

УДК 517.51+514.17

Резонанс собственных частот в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа

Куликов А. Н., Пилипенко Г. В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: pilipenkogv@gmail.com

получена 14 января 2010

Ключевые слова: внутренний резонанс, краевая задача, дифференциальный оператор, нижняя критическая скорость флаттера

Рассматривается в линейной постановке задача о колебаниях пластинки в сверхзвуковом потоке газа. Колебания такой пластинки изучаются в том случае, когда один из ее концов жестко закреплен, а второй свободен. Найдены те значения скорости потока, при которых реализуются внутренние резонансы собственных частот 1:1, 1:2, 1:3. Определение скорости и соответствующих частот сводится к системе из двух трансцендентных уравнений. Сама система исследуется численно.

Постановка задачи

Рассмотрим малые колебания пластинки в сверхзвуковом потоке газа, в случае ее цилиндрического изгиба. В линейной постановке колебания такой пластинки описываются уравнением [1]

$$\rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\gamma + \frac{\chi p_\infty}{c_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\chi p_\infty}{c_\infty} U \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (0.1)$$

Здесь $w = w(t, x)$ — прогиб срединной поверхности пластинки, U — скорость набегающего потока газа, c_∞ — скорость звука в невозмущенном газе ($U > c_\infty$), h — толщина пластинки, ρ_0 — плотность материала пластинки, χ — показатель политропии, D — цилиндрическая жесткость, γ — конструктивное демпфирование. Наконец, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, где E — модуль упругости (модуль Юнга), а ν — коэффициент Пуассона.

Считаем, что $x \in [0, l]$, т.е. l — длина пластинки в направлении скорости набегающего потока. Отсутствие зависимости от переменной y отражает то обстоятельство, что изгиб считается цилиндрическим.

Положим

$$x = x_1 t, t = at_1, a = \frac{\rho_0 h l^4}{D} = \frac{12 \rho_0 l^4 (1 - \nu^2)}{E h^2}.$$

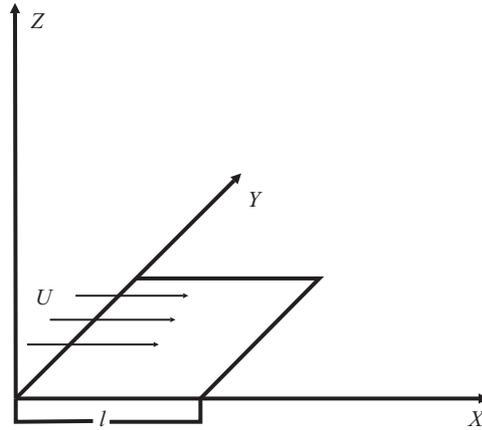


Рис. 1.

В новых переменных x_1, t_1 уравнение (0.1) переписывается в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (0.2)$$

В уравнении (0.2) и далее индекс 1 у независимых переменных опускается. Здесь

$$g = \frac{12 \left(\gamma + \frac{\chi p_\infty}{c_\infty} \right) l^4 (1 - \nu^2)}{E h^2}, \quad c = \frac{\chi p_\infty U}{c_\infty} \frac{12 l^4 (1 - \nu^2)}{E h^2},$$

а коэффициент $c \geq 0$ далее будем трактовать как нормированную скорость набегающего потока. Нормированный коэффициент демпфирования g часто достаточно мал. Так, если материал сталь, а пластинка обтекается воздухом и конструктивное демпфирование мало, то величина g имеет порядок 10^{-3} . В работах [1 – 3] считают, что для g характерным значением следует считать величину $5 \cdot 10^{-3}$.

Уравнение (0.2) следует рассматривать вместе с краевыми условиями. В данной работе считается, что

$$w(0, t) = w_x(0, t) = w_{xx}(1, t) = w_{xxx}(1, t) = 0. \quad (0.3)$$

С физической точки зрения краевые условия (0.3) отражают то обстоятельство, что один конец пластинки ($x = 0$) жестко закреплен, а второй свободен.

Краевая задача (0.2), (0.3) имеет нулевое состояние равновесия, для исследования устойчивости которого положим $w(t, x) = \exp(\lambda t)v(x)$. Совокупность таких $\mu \in C(R)$, при которых краевая задача

$$v^{IV} + cv' + (g\mu + \mu^2)v = 0, \quad (0.4)$$

$$v(0) = v'(0) = v''(1) = v'''(1) = 0,$$

имеет нетривиальные решения, как это принято, называют спектром устойчивости. Критический случай в задаче об устойчивости выделяет равенство $Re\mu_j = 0$, если для остальных μ_k имеет место неравенство $Re\mu_k < 0$ ($j, k \in N$).

Пусть $\mu = i\sigma$, тогда у дифференциального оператора

$$L(c)v = v^{IV} + cv',$$

область определения которого состоит из достаточно гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (0.3), есть собственное число $\lambda = \sigma^2 - ig\sigma$. Множество таких λ лежит на параболы (Рис. 2), определяемой равенствами $Re\lambda = \sigma^2$, $Im\lambda = -g\sigma$.

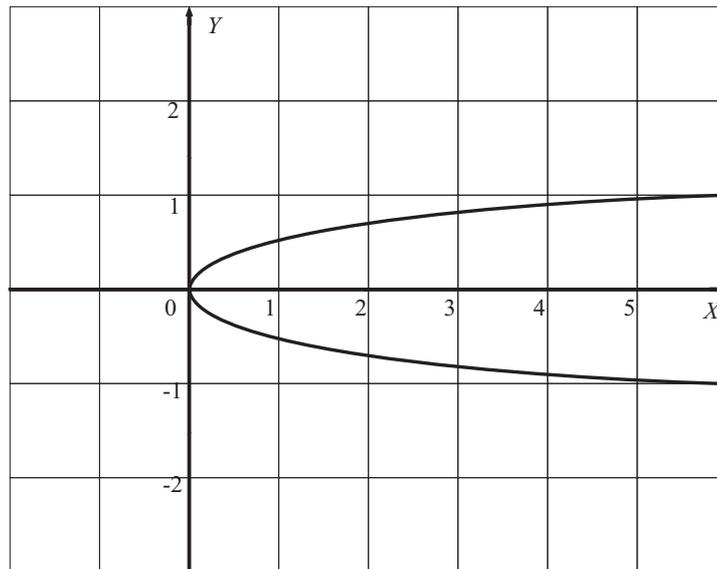


Рис. 2.

Эта параболы носит название “параболы устойчивости”. Если λ — собственное значение дифференциального оператора $L(c)$ лежит внутри нее, то нулевое решение асимптотически устойчиво и оно не устойчиво, если существуют собственные значения, лежащие вне этой параболы.

Минимальное $c > 0$, при котором впервые появляются собственные значения на “параболе устойчивости”, называют скоростью флаттера, если соответствующее собственное значение $\lambda \neq 0$. При $\lambda = 0$ соответствующее c реализует критический случай нулевого собственного значения в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия. В последующем случае речь пойдет о дивергентном варианте потери устойчивости. При $c = 0$ спектр оператора $L(c)$ состоит из таких λ , которые удовлетворяют уравнению $\cos \lambda^{1/4} \cos h\lambda^{1/4} = -1$. Прежде чем попасть на “параболу устойчивости”, собственные значения должны стать комплексными.

Пусть $I_0(c)$ — множество таких c , при которых $\lambda \in R$, $I_0(c) \neq \emptyset$, так как $c = 0$ принадлежит этому множеству. Пусть $c_1 = \sup_{c \in I_0(c)} c$, данное значение c_1 называют нижней критической скоростью флаттера (при условии его существования). Очевидно, что $c_1 \leq c_0$, но при малых значениях g величина c_1 дает неплохое представление о величине c_0 , а если $g = 0$, то $c_1 = c_0$. Термин нижняя критическая скорость флаттера впервые ввел А.А. Мовчан. Им же были предприняты первые попытки исследования по определению нижней критической скорости флаттера.

В работе А.А. Мовчана (см. [1]) были рассмотрены краевые условия шарнирного опирания $w(x)_{x=0, x=\pi} = w''(x)_{x=0, x=\pi} = 0$.

1. Определение нижней критической скорости флаттера

В этом разделе, как ясно из названия, будет исследоваться вопрос об определении нижней критической скорости флаттера для уравнения (0.2) с краевыми условиями (0.3).

Рассмотрим краевую задачу:

$$v^{IV} + cv' = \lambda v, \quad (1.1)$$

$$v(0) = v'(0) = v''(1) = v'''(1) = 0. \quad (1.2)$$

Напомним, что краевые условия (1.2) – это условия, при которых жестко закрепленным остается только один конец пластины, а другой остается свободным. При исследовании спектральной краевой задачи (1.1), (1.2) нашей целью будет нахождение величины $c_1 = \sup_{c \in I_0(c)} c$. В наших обозначениях c_1 – нижняя критическая скорость флаттера, а множество $I_0(c) = \{c : \lambda \in R\}$.

Пусть сначала $\lambda \in I_0(c)$. Тогда для дифференциального уравнения (1.1) может быть найдено общее решение:

$$v(x) = A_1 \exp(\mu_1 x) + A_2 \exp(\mu_2 x) + A_3 \exp(\mu_3 x) + A_4 \exp(\mu_4 x), \quad (1.3)$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ – корни характеристического уравнения

$$\mu^4 + c\mu - \lambda = 0, \quad (1.4)$$

а λ одно из собственных чисел краевой задачи (1.1), (1.2).

Лемма 1.1. Пусть λ – собственное число оператора $L(c)$, где $c \in I_0(c)$. Тогда справедливо неравенство: $\lambda > 0$.

Умножим (1.1) на $v = v(x) \neq 0$ и проинтегрируем от 0 до 1. Получим равенство:

$$\int_0^1 v^{IV}(x) v(x) dx + c \int_0^1 v'(x) v(x) dx = \lambda \int_0^1 v^2(x) dx.$$

Заметим, что $\int_0^1 v'(x) v(x) dx = \frac{v^2(1)}{2}$, если $v(x) \in D_L$ – области определения оператора $L(c)$. Интегрированием по частям убеждаемся в справедливости равенства:

$$\int_0^1 v^{IV}(x) v(x) dx = \int_0^1 (v''(x))^2 dx.$$

Поэтому $\int_0^1 v^{IV}(x) v(x) dx \geq 0$. Равенства $v(1) = 0$ и $\int_0^1 v^{IV}(x) v(x) dx = 0$ одновременно выполнены быть не могут. Последнее проверяется стандартным образом. При

данной проверке следует учесть, что функция $v(x)$ удовлетворяет краевым условиям (1), (2). Следовательно, справедливо неравенство $\lambda > 0$ и потеря устойчивости может происходить только колебательным образом.

Возвратимся к анализу характеристического уравнения (1.4). Справедлива лемма.

Лемма 1.2. Пусть λ – собственное число краевой задачи (1.1), (1.2). Тогда характеристическое уравнение (1.4) имеет два комплексно-сопряженных корня и два действительных.

В силу теоремы Виета для корней уравнения (1.4) можно записать следующую систему уравнений:

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 0, \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4 = 0, \quad (1.5)$$

$$\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4 = -c < 0, \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = -\lambda < 0.$$

Откуда получаем

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2 = 0 \quad (1.6)$$

Понятно, что у уравнения (1.4) должны быть комплексные корни. Поскольку у уравнения (1.4) коэффициенты действительные, то комплексные корни могут являться только парами. Значит, по меньшей мере два корня имеют вид:

$$\mu_{1,2} = \alpha \pm i\beta (\beta > 0).$$

Учитывая то, что произведение комплексно-сопряженных корней больше нуля, из четвертого равенства системы (1.5) следует, что два других корня характеристического уравнения (1.4) действительные. Выразим из первого равенства системы (1.5) μ_3 и подставим это выражение в равенство (1.6). В итоге получим

$$\mu_{3,4} = -\alpha \pm \sigma, \sigma = \sqrt{\beta^2 - 2\alpha^2}.$$

Откуда получаем

$$c = 4\alpha(\beta^2 - \alpha^2), \lambda = \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 3\alpha^4 = (\alpha^2 + \beta^2)(\beta^2 - 3\alpha^2), \alpha > 0, \beta > 3\alpha^2.$$

Подставив (1.3) в краевые условия (1.2), получим систему четырёх линейных однородных уравнений для определения A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= 0, A_1\mu_1 + A_2\mu_2 + A_3\mu_3 + A_4\mu_4 = 0, \\ A_1\mu_1^2 \exp(\mu_1) + A_2\mu_2^2 \exp(\mu_2) + A_3\mu_3^2 \exp(\mu_3) + A_4\mu_4^2 \exp(\mu_4) &= 0, \\ A_1\mu_1^3 \exp(\mu_1) + A_2\mu_2^3 \exp(\mu_2) + A_3\mu_3^3 \exp(\mu_3) + A_4\mu_4^3 \exp(\mu_4) &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для того, чтобы однородная система (1.7) имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы её определитель был равен нулю, то есть выполнялось равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ \mu_1^2 \phi_1 & \mu_2^2 \phi_2 & \mu_3^2 \phi_3 & \mu_4^2 \phi_4 \\ \mu_1^3 \phi_1 & \mu_2^3 \phi_2 & \mu_3^3 \phi_3 & \mu_4^3 \phi_4 \end{vmatrix} = 0,$$

где $\phi_i = \exp(\mu_i)$.

Раскрывая определитель и подставляя вместо μ_i и ϕ_i выражения от α , β и σ и используя стандартные тригонометрические преобразования, приходим к уравнению

$$P(\alpha, \beta, \sigma) = 0, \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta, \sigma) = & \beta \sigma \left((3\alpha^2 - \beta^2)^2 \operatorname{ch}(2\alpha) - 4\alpha(\alpha^2 - \beta^2)^2 e^{2\alpha} \right) + \\ & + 3\alpha^2 (2\alpha\beta \cos\beta + (\alpha^2 - \beta^2) \sin\beta) (2\alpha\sigma \operatorname{ch}\sigma + (\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{sh}\sigma) + \\ & + \beta\sigma ((\alpha^2 - \beta^2) \cos\beta - 2\alpha\beta \sin\beta) ((\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{ch}\sigma + 2\alpha\sigma \operatorname{sh}\sigma). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$c = Q(\alpha, \beta) = 4\alpha(\beta^2 - \alpha^2), \quad (1.9)$$

для которой, согласно постановке задачи, следует найти максимум. При этом мы решаем задачу на условный экстремум, так как функция (1.9) изучается вместе с уравнением связи (1.8).

$$\left[\begin{array}{l} Q(\alpha, \beta) \rightarrow \max \\ P(\alpha, \beta) = 0 \end{array} \right.$$

Введем в рассмотрение функцию Лагранжа $Z = Q(\alpha, \beta) + tP(\alpha, \beta)$. Как следствие необходимых условий экстремума ($Z'_\alpha = 0$, $Z'_\beta = 0$, $Z'_t = 0$) получаем систему уравнений для определения α и β :

$$\begin{cases} P(\alpha, \beta) = 0, \\ F(\alpha, \beta) = 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

где $F(\alpha, \beta) = \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{\partial Q}{\partial \beta} - \frac{\partial P}{\partial \beta} \frac{\partial Q}{\partial \alpha}$. Равенство $F(\alpha, \beta) = 0$, как известно [2, 3], может быть получено как следствие необходимых условий наличия у линейного оператора $L(c)$ кратного собственного значения.

Решение системы трансцендентных уравнений (1.10) находится как точка пересечения двух графиков функций $P(\alpha, \beta) = 0$ и $F(\alpha, \beta) = 0$ (Рис. 3).

Анализ системы (1.10) показал, что

$$(\alpha_0, \beta_0) = (1.41553, 5, 08987), c_{11} = 135, 34194, \lambda_{01} = 555, 2962.$$

При этом выборе α, β решение системы (1.7) имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= -0.16033 - i 0.86117, A_3 = -0.679332, \\ A_2 &= -0.16033 + i 0.86117, A_4 = -1. \end{aligned}$$

Отметим также, что для остальных решений системы (1.10) находятся такие α и β , для которых выполняется неравенство $c_{1n} > c_{11}$. Для иллюстрации приведем найденные значения c_{1n} в случаях $n = 2, 3, 4, 5$:

$$c_{12} = 1908.63508, c_{13} = 7398.87658, c_{14} = 18638.49749, c_{15} = 37655.39365.$$

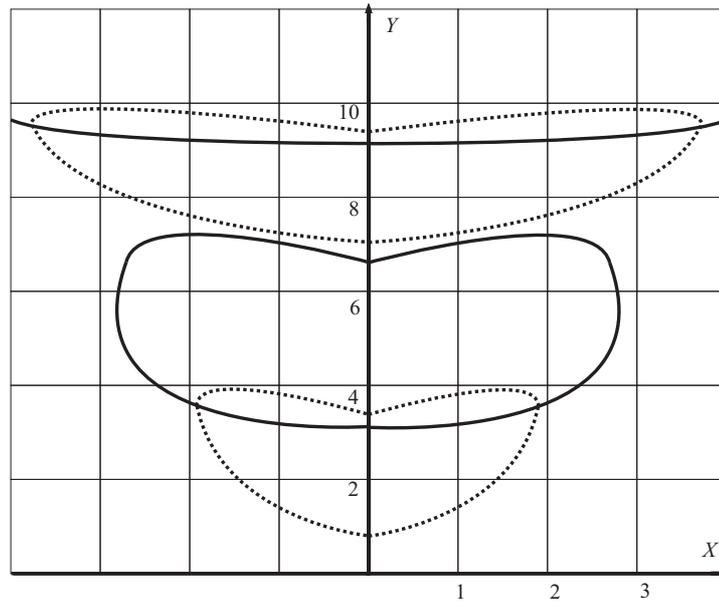


Рис. 3.

Как ранее упоминалось в работе, c_1 является нижней критической скоростью флаттера и $c_1 = \sup_{c \in I_0(c)} c$, где $I_0(c) = \{c : \lambda \in R\}$. В результате таких построений получаем, что при $c = c_1$ соответствующее число λ_0 – кратное. Оператор $L(c)$ не может иметь два или более линейно независимых собственных элемента, так как ранг системы уравнений (1.7) равен трем. Это следует из того, что для $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0)$ определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_1^2 \exp(\mu_1) & \mu_2^2 \exp(\mu_2) & \mu_3^2 \exp(\mu_3) \end{vmatrix} = i 2225.$$

Последнее означает, что линейный оператор $L(c)$ при $c = c_1$ наряду с собственным элементом

$$e_0(x) = A_1 \exp(\mu_1 x) + A_2 \exp(\mu_2 x) + A_3 \exp(\mu_3 x) + A_4 \exp(\mu_4 x),$$

где $A_i, \mu_i (i = 1, 2, 3, 4)$ были указаны ранее, должен иметь присоединенный элемент $h_0(x)$. Его можно найти как решение следующей краевой задачи:

$$h_0^{IV}(x) + c h_0'(x) - \lambda h_0(x) = e_0(x),$$

$$h_0(0) = h_0'(0) = h_0''(1) = h_0'''(1) = 0.$$

Интегрируя последнюю краевую задачу, находим, что

$$h_0(x) = \sum_{i=1}^4 B_i \exp(\mu_i x) + x \sum_{i=1}^4 C_i \exp(\mu_i x).$$

Анализ краевой задачи показывает, что она имеет решения и при этом

$$\begin{aligned} B_1 &= -0.00246 + i 0.00083, & B_3 &= 0.00493, \\ B_2 &= -0.00246 - i 0.00083, & B_4 &= 0, \\ C_1 &= 0.00158 + i 0.00075, & C_3 &= -0.00247, \\ C_2 &= 0.00158 - i 0.00075, & C_4 &= -0.0013. \end{aligned}$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *При $c = c_1$ оператор $L(c_1)$ имеет двукратное собственное значение, которому соответствует собственный и присоединенный элементы.*

Для оператора $L(c)v = v^{IV} + cv'$ рассмотрим формально сопряженный оператор $L^*(c)u$. Стандартные вычисления, основанные на том, что $(L(c)v, u) = (v, L^*(c)u)$ (в нашем случае скалярное произведение определяется как скалярное произведение в $L_2(0, 1)$), показывают, что

$$L^*(c)u = u^{IV} - cu',$$

где u удовлетворяет краевым условиям

$$u(0) = u'(0) = 0, u''(1) = 0, u'''(1) = cu(1).$$

Нетрудно проверить, что сопряженный оператор $L^*(c_1)$ имеет двукратное собственное значение $\lambda = \lambda_0$, найденное ранее для оператора $L(c_1)$, и ему отвечает собственный вектор $p_0(x)$, а также присоединенный $q_0(x)$. В результате вычисления было получено, что эти функции $p_0(x), q_0(x)$ могут быть выбраны следующим образом:

$$p_0(x) = \sum_{i=1}^4 a_i \exp(\mu_i x), q_0(x) = \sum_{i=1}^4 b_i \exp(\mu_i x) + x \sum_{i=1}^4 d_i \exp(\mu_i x),$$

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.49977 - i 0.1819, a_2 = \bar{a}_1, a_3 = -0.0044, a_4 = 1, \\ b_1 &= -i 0.00042, b_2 = \bar{b}_1, b_3 = 0, b_4 = 0, \\ d_1 &= -0.00029 - i 0.00102, d_2 = \bar{d}_1, d_3 = 0, d_4 = -0.00364. \end{aligned}$$

Вычисления произведены с точностью до 5 десятичных знаков.

2. Резонанс собственных частот 1:2

Как уже отмечалось в п. 1, для исследования устойчивости нулевого состояния равновесия краевой задачи (0.2), (0.3) следует найти нетривиальные решения вида $\exp(\lambda t) v(x)$, где $v(x)$ оказывается собственным элементом линейного дифференциального оператора $L(c)$. Соответствующее собственное значение $\lambda = -\nu^2 - g\nu$. Как и раньше, рассмотрим случай $g = 0$. Тогда при $c \in [0, c_1]$ все собственные значения оператора $L(c)$ положительные и, следовательно, собственные числа спектра устойчивости $\nu = i\sigma$, где $\sigma \in R$).

Найдем те $c < c_1$, при которых существуют два собственных числа спектра устойчивости вида $\nu_1 = i\sigma$, $\nu_2 = 2i\sigma$. В таком случае исследование задачи сводится к рассмотрению оператора $L(c)$, у которого следует найти такое $c = c_2 < c_1$, что $\lambda_1 = \sigma^2$, $\lambda_2 = 4\sigma^2$. Следовательно, собственные числа находятся в резонансе 1:4 ($\lambda_1 : \lambda_2 = 1 : 4$).

Напомним, что задача по нахождению собственных чисел линейного дифференциального оператора $L(c)$ в п. 1 была сведена к исследованию характеристического уравнения (1.8). Его вывод базировался на рассмотрении уравнения (1.4). Учитывая структуру его корней при $\lambda \in I_0(c)$ имеем равенства

$$c = 4\alpha(\beta^2 - \alpha^2), \lambda = (\alpha^2 + \beta^2)(\beta^2 - 3\alpha^2), \alpha > 0, \beta > 3\alpha^2. \quad (2.1)$$

Используя второе равенство системы (2.1), находим, что

$$\beta^2 = \alpha^2 + \sqrt{4\alpha^2 + \lambda}, (\lambda > 0).$$

Подстановка выражения для β^2 в первое равенство системы (2.1) дает для $\alpha^2 = y$ уравнение

$$y^3 + py + q = 0, \quad (2.2)$$

где $p = \frac{\lambda}{4}$, $q = -\frac{c^2}{64}$. Корни уравнения (2.2) можно получить с помощью формулы Кардано [5]:

$$y_1 = A + B, y_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3},$$

где $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}$, $B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}$, $Q = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$. В нашем случае

$$Q = \frac{c_4}{16384} + \frac{\lambda^3}{1728}.$$

И поэтому уравнение (2.2) имеет только один положительный корень α . Откуда находим следующие выражения для $\alpha = \alpha(\lambda, c)$, $\beta = \beta(\lambda, c)$:

$$\alpha(\lambda, c) = \sqrt{\Theta(\lambda, c)^{\frac{1}{3}} - 4\lambda\Theta(\lambda, c)^{-\frac{1}{3}}},$$

$$\beta(\lambda, c) = \sqrt{\alpha^2(\lambda, c) + \sqrt{4\alpha(\lambda, c) + \lambda}},$$

где $\Theta(\lambda, c) = \frac{c^2}{128} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{12}\right)^3 + \left(\frac{c^2}{128}\right)^2}$. Подставим теперь $\alpha(\lambda, c)$, $\beta(\lambda, c)$ в правую часть характеристического уравнения (1.8):

$$P_0(\lambda, c) = P(\alpha(\lambda, c), \beta(\lambda, c)) = 0. \quad (2.3)$$

Для нахождения c , при котором оператор $L(c)$ имеет собственные числа λ , 4λ , необходимо рассмотреть систему

$$P_0(\lambda, c) = 0, P_0(4\lambda, c) = 0. \quad (2.4)$$

Данную систему можно решить численно. При этом удобна замена $x = \frac{c^2}{128}$, $y = \frac{\lambda}{12}$, которая позволяет упростить левые части системы (2.4). Положим

$$F_1(x, y) = P_0(\sqrt{128x}, 12y), F_2(x, y) = F_1(x, 4y).$$

Графики неявных функций

$$F_1(x, y) = 0, F_2(x, y) = 0 \quad (2.5)$$

представлены на Рис. 4.

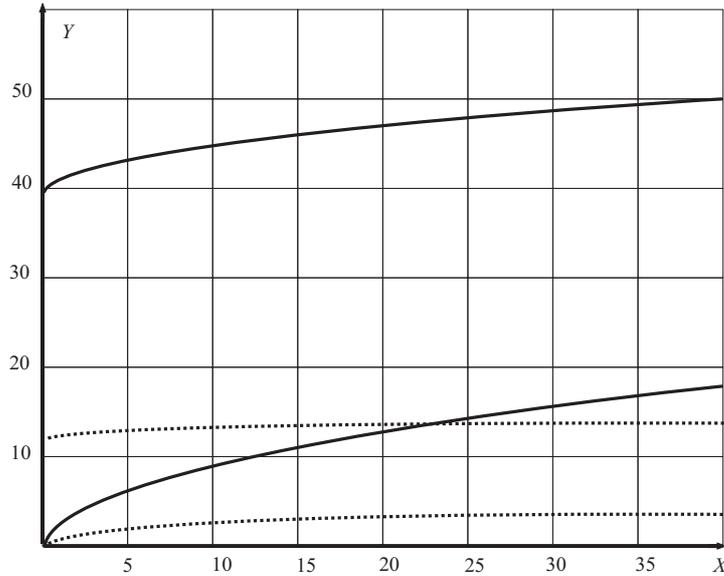


Рис. 4.

Система (2.5), а значит, и (2.4), имеет счетное множество решений (λ_{2n}, c_{2n}) , но интерес представляет такое решение, у которого вторая компонента минимальна. Соответствующее решение $(\lambda_{21}, c_{21}) = (146.3204, 54.8248)$. Далее положим $\lambda_2 = \lambda_{21}$, $c_2 = c_{21}$. Собственным числам $\lambda_2, 4\lambda_2$ соответствуют собственные функции

$$e_1(x) = \sum_{i=1}^4 A_{1i} \exp(\mu_{1i} x), e_2(x) = \sum_{i=1}^4 A_{2i} \exp(\mu_{2i} x).$$

Здесь μ_{jk} – корни уравнения (1.4) при $\lambda = \lambda_2$ и $\lambda = 4\lambda_2$ соответственно. Структура корней (1.4) указана в п. 1, и они выражены через параметры α, β . Собственному числу λ_2 соответствует пара $(\alpha_1, \beta_1) = (1.1103, 3.6848)$, а $4\lambda_2$ – пара $(\alpha_2, \beta_2) = (0.5663, 4.9519)$. Решения системы (1.7) при выборе соответствующей пары (α_k, β_k) имеют вид

$$A_{11} = -18.617 + i 4.718, A_{12} = \overline{A_{11}}, A_{13} = 36.234, A_{14} = 1, \\ A_{21} = -0.48 - i 0.622, A_{22} = \overline{A_{21}}, A_{23} = -0.039, A_{24} = 1.$$

В заключение ещё раз отметим, что при определении величины c_2 основным моментом является то, что находится минимальная величина, при которой для собственных частот впервые реализуется резонанс 1:2. В этом разделе все вычисления были проведены с точностью до четырех десятичных знаков.

3. Резонанс собственных частот 1:3

В этом разделе найдем такое $c = c_3 < c_1$, при котором у собственных частот есть резонанс 1:3. Построения, аналогичные п. 2, приводят к исследованию системы, аналогичной системе (2.4):

$$P_0(\lambda, c) = 0, P_0(9\lambda, c) = 0. \quad (3.1)$$

Полагая, как и в п. 2, $x = \frac{c^2}{128}$, $y = \frac{\lambda}{12}$, получим систему уравнений, аналогичную системе (2.5):

$$F_1(x, y) = 0, F_1(x, 9y) = 0. \quad (3.2)$$

Система (3.1) имеет счетное семейство решений (λ_{3n}, c_{3n}) . На Рис. 5 приведен график неявных функций $F_1(x, y) = 0, F_1(x, 9y) = 0$ соответственно. Численный

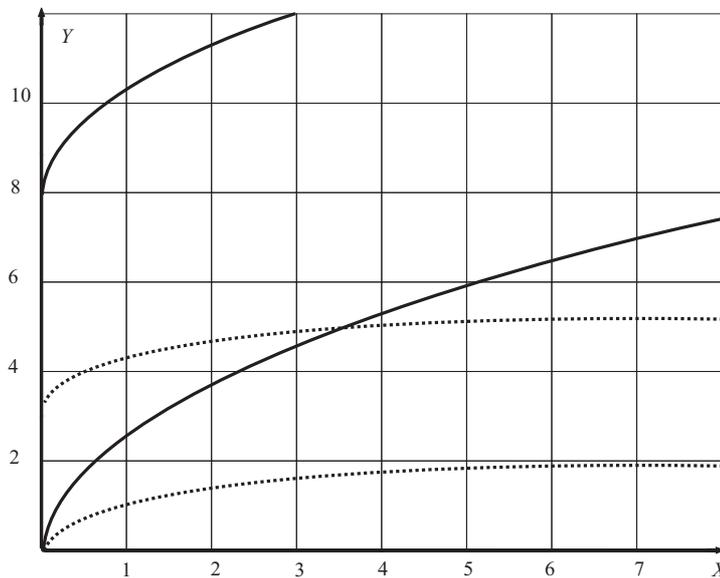


Рис. 5.

анализ показал, что $c_{31} < c_{32} < c_{33} < \dots < c_{3n}$. Поэтому $c_3 = c_{31} = 21.1156$, $\lambda_{31} = 58.5040$. Собственному значению λ_{31} соответствует пара $(\alpha_1, \beta_1) = (0.6850, 2.8593)$. Систему (1.7) следует рассматривать при $\mu_{11,12} = 0.685 \pm i 2.8593$, $\mu_{13} = 2.0059$, $\mu_{14} = -3.375$, а соответствующее решение

$$A_{11} = -1.132 - i 0.418, A_{12} = \overline{A_{11}}, A_{13} = -0.679, A_{14} = 1.$$

Собственному значению $9\lambda_{31}$ соответствует пара $(\alpha_2, \beta_2) = (0.2300, 4.7958)$, и систему (1.7) следует рассматривать при $\mu_{21,22} = 0.23 \pm i 4.796$, $\mu_{23} = 4.55$, $\mu_{24} = -5.014$. Стандартным образом находим, что

$$A_{21} = -0.49 - i 0.55, A_{22} = \overline{A_{21}}, A_{23} = -0.016, A_{24} = 1.$$

Напомним, что собственные функции, отвечающие собственным значениям,

$$e_1(x) = \sum_{j=1}^4 A_{1j} \exp(\mu_{1j} x), e_2(x) = \sum_{j=1}^4 A_{2j} \exp(\mu_{2j} x)$$

В заключение отметим, что аналогичные вопросы, но в случае шарнирного опирания, были рассмотрены в работах [3–4].

Список литературы

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
3. Куликов А.Н. Бифуркация автоколебаний пластины при малом демпфировании в сверхзвуковом потоке газа // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 73, вып. 2. С. 271–281.
4. Куликов А.Н., Толбей А.О. Определение нижней критической скорости флаттера // Современные проблемы математики и информатики. 2005, вып. 7. С. 157–163.
5. Holmes P.J., Marsden J.E. Bifurcation to divergence and flutter in flow-induced oscillations: An infinite dimensional analysis // Automatica. 1978. V. 14, №4. P. 367–384.
6. Holmes P.J. Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: A finite dimensional analysis // Journal of Sound and Vibration. 1977. V. 53, №4. P. 471–503.

Resonances in the problem of the panel flutter in a supersonic gas flow

Kulikov A. N., Pilipenko G. V.

Keywords: internal resonance, boundary value problem, differential operator, lower flutter speed

The paper deals with a linear formulation of the problem of plane vibrations in a supersonic gas flow. Fluctuations of the plane are studied in the case when one of its ends is rigidly fixed, while the second is free. The flow rate is found for which internal resonance eigenfrequencies 1:1, 1:2, 1:3 are implemented. The determination of the speed and the corresponding frequency is reduced to the system of two transcendental equations. The system is numerically studied.

Сведения об авторах: Куликов Анатолий Николаевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры диф. уравнений;

Пилипенко Григорий Васильевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, аспирант