. На (ζ_0, ζ_1) , $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ считаем гладко стремящимися к a_0 и 1 при $\zeta \rightarrow \zeta_1$ соответственно, конкретный их вид при этом существенного значения не имеет.

Рассмотрим оператор $Bv \equiv v^{IV}$, действующий в $H = W_2^2(0, 1)$, с областью определения $D(B) = \{v(s) \in C^6(0, 1), v(0) = v'(0) = v^{IV}(0) = v''(1) = v'''(1) = v^{VI}(1) = 0\}$. Скалярное произведение и норму в H определим как $(u, v)_H = (u''(s), v''(s))_{L_2(0,1)}$, $\|u\|_H = (u, u)_H^{1/2}$, $(*, *)_{L_2}$ – скалярное произведение в $L_2(0, 1)$. Оператор является, очевидно, симметричным и положительно определенным. Энергетическим скалярным произведением и энергетической нормой оператора B будут соответственно выражения $(u, v)_B = (v^{IV}(s), u^{IV}(s))_{L_2}$ и $\|u(s)\|_B = (u, u)_B^{1/2}$. Энергетическое пространство оператора B определяется замыканием в норме $\|\cdot\|_B$ множества функций $D(B)$ [3]. В результате имеем $H_B = \{v(s) \in W_2^4(0, 1), v(0) = v'(0) = v''(1) = v'''(1) = 0\}$. Обозначим через $B^{1/2}$ положительный корень из оператора B . Его область определения $H_{B^{1/2}} = \{v(s) \in W_2^3(0, 1), v(0) = v'(0) = v''(1) = 0\}$. Обозначим через D_γ ($0 < \gamma < \gamma_0$) пространство непрерывных функций вида $\{v(s, \tau) : 0 \leq s \leq 1, -\infty < \tau \leq 0, v(s, \tau) \in H_B \text{ (по } s), \|v(s, \tau)\|_{D_\gamma} = \sup_{-\infty < \tau \leq 0} (\exp(\gamma\tau)\|v(s, \tau)\|_{H_B}) < \infty\}$. Введем в рассмотрение пространство $H_1(Q_T)$ функций $v(s, t)$, определенных в $Q_T = \{0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$,

$$H_1(Q_T) = \{v(s, t) \in W_2^{4,2}(Q_T), v(0, t) = v_s(0, t) = v_{ss}(1, t) = v_{sss}(1, t) = 0\}$$

и множество функций вида

$$v(s, t) \in H_1(Q_T), \quad v(s, T) \equiv 0. \quad (7)$$

Умножим уравнение (2) на функцию вида (7) и проинтегрируем по $(s, t) \in Q_T$ с учетом краевых условий (3)–(5). В результате получим следующее интегральное равенство:

$$\int_0^T \left(-(u_t(s, t), v_t(s, t))_{L_2} + (a(|u_t(s, t)|^2)u_t(s, t), v(s, t))_{L_2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (b(|u_{ss}(s, t)|^2)u_{ss}(s, t) - \int_{-\infty}^0 R(\tau) \exp(-i\Omega\tau) \cdot b(|u_{ss}(s, t+\tau)|^2) \cdot u_{ss}(s, t+\tau) d\tau, v_{ss}(s, t))_{L_2} + \\
& + \nu_2 \exp(i(\omega t + \gamma_2))v(1, t) - \nu_1 \exp(i(\omega t + \gamma_1))v_s(1, t) \Big) dt + (u_t(s, 0), v(s, 0))_{L_2} = 0. \quad (8)
\end{aligned}$$

Под решением $u(s, t + \tau)$ ($-\infty < \tau \leq 0$) краевой задачи (2) – (5) в области Q_T , удовлетворяющим начальным условиям

$$u(s, t + \tau)|_{t=0} = u_0(s, \tau) \in D_\gamma, \quad u_t(s, 0) = u_1(s) \in H_{B^{1/2}}, \quad (9)$$

будем понимать функцию $u(s, t) \in H_1(Q_T)$, которая удовлетворяет интегральному соотношению (8) для любой функции $v(s, t)$ вида (7).

В работе [2] показано, что начально-краевая задача (2)–(5), (9) разрешима и это решение единственно.

Положим в (4)–(5) $\nu_1 = \nu_2 = 0$ и рассмотрим линейную часть краевой задачи (2)–(5)

$$\begin{aligned}
u_{tt} + a_0 u_t + u_{ssss} - \int_{-\infty}^0 R(\tau) \exp(-i\Omega\tau) u_{ssss}(s, t + \tau) d\tau &= 0, \quad (10) \\
u|_{s=0} = u_s|_{s=0} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(u_{ss} - \int_{-\infty}^0 R(\tau) \exp(-i\Omega\tau) u_{ss}(s, t + \tau) d\tau \right) \Big|_{s=1} &= \\
= \left(u_{ssss} - \int_{-\infty}^0 R(\tau) \exp(-i\Omega\tau) u_{ssss}(s, t + \tau) d\tau \right) \Big|_{s=1} &= 0. \quad (11)
\end{aligned}$$

Исследуем устойчивость решений краевой задачи (10)–(11). Отметим [4], что собственными значениями и собственными функциями оператора B , определенного в H_B , будут величины $\omega_n^2 = \beta_n^4$ ($n = 1, 2, \dots$), где β_n – положительные корни уравнения $\operatorname{ch} \beta_n \cdot \cos \beta_n + 1 = 0$ и функции $e_n(s) = w_n(s) / \|w_n(s)\|_{L_2}$, где

$$w_n(s) = (\operatorname{sh} \beta_n + \sin \beta_n)(\operatorname{ch}(\beta_n s) - \cos(\beta_n s)) - (\operatorname{ch} \beta_n + \cos \beta_n)(\operatorname{sh}(\beta_n s) - \sin(\beta_n s)),$$

которые образуют ортонормированный базис в H_B . С учетом этого положим $u_n(s, t) = e_n(s) \exp(\lambda t)$ и подставим в линейную часть интегрального равенства (8). В результате получим последовательность характеристических уравнений вида

$$l_n(\lambda) \equiv \lambda^2 + a_0 \lambda + \omega_n^2 \left(1 - \int_{-\infty}^0 R(\tau) \exp((\lambda - i\Omega)\tau) d\tau \right) = 0, \quad (12)$$

$n = 1, 2, \dots$, расположение корней которых определяет устойчивость решений краевой задачи (10)–(11). Отметим, что ввиду расходимости в (12) интеграла при $\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_0$, уравнение (12) имеет смысл лишь при $\operatorname{Re} \lambda > -\gamma_0$.

Изучим расположение корней последовательности уравнений (12). Воспользуемся методом \mathcal{D} -разбиений [5]. Положим для этого в (12) $\lambda = i\sigma$ и выделим вещественную и мнимую части. В результате будем иметь

$$-\sigma^2 + \omega_n^2(1 - R_C(\sigma - \Omega)) = 0, \quad (13)$$

$$a_0 = -\omega_n^2 R_S(\sigma - \Omega)/\sigma, \quad (14)$$

где

$$R_C(\sigma) = \int_0^{\infty} R(-\tau) \cos(\sigma\tau) d\tau, \quad R_S(\sigma) = \int_0^{\infty} R(-\tau) \sin(\sigma\tau) d\tau \quad (15)$$

соответственно составляющие нормированного комплексного модуля упругости материала

$$E^*(\sigma) = (1 - R_C(\sigma) + iR_S(\sigma)),$$

который определяется экспериментально [1]. Отметим, что согласно условию (1) при $\sigma > 0$, $0 < R_C(\sigma)$, $R_S(\sigma) < 1$, $R_C(\sigma), R_S(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Для $R(\tau)$, удовлетворяющих условиям (1), функции (15) качественно имеют вид, представленный на рис. 1. В соответствии с этим, кривые на плоскости (a_0, Ω) , соответствующие корням характеристического уравнения (12), расположенным на мнимой оси, качественно имеют вид, представленный на рис. 2. При этом каждая кривая является границей области устойчивости (неустойчивости) решений (10)–(11) по n -й собственной функции оператора B . Области неустойчивости заштрихованы. При этом $\Omega_{n0} = \omega_n(1 - R_C(0))^{1/2}$. Как следует из рис. 2, потеря устойчивости решений краевой задачи (10)–(11) может происходить по одной или по двум собственным функциям (формам) оператора B . В последнем случае каждая форма имеет собственную частоту колебаний.

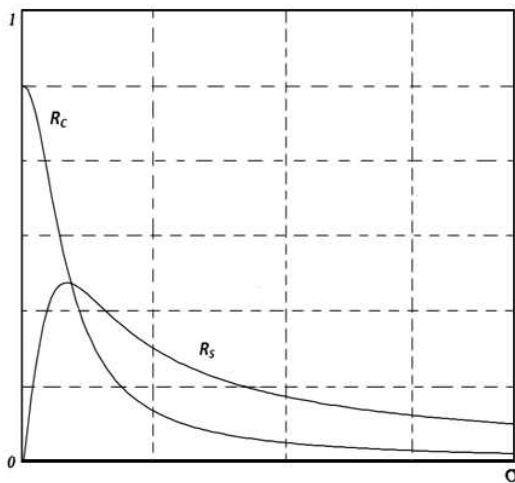


Рис. 1. Общий вид функций R_C и R_S

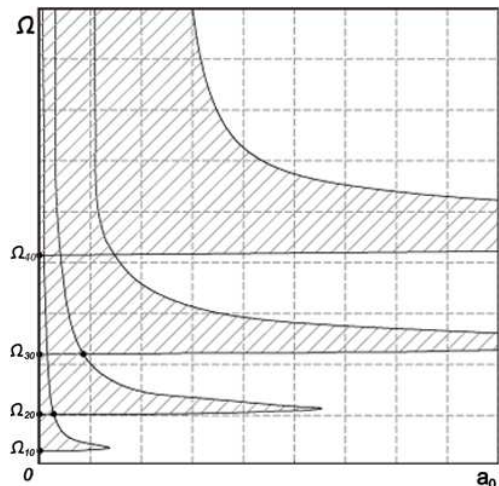


Рис. 2. Кривые, соответствующие корням уравнения

3. Рассмотрим случай потери устойчивости решений краевой задачи (10)–(11) по двум собственным функциям оператора B . Точку пересечения кривых, исходящих из Ω_{n0} и $\Omega_{n+1,0}$, обозначим (a_{0n}, Ω_n) , а соответствующие им значения σ через σ_n и

σ_{n+1} . Будем изучать поведение решений начально-краевой задачи (2)–(5),(9) при изменении параметров в окрестности указанных точек. Введем для этого параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ и положим

$$a = a_{0n} + a_{n1}\varepsilon, \quad \Omega = \Omega_n + \Omega_{n1}\varepsilon, \quad \nu_j = \nu_{j0}\varepsilon^{1/2}, \quad (j = 1, 2),$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\delta_1 = 2\sigma_n - \sigma_{n+1} + \varepsilon\delta_1. \quad (16)$$

Изучим характер установившихся колебательных решений краевой задачи (2)–(5), возникающих в окрестности нулевого решения при потере его устойчивости в предположениях (16). Для этого воспользуемся методом интегральных многообразий и теорией нормальных форм – уравнений, описывающих поведение траекторий на интегральных многообразиях.

