

УДК 517.929

## Локальная динамика уравнения с сильно запаздывающей обратной связью

Глазков Д.В.<sup>1</sup>

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: glazkov\_d@mail.ru

получена 10 ноября 2010

**Ключевые слова:** запаздывание, модель лазера, нормальная форма, асимптотическая формула, малый параметр

Изучается локальная динамика нелинейного комплексного дифференциального уравнения с большим запаздыванием в окрестности нулевого решения. При анализе задачи используется метод квазинормальных форм. Показано, что роль нормальных форм в критических случаях бесконечной размерности играют параболические уравнения Гинзбурга–Ландау.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается модельная задача управления поведением некоторой динамической системы в окрестности ее нулевого решения с помощью запаздывающей обратной связи. Объектом изучения является комплексное уравнение

$$\frac{dz}{ds} = (\nu + i\omega)z - Ke^{-i\varphi} [z - z(s-h)] + F(z), \quad (1)$$

где нелинейность  $F(z)$  имеет вид

$$F(z) = F_2(z) + F_3(z) + \dots = c_{20}z^2 + c_{11}|z|^2 + c_{02}\bar{z}^2 + c_{30}z^3 + c_{21}|z|^2z + c_{12}|z|^2\bar{z} + c_{03}\bar{z}^3 + \dots,$$

комплексные коэффициенты

$$c_{kl} = a_{kl} + ib_{kl},$$

величины  $K$  и  $\varphi$  трактуются как управляющие параметры. В отсутствие слагаемого с запаздыванием при  $K=0$  нулевое решение задачи (1) является фокусом, устойчивость которого определяется знаком величины  $\nu$ . Отметим, что параметры  $K \geq 0$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт № 02.740.11.0197).

и  $-\varphi$  можно рассматривать как модуль и аргумент комплексного коэффициента  $Ke^{-i\varphi}$ .

Уравнение (1) описывает локальную динамику некоторой системы в окрестности состояния равновесия. В [1] в качестве такой исходной задачи рассматривается модель сдвоенного лазера с распределенной оптической обратной связью от внешнего эталона Фабри–Перо. Параметр  $\varphi$  в этом случае определяет сдвиг по оптической фазе отраженного излучения. Линейная часть квазинормальной формы, полученной в [2] для модели Ланга–Кобаяши, также имеет вид (1) без учета нелинейных слагаемых.

Устойчивость нулевого решения задачи (1) определяется расположением на комплексной плоскости корней характеристического уравнения

$$\Lambda = \nu + i\omega - Ke^{-i\varphi} (1 - e^{-\Lambda h}). \quad (2)$$

Зависимость максимальной из вещественных частей комплексных корней уравнения (2) от величины  $h$  в случаях  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi$ , показана на рис. 1.

Отметим, что в случае асимптотически больших значений параметра  $h$  удобно выполнить следующие замены:

$$h = \frac{1}{\varepsilon}, \quad t = \varepsilon s, \quad \Lambda = \varepsilon \lambda.$$

В результате задача (1) примет вид

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = (\nu + i\omega)z - Ke^{-i\varphi} [z - z(t-1)] + F(z), \quad (3)$$

а уравнение (2) запишется в форме

$$\varepsilon \lambda = \nu + i\omega - Ke^{-i\varphi} (1 - e^{-\lambda}). \quad (4)$$

Комплексное уравнение (1) обобщает вещественную систему уравнений, изучавшуюся в работах [3, 4]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \nu x - \omega y - K[x - x(s-h)], \\ \frac{dy}{ds} = \omega x + \nu y - K[y - y(s-h)]. \end{cases} \quad (5)$$

Чтобы получить из (1) систему (5), нужно выполнить замену  $z=x+iy$  и перейти при  $\varphi=0$  или  $\varphi=\pi$  к уравнениям для вещественной и мнимой частей. Отсутствие нелинейных слагаемых в данном случае объясняется сужением задачи исследования локальной динамики системы в окрестности нуля к изучению устойчивости нулевого решения.

Существенное предположение, сделанное в работах [3, 4], заключается в том, что нулевое состояние равновесия динамической системы в отсутствие управляющего воздействия  $K=0$  является неустойчивым фокусом, то есть  $\omega \neq 0$ , а  $\nu > 0$ .

Установлено [3], что в случае

$$K \geq \nu/2 \geq 0 \quad (6)$$

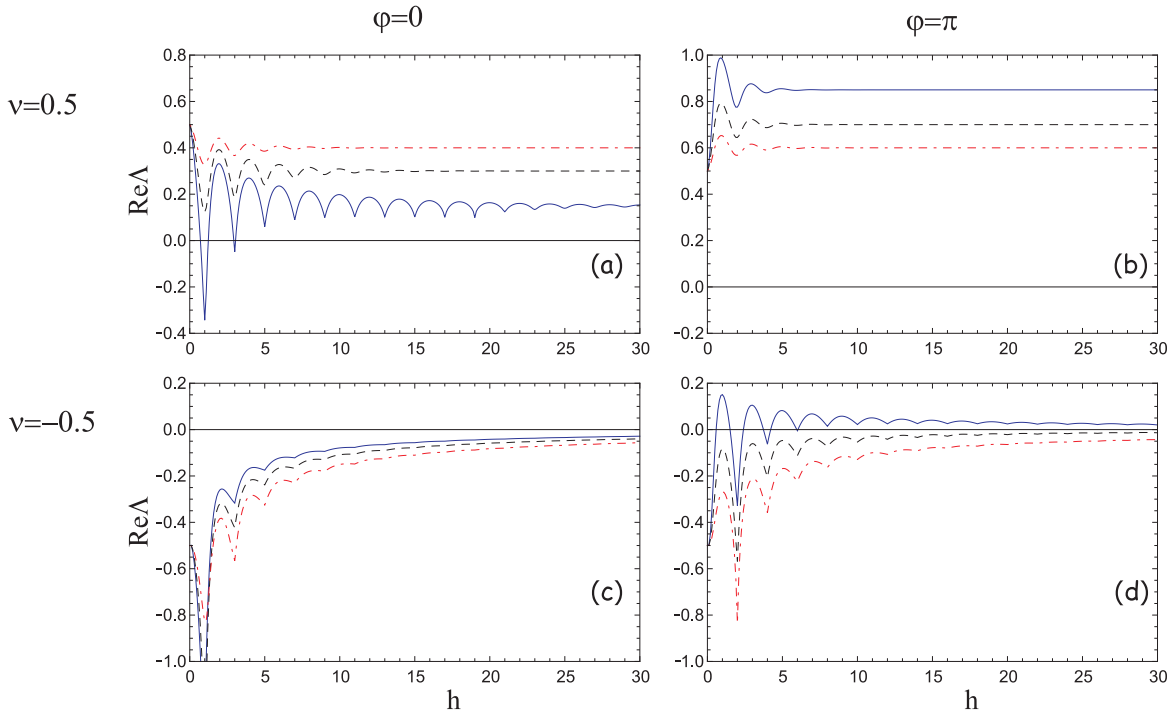


Рис. 1. График зависимости максимальной из вещественных частей комплексных корней уравнения (2) от величины запаздывания  $h$ . Значения параметров  $(\nu, \varphi)$  на рисунках следующие: (a) –  $(0.5, 0)$ ; (b) –  $(0.5, \pi)$ ; (c) –  $(-0.5, 0)$ ; (d) –  $(-0.5, \pi)$ . Штрих-пунктирная линия соответствует  $K=0.1$ , пунктирная –  $K=0.2$ , сплошная –  $K=0.35$

при подходящем выборе величины запаздывания, близкой к оптимальным значениям

$$h = (2m+1)\pi/\omega, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

нулевое решение становится устойчивым в первом приближении. Наибольшая область устойчивости в плоскости параметров  $K, h$  соответствует значению  $m=0$  (см. рис. 1-а).

Однако при увеличении величины  $h$  эффект от обратной связи становится все менее значительным. В случае асимптотически большого запаздывания  $h=1/\varepsilon$  [4] нулевое состояние равновесия удастся стабилизировать лишь при выполнении условия  $\nu=\varepsilon^2\nu_0=O(\varepsilon^2)$ . Необходимое условие устойчивости нулевого решения в этом случае задается неравенством [4]

$$K < \frac{\pi^2}{2\nu_0} = \frac{\pi^2}{2\nu h^2}. \quad (7)$$

В настоящей работе ставится задача исследования локальной динамики системы (1) в окрестности нулевого решения на основе метода нормальных форм. Рассматривается ситуация асимптотически большого запаздывания  $h=O(1/\varepsilon)$ . При изучении окрестности нулевого состояния равновесия особый интерес будет представлять случай  $\nu < 0$ .

## 2. Линейный анализ

В силу известных теорем об устойчивости по первому приближению решений систем с запаздыванием, приводимых, например, в [5], справедливы следующие утверждения.

**Утверждение 1.** Если все корни характеристического уравнения (2) имеют отрицательную вещественную часть, то соответствующее решение задачи (1) устойчиво.

**Утверждение 2.** Если существует корень характеристического уравнения (2) с положительной вещественной частью, то соответствующее решение задачи (1) неустойчиво.

Устойчивость нулевого решения задачи (1), таким образом, определяется расположением корней характеристического уравнения (2) на комплексной плоскости.

**Теорема 1.** Пусть  $\nu > 0$ ,  $\varphi \neq \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , тогда при

$$0 \leq K < \frac{\nu}{1 + \cos \varphi} \quad (8)$$

нулевое решение задачи (1) неустойчиво. Пусть  $\nu < 0$ ,  $\varphi \neq 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , тогда при

$$0 \leq K < K_0 = \frac{-\nu}{1 - \cos \varphi} \quad (9)$$

нулевое решение задачи (1) устойчиво.

*Доказательство.*

Рассмотрим уравнение (2). Границы области устойчивости нулевого решения уравнения (1) находятся из условия  $\Lambda = i\Omega$ . В этом случае вещественная и мнимая части (2) преобразуются к виду

$$\begin{cases} K[\cos \varphi - \cos(\varphi + \Omega h)] = \nu, \\ \Omega - K[\sin \varphi - \sin(\varphi + \Omega h)] = \omega. \end{cases} \quad (10)$$

Из первого уравнения (10) получаем, что

$$K = \frac{-\nu}{\cos(\varphi + \Omega h) - \cos \varphi}. \quad (11)$$

Заметим, что при  $\varphi = 0$  знаменатель в правой части (11) неположителен, поэтому при  $\nu < 0$  значений  $K \geq 0$ , удовлетворяющих (11), не существует.

Перепишем систему (10) в форме

$$\begin{cases} K \cos \varphi - \nu = K \cos(\varphi + \Omega h), \\ K \sin \varphi - \Delta = K \sin(\varphi + \Omega h), \end{cases} \quad (12)$$

где  $\Delta = \Omega - \omega$ . Перейдем далее от системы (12) к уравнению

$$(K \cos \varphi - \nu)^2 + (K \sin \varphi - \Delta)^2 = K^2,$$

которое является квадратным по  $\Delta$  и допускает запись в виде

$$\Delta^2 - 2K \sin \varphi \Delta + \nu^2 - 2\nu K \cos \varphi = 0. \tag{13}$$

Отметим, что при  $\varphi = 0$  уравнение (13) сводится к элементарной задаче

$$\Delta^2 = 2\nu K - \nu^2,$$

которая при условии  $\nu < 0$  вещественных решений не имеет. Таким образом, подтверждается вывод, сделанный из соотношения (11), о том, что при  $\varphi = 0$  и  $\nu < 0$  (равно как и при  $\varphi = \pi$  и  $\nu > 0$ ) характеристическое уравнение (2) не может иметь корней на мнимой оси.

В общем случае уравнение (13) имеет вещественные решения  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , если его дискриминант неотрицателен, то есть справедливо неравенство

$$(K \sin \varphi)^2 + (2\nu K \cos \varphi - \nu^2) \geq 0.$$

Полученное квадратное неравенство решается проще, если его рассматривать как неравенство относительно параметра  $\nu$ , а не  $K$ . Тогда его решением являются соотношения

$$\nu \geq \nu_1 = K(\cos \varphi + 1) \geq 0 \quad \text{или} \quad \nu \leq \nu_2 = K(\cos \varphi - 1) \leq 0.$$

Используя этот результат, а также условие  $K \geq 0$ , в зависимости от знака  $\nu$  получаем различные границы области устойчивости нулевого решения задачи (1).

В случае  $\nu > 0$  получаем, что при

$$K \geq \frac{\nu}{1 + \cos \varphi} > 0, \tag{14}$$

уравнение (13) может иметь вещественные решения и, следовательно, у (2) могут быть чисто мнимые корни, а в противном случае – нет. В силу непрерывной зависимости решений  $\Lambda = \Lambda(K)$  уравнения (2) от параметра  $K$  и  $\Lambda(0) = \nu$  это означает, что при  $\nu > 0$  и выполнении неравенства (8), противоположного к (14), нулевое решение задачи (1) неустойчиво. Таким образом, соотношение (14), обобщающее условие (6) на случай  $\varphi \neq 0$  (с точностью до  $2\pi$ ), является необходимым условием устойчивости нулевого решения задачи (1) при  $\nu > 0$ .

В интересующей нас ситуации  $\nu < 0$  получаем, что при

$$K \geq K_0 = \frac{-\nu}{1 - \cos \varphi} > 0 \tag{15}$$

уравнение (13) может иметь вещественные решения и, следовательно, у (2) могут быть чисто мнимые корни, а в противном случае – нет. В силу непрерывной зависимости решений  $\Lambda = \Lambda(K)$  уравнения (2) от параметра  $K$  и  $\Lambda(0) = \nu$  это означает, что

при  $\nu < 0$  и выполнении неравенства (9), противоположного к (15), нулевое решение задачи (1) устойчиво. Таким образом, соотношение (15) является необходимым условием неустойчивости нулевого решения задачи (1) при  $\nu < 0$ . Отметим, что (15) уточняет оценку (11). ■

Иными словами, (11) переходит в (15) при  $K = K_0$  или  $\cos(\varphi + \Omega h) = 1$ . При этом, очевидно,  $\sin(\varphi + \Omega h) = 0$  и из второго уравнения системы (10) получаем

$$\Omega_0 = \omega + K_0 \sin \varphi. \quad (16)$$

Далее, пользуясь полученными результатами, построим при  $h = 1/\varepsilon$  асимптотику тех корней  $\Lambda(\varepsilon)$  характеристического уравнения (2), у которых вещественная часть стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Параметр  $K$  в этом случае имеет надкритичность порядка  $\varepsilon^2$ , то есть  $K = K_0 + \varepsilon^2 K_1$ .

С учетом изложенного асимптотика указанных корней уравнения (2) (а также (4)) имеет вид

$$\Lambda_n(\varepsilon) = \varepsilon \lambda_n(\varepsilon) = i\Omega_0 + \varepsilon \lambda_{n0} + \varepsilon^2 \lambda_{n1} + \varepsilon^3 \lambda_{n2} + \dots, \quad (17)$$

где

$$\lambda_{n0} = i(\Omega_1 + 2\pi n),$$

а величина  $0 \leq \Omega_1 < 2\pi$  определяется из соотношения

$$\frac{\Omega_0}{\varepsilon} + \varphi + \Omega_1 = 0 \pmod{2\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Подставляя (17) в (2) и используя разложение в ряд по малому параметру экспоненциального слагаемого

$$e^{-\lambda_n(\varepsilon)} = e^{i\varphi} \left[ 1 - \varepsilon \lambda_{n1} - \varepsilon^2 \lambda_{n2} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \lambda_{n1}^2 + O(\varepsilon^3) \right],$$

получим, что

$$\lambda_{n0} = i(\Omega_1 + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \lambda_{n1} = -\frac{\lambda_{n0}}{K_0} = -i \frac{\Omega_1 + 2\pi n}{K_0},$$

$$\lambda_{n2} = \frac{K_1}{K_0} (1 - e^{-i\varphi}) - \frac{\lambda_{n1}}{K_0} + \frac{1}{2} \lambda_{n1}^2 = \frac{1}{K_0^2} [K_0 K_1 (1 - e^{-i\varphi}) + \lambda_{n0} + \lambda_{n0}^2 / 2].$$

Представляя величину  $\lambda_{n2}$  как полином от  $\lambda_{n0}$

$$\lambda_{n2} = -d_2 (2\pi n)^2 + i d_1 2\pi n + d_0,$$

определим коэффициенты при различных степенях  $i2\pi n$ :

$$d_2 = \frac{1}{2K_0^2}, \quad d_1 = \frac{1 + i\Omega_1}{K_0^2}, \quad d_0 = \frac{K_0 K_1 (1 - e^{-i\varphi}) + i\Omega_1 - \Omega_1^2 / 2}{K_0^2}.$$

Отметим, что в силу  $d_2 > 0$

$$\max_{n \in \mathbb{Z}} (\operatorname{Re} \lambda_{n2}) = \frac{2K_1 K_0 (1 - \cos \varphi) - \min[\Omega_1^2, (2\pi - \Omega_1)^2]}{2K_0^2}.$$

Здесь первый аргумент функции  $\min$  получается при  $n=0$ , а второй — при  $n=1$  или  $n=-1$ . Очевидно, при  $K=K_0$  характеристическое уравнение (2) имеет корни на мнимой оси лишь при условии  $\Omega_1=0$ , когда соотношение (11) переходит в (15). В общем случае для этого требуется, чтобы

$$K_1 = \frac{(\min[\Omega_1, 2\pi - \Omega_1])^2}{2K_0(1 - \cos \varphi)}.$$

Отметим, что в случае  $\varphi=0$  задача об устойчивости нулевого состояния равновесия системы (5) при асимптотически большом запаздывании, поставленная в [4], сводится к оценке знака величины

$$\max_{n \in \mathbb{Z}} (\operatorname{Re} \lambda_{n2}) = \frac{2K\nu_0 - \min[\Omega_1^2, (2\pi - \Omega_1)^2]}{2K^2}.$$

Таким образом, необходимое условие устойчивости нулевого решения (1) при  $\varphi=0$  и  $\nu>0$  сводится к отмеченному в [4] неравенству вида

$$\sqrt{2K\nu_0} < \min[\Omega_1, 2\pi - \Omega_1]. \tag{18}$$

Отметим, что (7) является частным случаем (18) и имеет место при  $\Omega_1=\pi$ , когда правая часть (18) максимальна. Получить более содержательные результаты о локальной динамике системы (1) в окрестности нуля без учета нелинейных слагаемых, по-видимому, нельзя. Для дальнейшего анализа воспользуемся аппаратом метода квазинормальных форм [6, 7, 8, 9].

### 3. Построение квазинормальной формы

Наряду с (1) рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{\partial v(s, t)}{\partial s} = \Pi v(s, t), \tag{19}$$

где оператор  $\Pi$  определяется следующим образом:

$$\Pi v(s, t) = (\nu + i\omega)v(s, t) - K_0 e^{-i\varphi} [v(s, t) - v(s - \varepsilon^{-1}, t - 1)].$$

Отметим, что для таких решений (19), которые удовлетворяют условию

$$v(s - \varepsilon^{-1}, t - 1) = e^{i\varphi} v(s, t),$$

действие оператора  $\Pi$  ничем не отличается от умножения на комплексное число  $(\nu + i\omega) + K_0(1 - e^{-i\varphi})$ .

Собственные функции линейного оператора  $\Pi$  имеют вид

$$v_n(s, t) = e^{i\Omega_0 s} e^{i(\Omega_1 + 2\pi n)t}.$$

Решение задачи (1) представим в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра

$$z(t, \varepsilon) = \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon^3 z_3 + \dots, \tag{20}$$

где

$$z_j = z_j(s, r, \tau), \quad s = t/\varepsilon, \quad r = \sigma(\varepsilon)t = (1 + \varepsilon\sigma_1)t, \quad \tau = \varepsilon^2 t,$$

первое слагаемое имеет вид

$$z_1 = z_1(s, r, \tau) = e^{i\Omega_0 s} e^{i\Omega_1 r} u(\tau, r), \quad (21)$$

функция  $u$  представима в виде

$$u(\tau, r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\tau) e^{i2\pi n r} \quad \text{так, что} \quad u(\tau, r+1) = u(\tau, r).$$

Выполняя подстановку (20) в (1) и собирая слагаемые одного порядка малости, будем последовательно получать задачи следующего вида:

$$\frac{\partial z_j}{\partial s} = \Pi z_j + f_j, \quad (22)$$

где  $f_j$  – неоднородность дифференциального уравнения. Задача (22) разрешима в классе периодических функций, если выполняется соотношение  $f_j=0$ .

Поскольку  $f_1 \equiv 0$ , то на первом шаге при  $\varepsilon^1$  все условия удовлетворяются автоматически, и с учетом (21) мы получаем тождественное равенство.

Собрав слагаемые порядка  $\varepsilon^2$ , потребуем выполнения соотношения  $f_2=0$ . Это означает, что имеет место соотношение

$$i\Omega_1 z_1 + e^{i\Omega_0 s} e^{i\Omega_1 r} \frac{\partial u}{\partial r} = -K_0 e^{-i\varphi} \left[ i\Omega_1 \sigma_1 e^{i\varphi} z_1 + \sigma_1 e^{i\Omega_0 s} e^{i\Omega_1 r} e^{i\varphi} \frac{\partial u}{\partial r} \right] + [c_{20} z_1^2 + c_{11} |z_1|^2 + c_{02} \bar{z}_1^2]. \quad (23)$$

Отсюда находим, что

$$\sigma_1 = -\frac{1}{K_0}.$$

В этом случае частное решение неоднородной задачи для  $z_2$  не содержит резонансных слагаемых, которые, вообще говоря, могли бы иметь место в силу вида (21) общего решения однородной задачи для  $z_j$ . Таким образом, частное решение неоднородной задачи для  $z_2$  содержит только нерезонансные слагаемые

$$z_2 = z_{20} z_1^2 + z_{21} |z_1|^2 + z_{22} \bar{z}_1^2,$$

где  $z_1$  определяется соотношением (21), а коэффициенты  $z_{kl}$  находятся подстановкой частного решения в (22). Соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} i2\Omega_0 z_{20} &= i\Omega_0 z_{20} + c_{20}, \\ 0 &= i\Omega_0 z_{21} + c_{11}, \\ -i2\Omega_0 z_{22} &= i\Omega_0 z_{22} + c_{02}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$z_{20} = -\frac{ic_{20}}{\Omega_0}, \quad z_{21} = \frac{ic_{11}}{\Omega_0}, \quad z_{22} = \frac{ic_{02}}{3\Omega_0}.$$



На следующем шаге алгоритма, собирая слагаемые порядка  $\varepsilon^3$ , по аналогии с (23) получим следующее соотношение для коэффициентов при  $\varepsilon^3 e^{i\Omega_0 s} e^{i\Omega_1 r}$ :

$$i\Omega_1 \sigma_1 u + \sigma_1 \frac{\partial u}{\partial r} = -K_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - i\Omega_1 \sigma_1^2 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \Omega_1^2 \sigma_1^2 u \right] + K_1 (1 - e^{-i\varphi}) u + \tag{24}$$

$$+ c_{21} |u|^2 u + 2[c_{20} z_{21} + c_{02} \bar{z}_{22} + c_{11} (\bar{z}_{21} + z_{20})] |u|^2 u.$$

Выполнив несложные преобразования, из соотношения (24) в качестве нормальной формы получаем параболическое уравнение типа Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + d_1 \frac{\partial u}{\partial r} + d_0 u + d |u|^2 u, \tag{25}$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r+1) = u(\tau, r), \tag{26}$$

где

$$d_2 = \frac{1}{2} \sigma_1^2 = \frac{1}{2K_0^2}, \quad d_1 = \frac{1}{K_0} [i\Omega_1 K_0 \sigma_1^2 - \sigma_1] = \frac{1+i\Omega_1}{K_0^2},$$

$$d_0 = \frac{K_1}{K_0} (1 - e^{-i\varphi}) + \frac{1}{K_0} \left[ -\frac{1}{2} \Omega_1^2 K \sigma_1^2 + i\Omega_1 \sigma_1 \right] = \frac{K_0 K_1 (1 - e^{-i\varphi}) + i\Omega_1 - \Omega_1^2 / 2}{K_0^2},$$

$$d = \frac{1}{K_0} \left[ c_{21} - \frac{2i}{\Omega_0} \left( |c_{11}|^2 + \frac{1}{3} |c_{02}|^2 \right) \right].$$

Отметим, что в случае  $F(z) = c_{21} |z|^2 z$ , когда все остальные коэффициенты при нелинейных слагаемых равны нулю, параметр  $d$  определяется проще:  $d = c_{21} / K_0$ .

**Теорема 2.** Пусть краевая задача (25)–(26) имеет решение  $u = u_*(\tau, r)$ . Тогда уравнение (3) имеет быстро осциллирующее асимптотическое по невязке решение

$$z_*(t) = \varepsilon e^{i[\Omega_0 \varepsilon^{-1} + \Omega_1 \sigma(\varepsilon)]t} u_*(\varepsilon^2 t, \sigma(\varepsilon)t) + o(\varepsilon). \tag{27}$$

Отметим, что в случае  $\varphi = 0$  задачу (3) можно рассмотреть в следующей постановке:

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = (\varepsilon^2 \nu_0 + i\omega) z - K [z - z(t-1)] + F(z). \tag{28}$$

В качестве бифуркационного параметра, изменения которого существенно влияют на устойчивость нулевого решения, здесь выступает  $\nu$ , а не  $K$ , как ранее, поскольку  $K_0 \rightarrow \infty$  при  $\varphi \rightarrow 0$ . При любом фиксированном значении  $K > 0$  критическим значением параметра  $\nu$  является значение  $\nu = 0$ . Рассматривается ситуация  $\nu = 0 + \varepsilon^2 \nu_0$ . Линейный анализ при  $\nu_0 > 0$  был выполнен в [4]. Его результаты уже были отражены в соотношениях (7) и (18). Отметим, что по аналогии с изученной задачей в случае (28) в качестве нормальной формы также получаем уравнение (25) типа Гинзбурга–Ландау с периодическими краевыми условиями (26), коэффициенты которого имеют вид:

$$d_2 = \frac{1}{2} \sigma_1^2 = \frac{1}{2K^2}, \quad d_1 = \frac{1+i\Omega_1}{K^2}, \quad d_0 = \frac{\nu_0 K + i\Omega_1 - \Omega_1^2 / 2}{K^2},$$

$$d = \frac{1}{K} \left[ c_{21} - \frac{2i}{\omega} \left( |c_{11}|^2 + \frac{1}{3} |c_{02}|^2 \right) \right].$$

#### 4. Заключение

В заключение укажем на некоторые особенности воздействия большого запаздывания на динамику исследуемой нелинейной задачи.

Локальная динамика уравнения (1) в некоторой окрестности нулевого решения при асимптотически больших значениях запаздывания в соответствии с формулой (20) или (27) определяется решениями краевой задачи (25)–(26). Их динамика богата и сложна. Заметим, что параметры полученной краевой задачи зависят от величины  $\Omega_1$ , которая, в свою очередь, существенно зависит от малого параметра  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  величина  $\Omega_1$  бесконечно много раз «пробегают» промежуток  $[0, 2\pi)$ , оказывая таким образом влияние на решения  $u(\tau, r)$  задачи (25)–(26), и, следовательно, на решения исходного уравнения (1). Таким образом, наличие параметра  $\Omega_1$  в построенной квазинормальной форме позволяет говорить о высокой чувствительности динамики уравнения (1) даже к малым изменениям значения величины запаздывания  $h$ .

Асимптотические формулы, полученные в работе, позволяют без труда находить характеристики близких к нулю локальных режимов исходной задачи, а также определять области параметров и начальных условий, в которых возможно возникновение заданного режима.

Автор выражает благодарность Кащенко С.А. за постановку задачи и внимание к работе, а также Глызину С.Д. за ценные замечания.

#### Список литературы

1. *Schikora S. et al.* All-Optical Noninvasive Control of Unstable Steady States in a Semiconductor Laser // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97, 213902.
2. *Глазков Д.В.* Особенности динамики модели Ланга–Кобаяши в одном критическом случае // *Моделирование и анализ информационных систем.* 2008. Т. 15, №2. С. 36–45.
3. *Hövel P., Schöll E.* Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72, 046203.
4. *Yanchuk S. et al.* Control of unstable steady states by long delay feedback // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 74, 026201.
5. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // М.: Наука, 1971. 296 с.
6. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // *Дифференциальные уравнения.* 1989. Т. 25, №2. С. 262–270.
7. *Кащенко С.А.* Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // *Дифференциальные уравнения.* 1999. Т. 35, №10. С. 1343–1355.

8. *Кащенко Д.С., Кащенко И.С.* Динамика уравнений первого порядка с запаздыванием // Ярославль: ЯрГУ, 2006. 132 с.
9. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Новые методы доказательства существования и устойчивости периодических решений в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием // Тр. МИАН. 2007. Вып. 259. С. 106-133.

## Local dynamics of an equation with long delay feedback

Glazkov D.V.

**Keywords:** delay, laser model, normal form, asymptotic formula, small parameter

We study the local dynamics of a nonlinear complex DDE with large delay in the vicinity of the zero solution. The quasinormal forms method is used for the problem analysis. We show that parabolic type GL-equations act as normal forms in critical cases of the infinite dimension.

### Сведения об авторе:

**Глазков Дмитрий Владимирович,**  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель.