

УДК 517.9

Динамика слабого взаимодействия в системе близких видов

Горчакова Е. В.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: gorchakovaev@yandex.ru

получена 12 сентября 2010

Ключевые слова: математическая модель конкуренции видов, система слабо связанных уравнений Хатчинсона, метод нормальных форм

Исследуется динамика системы, описывающей взаимодействие двух близких слабо связанных видов. Строится нормальная форма, которая сводится к нормальной форме системы диффузионно слабо связанных уравнений Хатчинсона.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему, предложенную в работе [1] на основе синтеза идей Лотки, Вольтерра и Хатчинсона

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= r \left[1 + \varepsilon a \left(1 - \frac{N_2}{k_2} \right) - \frac{N_1(t-h)}{k_1} \right] N_1, \\ \dot{N}_2 &= r \left[1 + \varepsilon a \left(1 - \frac{N_1}{k_1} \right) - \frac{N_2(t-h)}{k_2} \right] N_2.\end{aligned}\tag{1}$$

Система (1) представляет собой математическую модель взаимодействия двух близких слабо связанных видов. Здесь $N_1(t), N_2(t)$ — численности популяций двух видов, $r > 0$ — мальтузианский коэффициент линейного роста, характеризующий способность популяций осваивать ресурсы, $k_1, k_2 > 0$ — емкости ареалов пропитания, $h > 0$ — возраст половозрелости особей, $0 < \varepsilon \ll 1$, a — параметр, отвечающий за интенсивность взаимодействия между видами. В зависимости от знака a выделяются два случая. Если $a > 0$, то виды конкурируют между собой, a называется коэффициентом давления одного вида на другой. Если $a < 0$, то виды сосуществуют в симбиозе.

В исследуемом случае виды близки и одинаково влияют (подавляют рост численности или способствуют росту) друг на друга. Система (1) моделирует следующую ситуацию: виды обитают в однородной среде, а миграция настолько велика, что происходит полное перемешивание.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт № 02.740.11.0197).

2. Линейный анализ. Стандартные упрощающие замены в (1) $x_j = (N_j - 1)/k_j$, $t \rightarrow th$, приводят к системе

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -r [\varepsilon a_1 x_2 + x_1(t-1)] (1 + x_1), \\ \dot{x}_2 &= -r [\varepsilon a_2 x_1 + x_2(t-1)] (1 + x_2).\end{aligned}\tag{2}$$

В качестве ее фазового пространства возьмем пространство $C[-1, 0] \times R^2$ непрерывных при $-1 \leq t \leq 0$ вектор-функций со значениями в R^2 (см. [2]).

У системы уравнений (2) имеется четыре состояния равновесия:

- $(-1, -1)$, которое, очевидно, является неустойчивым в линейном приближении.
- $(-1, \varepsilon a)$ и $(\varepsilon a, -1)$, для которых характеристическое уравнение выписывается в виде

$$(\lambda + r(1 + \varepsilon a)e^{-\lambda})(\lambda - r(1 - \varepsilon^2 a^2)) = 0$$

и имеет действительный положительный корень $\lambda = r(1 - \varepsilon^2 a^2)$. Это означает, что при достаточно малом ε оба состояния равновесия неустойчивы.

- $(0, 0)$. Характеристический квазимногочлен линеаризованной в нуле системы выписывается в следующем виде:

$$P(\lambda) = (\lambda + re^{-\lambda})^2 - r^2 \varepsilon^2 a^2.\tag{3}$$

При $\varepsilon = 0$ корни ведут себя аналогично корням уравнения Хатчинсона: впервые выходят на мнимую ось пары корней $\lambda(\varepsilon) = \pm i\pi/2$ кратности 2 при критическом значении параметра $r = \pi/2$. Этот факт подробно обоснован в [2]. Порядок величины надкритичности выбирается равным порядку параметра ε , который регулирует связь видов.

3. Построение нормальной формы. Для изучения окрестности нулевого состояния равновесия системы (2) применим метод нормальных форм. Метод построения нормальной формы для уравнений с запаздыванием приводится в работе [3]. Решения ищем в виде асимптотического ряда по степеням $\sqrt{\varepsilon}$

$$x_j(t) = \sqrt{\varepsilon}(z_j(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}t} + \bar{z}_j(\tau)e^{-i\frac{\pi}{2}t}) + \varepsilon u_{j1}(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_{j2}(t, \tau) + \dots,$$

где $z_j(\tau)$ — комплекснозначные функции медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($j = 1, 2$). Вычисления проводятся для первого уравнения системы (2), для второго все аналогично с точностью до замены индексов 1 на 2, а 2 на 1.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε и учитывая разложение

$$z_1(\tau - \varepsilon) = z_1(\tau) - \varepsilon z_1'(\tau) + \dots,$$

при $\sqrt{\varepsilon}$ получим тождество; при ε — уравнение на u_{11}

$$\dot{u}_{11} = -\frac{\pi}{2} u_{11}(t-1) + \frac{\pi}{2} (z_1^2 e^{i\pi t} - \bar{z}_1^2 e^{-i\pi t}),$$

решение которого имеет вид

$$u_{11} = \frac{2-i}{5} z_1^2 e^{i\pi t} + \frac{2+i}{5} \bar{z}_1^2 e^{-i\pi t},$$

функция u_{21} находится в том же виде. При $\varepsilon^{3/2}$ получаем уравнение на u_{12}

$$\begin{aligned} \dot{u}_{12} + z_1'(\tau) e^{i\frac{\pi}{2}t} + \bar{z}_1'(\tau) e^{-i\frac{\pi}{2}t} = & -\frac{\pi}{2} a(z_2(\tau) e^{i\frac{\pi}{2}t} + \bar{z}_2(\tau) e^{-i\frac{\pi}{2}t}) - \frac{\pi}{2} u_{12}(t-1) - \\ & -\frac{\pi}{2} [u_{11}(t)(z_1(\tau) e^{i\frac{\pi}{2}(t-1)} + \bar{z}_1(\tau) e^{-i\frac{\pi}{2}(t-1)}) + u_{11}(t-1)(z_1(\tau) e^{i\frac{\pi}{2}t} + \bar{z}_1(\tau) e^{-i\frac{\pi}{2}t}) - \\ & - (z_1'(\tau) e^{i\frac{\pi}{2}(t-1)} + \bar{z}_1'(\tau) e^{-i\frac{\pi}{2}(t-1)})] - (z_1(\tau) e^{i\frac{\pi}{2}(t-1)} + \bar{z}_1(\tau) e^{-i\frac{\pi}{2}(t-1)}). \end{aligned}$$

Аналогичное уравнение можно записать для u_{22} . Условия разрешимости этих уравнений в классе периодических функций дают нормальную форму системы (2)

$$\begin{aligned} \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right) z_1' &= -\frac{\pi}{2} a z_2 + i z_1 + \frac{(1-3i)\pi}{10} |z_1|^2 z_1, \\ \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right) z_2' &= -\frac{\pi}{2} a z_1 + i z_2 + \frac{(1-3i)\pi}{10} |z_2|^2 z_2. \end{aligned} \quad (4)$$

4. Исследование нормальной формы. Систему (4) можно свести к системе, которая исследована в работах [4], [5]. Перейдем к полярным переменным в (4) $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$, получим уравнения на ρ_1 , ρ_2 , φ_1 , φ_2

$$\begin{aligned} \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right) (\rho_1' + i\varphi_1' \rho_1) &= i\rho_1 + \frac{(1-3i)\pi}{10} \rho_1^3 - \frac{\pi}{2} a \rho_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}, \\ \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right) (\rho_2' + i\varphi_2' \rho_2) &= i\rho_2 + \frac{(1-3i)\pi}{10} \rho_2^3 - \frac{\pi}{2} a \rho_1 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Обозначим $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ и, приравнявая действительные и мнимые части уравнений, получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) \rho_1' &= \frac{\pi}{2} \rho_1 - (3\pi - 2) \frac{\pi}{20} \rho_1^3 - \frac{\pi}{2} a \rho_2 (\cos \alpha + \frac{\pi}{2} \sin \alpha), \\ \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) \rho_2' &= \frac{\pi}{2} \rho_2 - (3\pi - 2) \frac{\pi}{20} \rho_2^3 - \frac{\pi}{2} a \rho_1 (\cos \alpha - \frac{\pi}{2} \sin \alpha), \\ \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) \varphi_1' &= \frac{\pi}{2} a \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \alpha\right) + 1 - (\pi + 6) \frac{\pi}{20} \rho_1^2, \\ \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) \varphi_2' &= \frac{\pi}{2} a \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \alpha\right) + 1 - (\pi + 6) \frac{\pi}{20} \rho_2^2. \end{aligned}$$

Вычтем из последнего уравнения предпоследнее, поделим все уравнения на $(1 + \pi^2/4)$ и учтем что

$$\cos \alpha \pm \frac{\pi}{2} \sin \alpha = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} \cos(\alpha \pm \delta), \quad \sin \alpha \mp \frac{\pi}{2} \cos \alpha = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} \sin(\alpha \pm \delta),$$

где $\delta = -\arctg(\pi/2)$, $-\pi < \delta < 0$, тогда получим систему

$$\begin{aligned}\rho'_1 &= \varphi_0 \rho_1 + d_0 \rho_1^3 - a \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \rho_2 \cos(\alpha + \delta) + a \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \rho_1 \cos \delta, \\ \rho'_2 &= \varphi_0 \rho_2 + d_0 \rho_2^3 - a \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \rho_1 \cos(\alpha - \delta) + a \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \rho_2 \cos \delta, \\ \alpha' &= c_0 (\rho_1^2 - \rho_2^2) + a \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \frac{\rho_2}{\rho_1} \sin(\alpha + \delta) + a \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \frac{\rho_1}{\rho_2} \sin(\alpha - \delta),\end{aligned}$$

где коэффициенты обозначены

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{\pi^2 + 4}, \quad d_0 = -\frac{\pi(3\pi - 2)}{5(\pi^2 + 4)}, \quad c_0 = -\frac{\pi(\pi + 6)}{5(\pi^2 + 4)}.$$

Выполним замены

$$\rho_1 = \sqrt{-\frac{\varphi_0}{d_0}(1-a)} \xi_1, \quad \rho_2 = \sqrt{-\frac{\varphi_0}{d_0}(1-a)} \xi_2,$$

где $a < 1$, затем замену времени $\tau = \varphi_0(1-a)s$, тогда система примет вид

$$\begin{aligned}\xi'_1 &= (1 - d \cos \delta - \xi_1^2) \xi_1 + d \xi_2 \cos(\alpha + \delta), \\ \xi'_2 &= (1 - d \cos \delta - \xi_2^2) \xi_2 + d \xi_1 \cos(\alpha - \delta), \\ \alpha' &= b_0 (\xi_1^2 - \xi_2^2) - d \frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\alpha + \delta) - d \frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(\alpha - \delta),\end{aligned} \tag{5}$$

здесь

$$b_0 = \frac{c_0}{d_0} = \frac{(\pi + 6)}{(3\pi - 2)}; \quad d = -\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} \frac{a}{(1-a)}.$$

Теперь система получена в максимально простом виде. В ней функции $\xi_1(s)$, $\xi_2(s)$ представляют собой медленно меняющиеся амплитуды циклов, а $\alpha(s)$ — их разность фаз.

Здесь нужно выделить два случая в зависимости от знака параметра a . При отрицательных значениях a , соответствующих случаю симбиоза двух видов в исходной системе, параметр $d > 0$ и система (5) полностью соответствует системе, полученной в работе [5] в качестве нормальной формы системы диффузионно слабо связанных уравнений Хатчинсона. Там же проведен анализ ее качественного поведения, получены бифуркационные значения параметра d и выделены области разными сценариями фазовых перестроек при изменении бифуркационного параметра d .

Отметим, что фазовое пространство системы (5) является цилиндрическим в силу 2π -периодичности правых частей по α . Имеется симметрия фазового пространства (5), состоящая в том, что замена

$$\xi_1 \rightarrow \xi_2, \quad \xi_2 \rightarrow \xi_1, \quad \alpha \rightarrow -\alpha$$

переводит исследуемую систему в себя. Кроме того, исследуемая система инвариантна относительно следующего преобразования:

$$\xi_1 \rightarrow \xi_2, \quad \xi_2 \rightarrow \xi_1, \quad \delta \rightarrow -\delta, \quad b_0 \rightarrow -b_0.$$

Система (5) имеет два состояния равновесия $\xi_1 = \xi_2 = 1$, $\alpha = 0$ и $\xi_1 = \xi_2 = \xi^* = \sqrt{1 - 2d \cos \delta}$, $\alpha = \pi$. Рассмотрим подробно сценарии фазовых перестроек, происходящие при уменьшении параметра d , которые были численно найдены и описаны в работе [5], из которой приводится следующий результат.

Пусть в системе (5) $b_0 = \frac{(\pi+6)}{(3\pi-2)}$, $\delta = -\arctg(\frac{\pi}{2})$, тогда в ней при уменьшении параметра d происходят следующие фазовые перестройки:

1. При значениях параметра $d > d_{-3} \approx 0,931$ и соответственно $a = a_{-3} \approx -0,999$ глобально устойчивым является единственное состояние равновесия $\xi_1 = \xi_2 = 1$, $\alpha = 0$, соответствующее синхронному периодическому режиму исходной системы.
2. При $d < d_{-3}$ к известному глобально устойчивому состоянию равновесия $(1, 1, 0)^T$ добавляется неустойчивое $\xi_1 = \xi_2 = \xi^* = \sqrt{1 - 2d \cos \delta}$, $\alpha = \pi$ (соответствует колебаниям в противофазе у исходной системы).
3. При уменьшении параметра d до значения $d = d_{-2} \approx 0,544$, т.е. $a = a_{-2} \approx -0,413$ из "воздуха" рождаются еще четыре состояния равновесия: два из них устойчивы $A = (\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha_1^*)^T$ и $B = (\xi_2^*, \xi_1^*, -\alpha_1^*)^T$, где $\xi_1^* > \xi_2^*$, $0 < \alpha_1^* < \pi/2$, и два неустойчивы $C = (\eta_1^*, \eta_2^*, \alpha_2^*)^T$ и $D = (\xi_2^*, \xi_1^*, -\alpha_2^*)^T$, где $\eta_1^* > \eta_2^*$, $0 < \alpha_2^* < \pi/2$, кроме того, $\eta_1^* > \xi_1^*$, $\xi_2^* > \eta_2^*$ (соответствуют несинхронизированным периодическим режимам у исходной системы). Асимптотические формулы для определения величин ξ_1^* , ξ_2^* , α_1^* , η_1^* , η_2^* , α_2^* приведены в работе [5]. Состояния равновесия A и B устойчивы при уменьшении параметра d вплоть до значения $d_{-1} \approx 0,524$ и $a = a_{-1} \approx -0,392$.
4. При $d = d_{-1}$ состояния равновесия A и B теряют устойчивость с рождением устойчивых циклов C_A и C_B (бифуркация Андронова–Хопфа) (см. Рис. 1 а)). Заметим, что этим устойчивым периодическим решениям системы (5) соответствуют не синхронизованные квазипериодические колебания исходной системы.
5. При $d = d_{kp} \approx 0,5015$ (критическое для пространственно однородных режимов значение) и $a = a_{kp} \approx -0,3686$ неустойчивые неподвижные точки C и D сливаются с однородным состоянием равновесия и отбирают у него устойчивость.
6. При дальнейшем изменении параметра d устойчивые циклы C_A и C_B увеличиваются в размерах до тех пор, пока при $d = d_1 \approx 0,481$ ($a = a_1 \approx -0,348$) не сомкнутся в точке $\xi_1 = \xi_2 = 1$, $\alpha = 0$ (обратная бифуркация расщепления сепаратрис) (см. Рис. 1 б)). В результате происходит объединение пары циклов в один C_U , который, незначительно меняя размеры, остается устойчивым вплоть до значения $d = d_3 \approx 0,429$ ($a = a_3 \approx -0,299$) (см. Рис. 1 в)).
7. При $d = d_2 \approx 0,466$ ($a = a_2 \approx -0,334$) от неустойчивого состояния равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ в результате бифуркации Андронова–Хопфа ответвляется неустойчивый цикл C_Π , который при $d = d_3$ сливается с устойчивым циклом C_U и исчезает.

8. При $d_3 > d > 0$ ($a > 0$) система имеет единственное глобально устойчивое состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$, соответствующее колебаниям в противофазе.

Бифуркационные значения параметра определялись численно с помощью специального пакета программ Tracer 3.7 [6].

При положительных значениях a , соответствующих случаю конкуренции двух видов в исходной системе, параметр $d < 0$. В системе (5) выполним замены:

$$\xi_1 \rightarrow \sqrt{1 - 2d \cos \delta} \xi_1, \quad \xi_2 \rightarrow \sqrt{1 - 2d \cos \delta} \xi_2, \quad \alpha \rightarrow \pi + \alpha,$$

которые переведут состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ в $(1, 1, 0)^T$, а $(1, 1, 0)^T$ в $(\frac{1}{\xi^*}, \frac{1}{\xi^*}, \pi)^T$ и замену времени $s = (1 - 2d \cos \delta)s^*$. В этом случае получим систему вида (5), с параметром d^* , выражающимся через d

$$d^* = -\frac{d}{1 - 2d \cos \delta} > 0. \quad (6)$$

Значит, динамика системы (5) при $d < 0$ аналогична динамике при $d > 0$ с учетом того, что состояния равновесия меняются ролями, а бифуркационные значения параметра d^* вычисляются по формуле (6).

5. Выводы. Необходимо отметить биологический смысл полученных результатов. Для случая симбиотического сосуществования видов: при достаточно сильной связи между взаимодействующими видами (d большое) их колебания становятся синхронными. В случае, если d достаточно мало, реализуются колебания в противофазе. В случае конкуренции наоборот: при достаточно слабой связи между видами их колебания численности синхронизируются, а если d достаточно велико, то колебания происходят в противофазе. В относительно узкой области изменения d были найдены достаточно сложные двухчастотные режимы изменения численности видов, в которых амплитуда и разность фаз колебаний популяций меняются периодически. Последний колебательный режим, по всей вероятности, наиболее осмыслен с биологической точки зрения, поскольку средняя численность совокупности популяций в этом случае выше, чем во всех остальных.

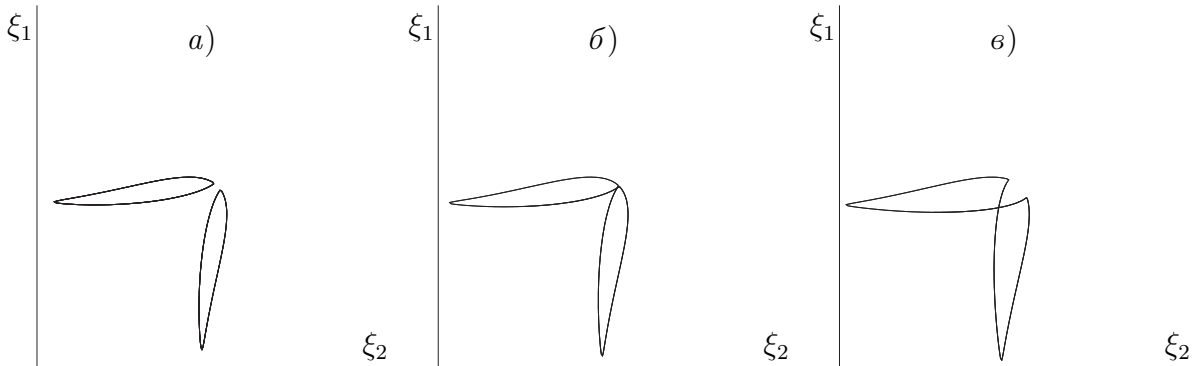


Рис. 1. Обратная бифуркация расщепления сепаратрис: два устойчивых цикла при $d = 0.485$, слияние двух циклов в один при $d \approx 0.481$, устойчивый цикл при $d = 0.470$

Список литературы

1. Колесов Ю. С. Проблема адекватности экологических уравнений. Ярославль, 1985. С. 162. (Деп. в ВИНТИ № 1901-85).
2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. С. 421.
3. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Локальные методы анализа динамических систем: Учебн. пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2006. С. 92.
4. Глызин С. Д. Бифуркационные процессы и хаотические колебания в цепочках связанных осцилляторов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Ярославль, 2009. С. 318.
5. Глызин С. Д. Динамические свойства простейших конечноразностных аппроксимаций краевой задачи "реакция-диффузия" // Дифференциальные уравнения. 1997. 33, 6. Р. 805–811.
6. Глызин Д. С. Пакет программ для анализа динамических систем Tracer. Заявка № 2008610548 от 14.02.2008. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008611464. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 24.03.2008

Dynamics of weak interaction in a system of similar species

Gorchakova E. V.

Keywords: mathematical model of the competition of species, system of weakly connected Hutchinson equations, method of normal forms

The dynamics of the system what describes the interaction between two similar species is investigated. The normal form is constructed, it is reduced to a normal form of a system of diffused weakly connected Hutchinson equations.

Сведения об авторе:

Горчакова Екатерина Витальевна,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
аспирант.