Заметим следующее: в предположениях (16) начально-краевая задача (2)–(5), (9) имеет периодическое решение вида $u(s, \omega t; \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}g_0(s; \varepsilon) \exp(i\omega t)$. При этом, как легко видеть

$$g_0 = g_0(s; \varepsilon) = g_{00}(s) + \varepsilon g_{01}(s) + \dots \quad (17)$$

удовлетворяет следующей краевой задаче

$$E^*(\omega - \Omega)g_0^{IV} + \left[(-\omega^2 + i\omega a_0)g_0 + \right. \\ \left. + \varepsilon \left(i\omega^3 a_1 g_0 |g_0|^2 + E^*(\omega - \Omega)b_1 (g_0'' |g_0''|^2)'' + \dots \right) \right] = 0, \quad (18)$$

$$g_0|_{s=0} = g_0'|_{s=0} = 0, \quad (19)$$

$$E^*(\omega - \Omega)g_0''(1 + \varepsilon b_1 |g_0''|^2 + \dots)|_{s=1} = \nu_{10} \exp(i\gamma_1),$$

$$E^*(\omega - \Omega)(g_0''(1 + \varepsilon b_1 |g_0''|^2 + \dots))'|_{s=1} = \nu_{20} \exp(i\gamma_2). \quad (20)$$

В (17)–(20) точками обозначены слагаемые, имеющие по ε более высокий порядок малости. Приравнивая в (18)–(20) слагаемые, имеющие одинаковый порядок малости по ε , получим рекуррентную последовательность краевых задач вида

$$E^*(\omega - \Omega)g_{0j}^{IV} + (-\omega^2 + i\omega a_0)g_{0j} + f_j(s) = 0, \quad (21)$$

$$g_{0j}|_{s=0} = g_{0j}'|_{s=0} = 0,$$

$$E^*(\omega - \Omega)g_{0j}''|_{s=1} = p_{j1}, \quad E^*(\omega - \Omega)g_{0j}'''|_{s=1} = p_{j2}, \quad (22)$$

$j = 0, 1, \dots$. При этом на каждом шаге $f_j(s)$ и p_{j1}, p_{j2} – известные функции и величины. В частности $f_0(s) = 0, p_{01} = \nu_{10} \exp(i\gamma_1), p_{02} = \nu_{20} \exp(i\gamma_2)$. Краевые задачи (21),(22) однозначно разрешимы. Несложно показать, что ряд (17) при малых ε сходится. Для этого, например, можно воспользоваться схемой работы [6].

Фазовым пространством начально-краевой задачи (2)–(5), (9) является пространство $H = D_\gamma \oplus D(B^{1/2})$ (\oplus – прямая сумма пространств). Начально-краевая задача (2)–(5), (9) имеет [7] в окрестности нуля фазового пространства четырехмерное $2\pi/\omega$ -периодическое локальное устойчивое гладкое интегральное многообразие $G(\tau, z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, s; \varepsilon^{1/2})$ ($\tau = \omega t, G(\tau, 0, 0, 0, 0, s; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{1/2}g_0(s, \varepsilon) \exp(\tau), z_1, z_2 \in C$),

поведение решений на котором определяет поведение решений начально-краевой задачи (2)–(5), (9). Здесь $G(\cdot)$ – гладкий по совокупности переменных оператор, 2π -периодический по τ . Система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая поведение траекторий краевой задачи (2)–(5), (9) на интегральном многообразии, будет иметь вид

$$\dot{z}_1 = (i\sigma_n + \varepsilon\lambda_n^1 + d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + \varepsilon^{1/2}A_1\bar{z}_1z_2 \exp(i\omega t) + \dots, \quad (23)$$

$$\dot{z}_2 = (i\sigma_{n+1} + \varepsilon\lambda_{n+1}^1 + d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + \varepsilon^{1/2}A_2z_1^2 \exp(-i\omega t) + \dots \quad (24)$$

$$\lambda_k^1 = (l'_k(i\sigma_k))^{-1} [-\Omega_{n1}\omega_k^2 R'_C(\sigma_k - \Omega_n) + i(-a_{n1}\sigma_k + \Omega_{n1}\omega_k^2 R'_S(\sigma_k - \Omega_n))], \quad (k = n, n+1)$$

$$d_{11} = -(l'_n(i\sigma_n))^{-1}(b_1 E^*(\sigma_n - \Omega_n)\hat{e}_{nn} + a_1 i\sigma_n^3 e_{nn}),$$

$$d_{12} = -2(l'_n(i\sigma_n))^{-1}(b_1 E^*(\sigma_n - \Omega_n)\hat{e}_{n+1,n} + a_1 i\sigma_n\sigma_{n+1}^2 e_{n,n+1}),$$

$$d_{21} = -2(l'_{n+1}(i\sigma_{n+1}))^{-1}(b_1 E^*(\sigma_{n+1} - \Omega_n)\hat{e}_{n,n+1} + a_1 i\sigma_{n+1}\sigma_n^2 e_{n+1,n}),$$

$$d_{22} = -(l'_{n+1}(i\sigma_{n+1}))^{-1}(b_1 E^*(\sigma_{n+1} - \Omega_n)\hat{e}_{n+1,n+1} + a_1 i\sigma_{n+1}^3 e_{n+1,n+1}),$$

где

$$\hat{e}_{pq} = ((e''_p(s))^2, (e''_q(s))^2)_{L_2}, \quad e_{pq} = (e^2_p(s), e^2_q(s))_{L_2}, \quad (p, q = n, n+1),$$

$$A_1 = -2(l'(i\sigma_n))^{-1} [ia_1\sigma_n\sigma_{n+1}(2\sigma_n - \sigma_{n+1}) \times$$

$$\times (e_n(s)e_{n+1}(s)g_{00}(s), e_n(s))_{L_2} + b_1 E^*(\sigma_n - \Omega_n)(e''_n(s)e''_{n+1}(s)g''_{00}(s), e''_n(s))_{L_2}],$$

$$A_2 = -(l'(i\sigma_{n+1}))^{-1} [ia_1\sigma_n^2(2\sigma_n - \sigma_{n+1}) \times$$

$$\times (e_n^2(s)\overline{g_{00}(s)}, e_{n+1}(s))_{L_2} + b_1 E^*(\sigma_{n+1} - \Omega_n)(e_n^2(s)\overline{g''_{00}(s)}, e''_{n+1}(s))_{L_2}].$$

В (23)–(24) точками обозначены слагаемые, имеющие по соответствующим переменным более высокий порядок малости. В явном виде приведены лишь „главные“ слагаемые разложений.

Коэффициенты, входящие в (23)–(24), определяются по следующей стандартной схеме. Дифференциальные уравнения (23)–(24) подставляются в краевую задачу (2)–(5) в силу интегрального многообразия $G(\cdot)$, имеющего следующее разложение

$$G(\tau, z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, s; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{1/2}g_0(s; \varepsilon) + z_1g_n(s) + z_1g_{n+1}(s) + z_1^2\bar{z}_1g_{21}(s) + \dots, \quad (25)$$

где $g_j(s) = \exp(i\sigma_j s)$, ($j = n, n+1$), остальные $g_*(s)$ – искомые функции. В (25) точками обозначены слагаемые, имеющие по εz_j ($j = 1, 2$) более высокий порядок малости. Приравнявая теперь коэффициенты в (2)–(5) при одинаковых степенях εz_j ($j = 1, 2$), получим рекуррентную последовательность краевых задач для определения функций $g_*(s)$, условия разрешимости которых позволяют однозначно определить коэффициенты дифференциальных уравнений (23), (24).

Положим $z_j = \varepsilon^{1/2}\rho_j \exp(i\tau_j)$, ($\rho_j \geq 0, j = 1, 2$), $t \rightarrow \varepsilon^{-1}t$ и выделим главную часть уравнений „медленных переменных“ $\rho_1, \rho_2, \Theta = \omega t - 2\tau_1 + \tau_2$. В результате будем иметь

$$\dot{\rho}_1 = (\tau'_n + a_{11}\rho_1^2 + a_{12}\rho_2^2)\rho_1 + |A_1|\rho_1\rho_2 \cos(\Theta + \beta_1), \quad (26)$$

$$\dot{\rho}_2 = (\tau'_{n+1} + a_{21}\rho_1^2 + a_{22}\rho_2^2)\rho_2 + |A_2|\rho_1^2 \cos(-\Theta + \beta_2), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} = & \delta + (-2c_{11} + c_{21})\rho_1^2 + (-2c_{12} + c_{22})\rho_2^2 - \\ & -2|A_1|\rho_2 \sin(\Theta + \beta_1) + |A_2|\rho_1/\rho_2 \sin(-\Theta + \beta_2), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \tau'_j = \operatorname{Re} \lambda_j^1, \quad \delta = & \delta_1 - 2 \operatorname{Im} \lambda_n^1 + \operatorname{Im} \lambda_{n+1}^1, \\ d_{kj} = a_{kj} + ic_{kj}, \quad A_j = & |A_j| \exp(i\beta_j), \quad (k, j = 1, 2). \end{aligned}$$

4. Изучим поведение решений системы (26)–(28) применительно к модифицированному ядру Абеля [1]:

$$R(\tau) = \alpha|\tau|^{-\alpha}/\Gamma(1 - \alpha) \exp(-\tau) \quad (0 < \alpha < 1),$$

где $\Gamma(1 - \alpha)$ – гамма-функция Эйлера. В результате будем иметь

$$R_C(\sigma) = \alpha/(1 + \sigma^2)^{(1-\alpha)/2} \cos((1 - \alpha) \operatorname{arctg}(\sigma)),$$

$$R_S(\sigma) = \alpha/(1 + \sigma^2)^{(1-\alpha)/2} \sin((1 - \alpha) \operatorname{arctg}(\sigma)).$$

Положим $\alpha = 0.84$ и обратимся к рис. 2. Координаты точки $(a_{01}, \Omega_1) = (0.747, 21.463)$. В данном случае потеря устойчивости решений краевой задачи (10)–(11) происходит по двум собственным функциям (формам) оператора B . Соответствующие частоты колебаний равны $\sigma_1 = 2.888$ и $\sigma_2 = 21.424$.

Выберем $\Omega_{n1} = 1.2$, $a_{n1} = 1.2$, $a_1 = 0.1$, $b_1 = 0.21$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0.6$. Считая $\nu_{10} = \nu_{20} = \nu_0$, вычислим коэффициенты системы (26)–(28) согласно приведенным выше формулам. Пронормировав теперь $\rho_1 \rightarrow 0.05\rho_1$, $\rho_2 \rightarrow 0.02\rho_2$ получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\rho}_1 = (3.94 - \rho_1^2 - 1.25\rho_2^2)\rho_1 + 1.8\nu_0\rho_1\rho_2 \cos(\Theta - 0.46),$$

$$\dot{\rho}_2 = (4.7 - 1.41\rho_1^2 - \rho_2^2)\rho_2 + 0.003\nu_0\rho_1^2 \cos(-\Theta + 0.55),$$

$$\dot{\Theta} = \delta + 2.28\rho_1^2 + 1.93\rho_2^2 - 3.6\nu_0\rho_2 \sin(\Theta - 0.46) + 0.003\nu_0\rho_1/\rho_2 \sin(-\Theta + 0.55),$$

зависящую от двух параметров ν_0 и δ . Система численно анализировалась при разных значениях параметров ν_0 и δ с использованием программы Tracer [8]. Система может иметь как устойчивые состояния равновесия, периодические решения, так и хаотические колебания. Так, при $\delta = 2.1$, изменяя ν_0 , имеем следующую динамику. При $\nu_0 = 2.8$ имеем устойчивое состояние равновесия с координатами $\rho_{10} = 1.624$, $\rho_{20} = 0.991$, $\Theta_0 = 8.329$. Затем из состояния равновесия при $\nu_0 \approx 3.25$ происходит рождение цикла и далее при $\nu_0 \approx 4.73$, $\nu_0 \approx 4.961$, $\nu_0 \approx 4.997$ происходит серия бифуркаций удвоения периода. В результате чего при $\nu_0 \approx 5.05$ образуется хаотический аттрактор. Его ляпуновские показатели равны $\lambda_1 \approx 0.38$, $\lambda_2 \approx 0$, $\lambda_3 \approx -7.195$, а ляпуновская размерность $d_L \approx 2.053$. Проекция аттрактора на плоскость (ρ_1, ρ_2) приведена на рис. 3. При этом переменная Θ неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$. На рис. 4 изображено сечение Пуанкаре плоскостью $\Theta = \pi/2$. Просматривается фрактальная структура предельного множества.

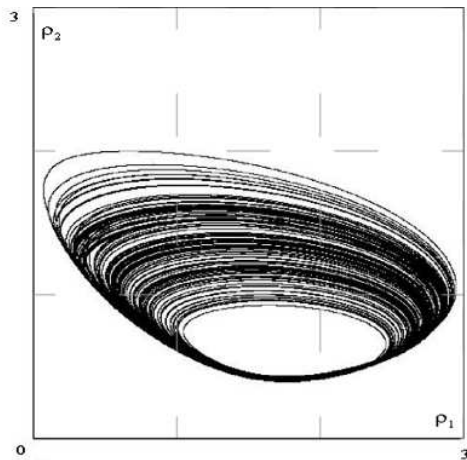


Рис. 3. Проекция аттрактора на плоскость (ρ_1, ρ_2)

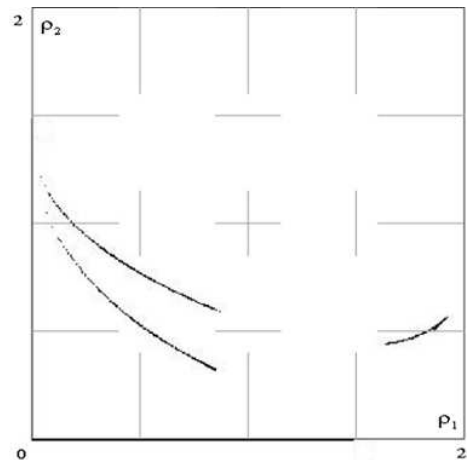


Рис. 4. Сечение Пуанкаре плоскостью $\Theta = \pi/2$

Список литературы

1. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
2. Кубышкин Е. П. Некоторые вопросы динамики распределенных роторов // Математика в Ярославском университете: Сборник обзорных статей к 25-летию математического факультета. Ярославль, 2001. С. 157 – 182.
3. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
4. Вибрации в технике. Т. 1 // Справочник в 6 томах. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
5. Неймарк Ю. И. \mathcal{D} -разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линейаризованных распределенных систем) // ПММ. 1949. Т. 13, №4. С. 655 – 667.
6. Кубышкин Е. П. Параметрический резонанс в линейных системах с последействием // Исследования по устойчивости и теории колебаний: Межвузовский тематический сборник. Ярославль, 1976. С. 43 – 76.
7. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1985. 376 с.
8. Глызин Д. С. Пакет программ для анализа динамических систем "Tracer". Заявка № 2008610548 от 14.02.2008 г. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008611464. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 24.03.2008 г.

Chaotic oscillations of a distributed system with infinite delay

Koverga A. U., Kubyshkin E. P.

Keywords: infinite delay, distributed rotor, vibration, method of integrated varieties, theory of normal forms, Abelian kernel, bifurcation

It is considered the dynamics of a distributed rotor from a material with nonlinear-hereditary properties, one of its supports being under a periodical vibration. The mathematical model of the considered mechanical system is a system of differential equations in partial derivatives with infinite delay of the argument. It is found the conditions of chaotic fluctuations. The Lyapunov indices and Lyapunov dimension are calculated.

Сведения об авторах:

Коверга Александр Юрьевич,

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
ассистент кафедры общей математики;

Кубышкин Евгений Павлович,

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования.