Модел. и анализ информ. систем. Т. **18**, № **1** (2011) 130–141

УДК 517.51+514.17

О тензорных квадратах неприводимых представлений конечных почти простых групп. I.

Поляков С. В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: SVPuniyar@yandex.ru

получена 22 января 2010

Ключевые слова: SR-группа, SM_m-группа, почти простые группы, автоморфизмы простых групп, GAP

Рассматриваются конечные почти простые SM_m-группы (см. определение ниже). В первой части работы получены результаты о строении простых SM_2-групп. Оказалось, что каждая из таких групп изоморфна группе $L_2(q)$, где $q = 2^t$, а $t > 1$.

Введение

Юджин Вигнер ввел в обиход следующий важный класс групп. Группа G называется просто приводимой (сокращенно SR[1]) группой, если тензорное произведение любых двух неприводимых представлений разлагается в сумму неприводимых представлений группы с кратностями, не превосходящими единицы, а любой элемент группы сопряжен со своим обратным. Им же получен критерий принадлежности конечной группы к классу SR-групп. Указанные группы представляют определенный интерес с точки зрения приложений в физике и химии.

Отметим, что строение конечных SR-групп долгое время оставалось несколько загадочным. Соответствующий вопрос поставлен в учебнике А.И. Кострикина [9], с. 250-251. С.П. Струнковым сформулирована конкретная проблема. Будут ли конечные SR-группы разрешимы (Коуровская тетрадь [10], с. 61, вопрос 11.94)? Бесконечные SR-группы могут быть неразрешимыми, например, группа $O_3(\mathbb{R})$.

Недавно проблема Стрункова была решена в работах [11] и [12] Л.С. Казариным, В.В. Янишевским и Е.И. Чанковым. Более того, они доказали, что разрешимость вытекает уже из того факта, что тензорные квадраты представлений имеют в своем разложении по неприводимым представлениям кратности, не превосходящие единицы (ASR-группы). При этом вещественность группы (сопряженность каждого элемента со своим обратным) не требовалась.

Возникает вопрос, как устроены конечные группы, у которых тензорные квадраты неприводимых представлений имеют небольшие кратности.

Определение 1. *Конечная группа G называется SM_m-группой*[2]*, если тензорный*

[1] от Simple reducible
[2] от Square multiplicity

квадрат любого неприводимого представления разлагается в сумму неприводимых представлений группы G с кратностями, не превосходящими m.

В настоящей работе полностью классифицированы все конечные простые SM_2-группы. Оказалось, что таких групп не так уж много. Автором было доказано (работа находится в печати), что группа $L_2(q)$ является SM_2-группой, если q — степень двух. В противном случае $L_2(q)$ является как минимум SM_3-группой. С учетом полученного результата в настоящей работе была доказана

Теорема 1. *Среди конечных простых групп к SM_2-группам относятся только группы $L_2(q), q = 2^t, t \geqslant 2$.*

Кроме того, в работе получены оценки для числа r, такого, что простая конечная группа не является SM_r-группой. Для некоторых групп получены окончательные результаты (см. таблицы 1 и 2).

В работе используется классификация конечных простых неабелевых групп и система компьютерной алгебры GAP[3].

В начале работы доказываются леммы 1, 2 и 3, устанавливающие связь между порядком, классовым числом и степенями неприводимых характеров SM_m-группы. Кроме того, приводятся известные результаты о классовом числе, степенях характеров и значениях $|\mathrm{Out}(G)|$ для конечных простых групп G лиева типа.

В доказательстве теоремы 1 исследуются кратности характеров в квадратах неприводимых характеров классических и исключительных групп лиева типа (леммы 4 и 5), 26 спорадических и знакопеременных групп (леммы 6 и 7).

В приложении приведены команды GAP, которые использовались в работе, а также специальная функция для проверки групп на принадлежность к классу SM_m.

Вспомогательные результаты

Из определения SM_m-группы G получаются оценки, связывающие степени неприводимых характеров, порядок и классовое число группы G. Эти оценки оказываются очень полезными при отсеве групп, не являющихся SM_2-группами, и для многих групп позволяют выяснить, к какому классу SM_m-групп, $m > 2$, они не принадлежат.

Лемма 1. *Пусть G — конечная SM_m-группа. Тогда для любого неприводимого характера χ группы G, $\chi(1) \leqslant mk(G)$, где $k(G)$ — число классов сопряженных элементов G.*

Доказательство. Если G — конечная SM_m-группа, то тензорный квадрат любого ее неприводимого представления раскладывается в сумму неприводимых представлений G, с кратностями, не превосходящими m. В частности, если χ_0 — неприводимый характер наибольшей степени, то $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k(G)} m_i\chi_i$, где $0 \leqslant m_i \leqslant m$. Тогда

$$\chi_0(1)^2 = \sum_{i=1}^{k(G)} m_i\chi_i(1) \leqslant m \sum_{i=1}^{k(G)} \chi_i(1) \leqslant m \sum_{i=1}^{k(G)} \chi_0(1) = mk(G)\chi_0(1),$$

[3] http://www.gap-system.org

откуда получается неравенство $\chi_0(1) \leqslant mk(G)$, что и доказывает лемму. $\square$

Лемма 2. *Пусть G — конечная SM_m-группа. Тогда $|G| \leqslant m^2k(G)^3$.*

Доказательство. В группе G выберем характер χ_0 наибольшей степени. Используя доказанное в лемме 1 неравенство, получаем

$$|G| = \sum_{i=1}^{k(G)} \chi_i^2(1) \leqslant \sum_{i=1}^{k(G)} \chi_0^2(1) \leqslant \sum_{i=1}^{k(G)} (mk(G))^2 = m^2k(G)^3.$$

Лемма доказана $\square$

Лемма 3. *Пусть G — неразрешимая SM_m-группа. Тогда степень любого ее неприводимого характера удовлетворяет неравенству $\chi(1) \leqslant mk(G) - m$.*

Доказательство. Рассмотрим неприводимый характер χ_0 наибольшей степени. Если a — количество неприводимых характеров группы G, имеющих такую же степень, что и то χ_0, то получаем следующее неравенство:

$$\chi_0(1)^2 \leqslant m \sum_{i=1}^{k(G)} \chi_i(1) \leqslant ma\chi_0(1) + m(k(G) - a - 1)(\chi_0(1) - 1) + m,$$

где $k(G) - a - 1$ — количество характеров, степени которых отличны от $\chi_0(1)$ и единицы. Известно, что число различных степеней неприводимых характеров неразрешимой группы не меньше 3. Отсюда можно сделать вывод, что $k(G) - a - 1 > 0$. Далее,

$$ma\chi_0(1) + m(k(G) - a - 1)(\chi_0(1) - 1) + m = mk(G)\chi_0(1) - ma\chi_0(1) - m\chi_0(1) + m + m,$$

откуда $\chi_0(1)(\chi_0(1) - mk(G) + m) \leqslant m(1 - (k(G) - a - 1))$. Поскольку $\chi_0(1), m > 0$, а правая часть неравенства меньше или равна 0, получаем, что $\chi_0(1) - mk(G) + m \leqslant 0$ или $\chi_0(1) \leqslant mk(G) - m = m(k(G) - 1)$. Лемма доказана $\square$

Для проверки простой группы G на принадлежность к классу SM_m-групп будем действовать следующим образом: по имеющейся информации о степенях характеров и классовом числе группы G вычислим $m = \chi(1)/(k(G) - 1)$, для выбранного $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Если окажется, что m строго больше некоторого числа r, то, в силу леммы 3, G не является SM_r-группой. Если же $m \leqslant r$, то, возможно, G — SM_r-группа.

Известные SM_m-группы

Здесь приводятся полученные результаты вычислений для некоторых простых и почти простых групп. Основным инструментом проверки на принадлежность группы к классу SM_m-групп служит функция `SM`, написанная в GAP (см. приложение).

Для каждой изучаемой группы G выбиралась пара неприводимых характеров $\chi_i, \chi_j \in \mathrm{Irr}(G)$ и проверялось, с какой кратностью $m_{i,j}$ характер χ_j входит в разложение χ_i^2. Если m — наибольшее значение среди $m_{i,j}$, то G — SM_m-группа.

Оказалось, что почти для всех проверенных групп значение $m_{i,j}$ будет наибольшим, когда $i = j$, а χ_i — характер максимальной степени. В таблице 1 приводятся рассмотренные группы, указано число m, а также степень характера $\chi(1) = \chi_i(1)$.

Кроме того, точное значение m было вычислено для каждой из спорадических простых групп и их групп автоморфизмов. Полученные значения представлены в таблице 2. Для большинства спорадических групп число m достаточно велико, в первую очередь это относится к группам Бэби Монстр B и Монстр M.

Таблица 1. Значения $m, \chi(1)$ для простых и почти простых групп

G	m	$\chi(1)$	G	m	$\chi(1)$	G	m	$\chi(1)$
$L_3(2)$	3	8	$\mathrm{Aut}(L_3(3))$	12	52	${}^2B_2(8)$	24	91
$L_3(3)$	11	39	$PGL_3(4)$	22	105	$B_2(4)$	41	340
$L_3(4)$	13	64	$\mathrm{Aut}(L_3(4))$	65	252	$B_2(5)$	101	780
$L_3(5)$	20	186	$\mathrm{Aut}(L_3(5))$	39	310	$B_3(2)$	91	512
$L_3(7)$	54	456	$PGL_3(7)$	25	456	A_7	17	35
$L_3(8)$	23	657	$\mathrm{Aut}(L_3(7))$	70	912	A_9	55	216
$L_4(2)$	16	70	$\mathrm{Aut}(L_4(2))$	17	90	A_{10}	99	567
$U_3(3)$	5	32	$P\Gamma U_3(3)$	20	64	A_{11}	613	2310
$U_3(4)$	7	75	$P\Gamma U_3(4)$	101	300	S_6	5	16
$U_3(5)$	23	144	$PGU_3(5)$	8	144	M_{10}	5	16
$U_3(7)$	10	384	$P\Gamma U_3(5)$	32	288	S_7	7	35
$U_3(8)$	33	567	$P\Gamma U_4(2)$	14	90	S_9	28	216
$U_4(2)$	21	81	$\mathrm{Aut}(U_5(2))$	497	2430	S_{10}	117	768
$U_5(2)$	125	1215	$P\Gamma L_2(9)$	4	20	S_{11}	312	2310

Таблица 2. Значения m для спорадических групп

G	m	G	m	G	m
M_{11}	21	Fi_{22}	314914	$\mathrm{Aut}(M_{12})$	28
M_{12}	56	Fi_{23}	42665245	$\mathrm{Aut}(M_{22})$	193
M_{22}	128	Fi'_{24}	30229634167	$\mathrm{Aut}(J_2)$	75
M_{23}	813	Ly	6916215	$\mathrm{Aut}(J_3)$	576
M_{24}	4576	Suz	34364	$\mathrm{Aut}(Fi_{22})$	157588
J_1	52	J_4	328524821	$\mathrm{Aut}(Fi'_{24})$	27596421160
J_2	64	Co_1	40380308	$\mathrm{Aut}(Suz)$	17199
J_3	579	Co_2	217302	$\mathrm{Aut}(He)$	1551
He	3102	HN	743301	$\mathrm{Aut}(HS)$	371
HS	737	Th	76031447	$\mathrm{Aut}(McL)$	5004
McL	1251	$O'N$	27808	$\mathrm{Aut}(HN)$	371658
Co_3	33436	Ru	11482	$\mathrm{Aut}(O'N)$	13904
B — $\mathrm{SM}_{1090623755084670}$		M — $\mathrm{SM}_{214580512284775131795138 56}$			

Простые неабелевы группы лиева типа

Предложение 1. Пусть G — конечная простая неабелева группа лиева типа над полем $F = \mathbb{F}_q$, имеющая нескрученный ранг l. Тогда $k(G) \leqslant (6q)^l$. Если $k(G) \geqslant |G|_p$, где p — характеристика поля F, то G изоморфна группе $L_2(q)$ для четного q, причем $k(G) = q + 1$, либо $L_2(5)$ (в последнем случае $k(G) = 5$).

Доказательство. См. [7], Теорема 1, Лемма 2.1 и Теорема 2. □

Предложение 2. Пусть G — простая неабелева группа лиева типа, определенная над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p. Тогда L имеет неприводимый характер St_G (характер Стейнберга), степени, равной порядку силовской p-подгруппы группы G.

Доказательство. См. [3]. □

Предложение 3. Пусть G — конечная простая неабелева группа, изоморфная $L_n(q)$ или $U_n(q)$, где $n \leqslant 6$. Тогда $k(G) \leqslant 2q^{n-1}$, исключая группы $G = U_4(2)$ $(k(G) = 20)$ и $G = U_5(2)$ $(k(G) = 47)$.

Доказательство. См. [11]. Лемма 3. □

Для простых неабелевых групп лиева типа нам понадобятся значения степеней характера St_L, оценка числа классов сопряженных элементов $k(L)$ и порядок $\mathrm{Out}(L)$. Большинство результатов взяты из [2], с. 491, и [5]. Также, в отдельных случаях, использовалась система компьютерной алгебры GAP.

Таблица 3. Значения $St_L(1)$, $k(L)$, $|\mathrm{Out}(L)|$ для простых групп L

L	$St_L(1)$	$k(L)$	$\lvert\mathrm{Out}(L)\rvert$
$L_n(q)$	$q^{n(n-1)/2}$	$\leqslant (6q)^{n-1}$	$2(q-1,n)\log_p q$
$L_2(q)$	q	$q+1, n$ — четное $(q+5)/2, n$ — нечетное	$(2,q-1)\log_p q$
$U_n(q) \cong {}^2L_n(q)$	$q^{n(n-1)/2}$	$\leqslant (6q)^{n-1}$	$2(q+1,n)\log_p q$
$B_n(q),\ n>2$	q^{n^2}	$\leqslant (6q)^n$	$(2,q-1)\log_p q$
$B_2(2^m)$	2^{4m}	$\leqslant (6\cdot 2^m)^2$	$2\log_p q$
$C_n(q),\ n>2$	q^{n^2}	$\leqslant (6q)^n$	$(2,q-1)\log_p q$
$D_n(q),\ n>3$	$q^{n(n-1)}$	$\leqslant (6q)^{n-1}$	$2(4,q^n-1)\log_p q, n\geqslant 5$ $6(4,q^n-1)\log_p q, n=4$
$D_4(2)$	2^{12}	53	6
${}^2D_4(2)$	2^{12}	39	2
$G_2(q)$	q^6	$\leqslant (6q)^2$	$2\log_p q, p=3$ $\log_p q, p\neq 3$
$G_2(3)$	3^6	23	2
$F_4(q)$	q^{24}	$\leqslant (6q)^4$	$(2,p)\log_p q$
$E_6(q)$	q^{36}	$\leqslant (6q)^6$	$2(3,q-1)\log_p q$
$E_7(q)$	q^{63}	$\leqslant (6q)^7$	$(2,q-1)\log_p q$
$E_8(q)$	q^{120}	$\leqslant (6q)^8$	$\log_p q$
${}^2B_2(q),\ q=2^{2m+1}$	q^2	$q+3$	$\log_2 q$
${}^2D_n(q),\ n>3$	$q^{n(n-1)}$	$\leqslant (6q)^{n-1}$	$2(4,q^n+1)\log_p q$
${}^2G_2(q),\ q=3^{2m+1}$	q^3	$q+8$	$\log_3 q$

Таблица 3. Продолжение

L	$St_L(1)$	$k(L)$	$\lvert \mathrm{Out}(L)\rvert$
${}^2F_4(q),\ q = 2^{2m+1}$	q^{12}	$q^2 + 4q + 17$	$\log_2 q$
${}^2E_6(q)$	q^{36}	$\leqslant (6q)^6$	$2(3, q + 1)\log_p q$
${}^2F_4(2)'$	2^{11}	22	2
${}^3D_4(q),\ q > 2$	q^{12}	$q^4 + q^3 + q^2 + q + 6$	$3\log_p q$
${}^3D_4(2)$	2^{12}	35	3

Далее нам понадобится дополнительная информация о степени характера St_L, классовом числе и порядке $\mathrm{Out}(L)$ для некоторых групп $L_n(q)$, $U_n(q)$, $B_n(q)$ и $C_n(q)$. Эти значения также получены из [5] и с помощью GAP.

Таблица 4. Значения $St_L(1),\ k(L), |\mathrm{Out}(L)|$ для некоторых групп $B_n(q)$.

L	$B_2(2)'$	$B_2(3)$	$B_2(4)$	$B_2(5)$	$B_2(7)$	$B_2(8)$	$B_3(2)$
$k(L)$	7	20	27	34	52	83	30
$St_L(1)$	9	81	256	625	2401	4096	512
$\lvert\mathrm{Out}(L)\rvert$	2	2	4	2	2	6	1

Классические простые группы лиева типа

Лемма 4. *Среди классических простых групп лиева типа к SM_2-группам относятся только группы $L_2(q)$, $q = 2^t$.*

Доказательство. Доказательство разобьем на три части. В первой будут рассматриваться группы $L_n(q)$ и $U_n(q)$, во второй — $B_n(q)$ и $C_n(q)$ и в третьей — $D_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$.

Группы $L_n(q)$ и $U_n(q)$

Пусть $G \cong L_n(q)$ или $U_n(q)$. За исключением групп $L_2(2) \cong U_2(2) \cong S_3$, $L_2(3) \cong \cong U_2(3) \cong A_4$ и $U_3(2)$, группы $L_n(q)$ и $U_n(q)$ неразрешимы, поэтому можно использовать оценку для степени характера $\chi(1) \leqslant m(k(G) - 1)$. В группе G степень характера $St_G(1) = q^{n(n-1)/2}$, а классовое число оценивается как $k(G) \leqslant (6q)^{n-1}$. Запишем неравенство $q^{n(n-1)/2} \leqslant m((6q)^{n-1} - 1) < m(6q)^{n-1}$ или $q^{n/2-1} < 6 \sqrt[n-1]{m}$.

Будем считать, что $n \geqslant 3$ (случай $n = 2$ был рассмотрен отдельно).

Пусть $m = 2$, тогда $q^{n/2-1} < 6 \sqrt[n-1]{2} < 9$. При $q \geqslant 3$ имеем $n/2 - 1 < \log_q 9 \leqslant 2$, откуда $n < 6$. То есть при $q \geqslant 3$ возможны случаи $n = 2, 3, 4, 5$. При $n \leqslant 6$ для групп $L_n(q)$ и $U_n(q)$, за исключением $U_4(2)$ и $U_5(2)$, существует оценка числа классов сопряженных элементов $k(G) \leqslant 2q^{n-1}$ (предложение 3). Из этой оценки получаем $q^{n(n-1)/2} < m \cdot 2q^{n-1}$, что при $m = 2$ дает неравенство $q^{(n-1)(n-2)/2} < 4$. Если $q = 3$, то из неравенства $3^{(n-1)(n-2)/2} < 4$ следует, что $n \leqslant 3$. При $q \geqslant 4$, $n > 2$ неравенство не выполняется. Таким образом, в случае $q \geqslant 3$ для дальнейшей проверки остаются группы $L_3(3)$ и $U_3(3)$. С помощью GAP убедимся, что эти группы не являются SM_2-группами. Действительно, $L_3(3)$ — SM_{11} а $U_3(3)$ — SM_5-группа (см. таблицу 1).

Пусть $q = 2$, $m = 2$. В этом случае должно выполняться $2^{n(n-1)/2} < 2(6 \cdot 2)^{n-1}$ или $2^{n/2-1} < \sqrt[n-1]{2} \cdot 6$. Несложно убедиться, что это неравенство выполняется при $n \leqslant 7$. У группы $L_7(2)$ число классов равно $k(L_7(2)) = 117$, а $k(U_7(2)) = 239$. Степень характера Стейнберга у этих групп одинаковая и равна 2^{21}. Отсюда делаем вывод, что $L_7(2)$ — не SM_{18078}, а $U_7(2)$ — не SM_{8811}-группа. Если $n \leqslant 6$, то, используя, как и выше, неравенство $2^{n(n-1)/2} < 2 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$, получаем, что $n(n-1)/2 < n+1$, откуда $n = 2$ или 3. Поскольку группы $L_2(2) \cong U_2(2)$ и $U_3(2)$ разрешимы, то они исключаются из списка рассматриваемых. Случай $L_3(2) \cong L_2(7)$ рассмотрим позднее.

Осталось рассмотреть группы $U_4(2)$ и $U_5(2)$. С помощью GAP определяем, что $U_4(2)$ — SM_{21}, а $U_5(2)$ — SM_{125}-группа (см. таблицу 1).

Пусть теперь $n = 2$. Как уже было сказано, в случае $q = 2^t \geqslant 4$ группа $L_2(q)$ — SM_2-группа, а если q — нечетное, то $L_2(q)$ не является SM_2-группой.

Подведем итог результатов проверки:

Пусть $G \cong L_n(q)$ или $U_n(q)$.

Если $n = 2$, то в случае $q = 2^t \geqslant 4$, G — SM_2-группа. Если же $q > 5$ — нечетное, то G не является SM_2-группой.

Если $2 < n \leqslant 6$, то верна оценка $m = q^{(n-1)(n-2)/2}/2 > 2$ за исключением групп $L_3(3)$, $U_3(3)$, $U_4(2)$ и $U_5(2)$. С помощью GAP было установлено, что $L_3(3)$ — SM_{11}, $U_3(3)$ — SM_5, $U_4(2)$ — SM_{21}, а $U_5(2)$ — SM_{125}-группа (см. таблицу 1).

Если $n > 6$, то верна оценка $m = q^{(n-1)(n-2)/2}/6^{n-1} > 307$ при $q \geqslant 3$, $L_7(2)$ — SM_{124286}-группа.

Группы $B_n(q)$ и $C_n(q)$

Пусть $G \cong B_n(q)$ или $C_n(q)$. За исключением $B_2(2)$, эти группы простые. Кроме того, $B_2(q) \cong C_2(q)$ и $B_n(2^m) \cong C_n(2^m)$. Ранг l группы G равен n, поэтому классовое число можно оценить как $k(G) \leqslant (6q)^n$. Степень характера Стейнберга $St(1) = q^{n^2}$.

Запишем неравенство $q^{n^2} < m(6q)^n$, откуда $q^{n^2-n} < m6^n$ или $q^{n-1} < 6\sqrt[n]{m} \leqslant 6\sqrt{m}$.

Пусть $m = 2$. Для случая $q \geqslant 3$ оценим n: $q^{n-1} < 6\sqrt{2} < 9$, откуда $n < 3$. При $n = 2$ получается неравенство $q^{2-1} < 9$, то есть q может принимать значения 2, 3, 4, 5, 7, 8. Случай $q = 2$ рассматривать не будем, поскольку группа $B_2(2)$ изоморфна симметрической группе S_6, которая не является простой. Как будет показано далее, S_6 — SM_5, а ее коммутант A_6 — SM_3-группа. Для случаев $q = 3, 4, 5$ воспользуемся GAP: $B_2(3)$ — SM_{21}, $B_2(4)$ — SM_{41}, $B_2(5)$ — SM_{101}-группа (см. таблицу 1).

Для оставшихся $q \leqslant 8$, используя таблицу 4, оценим число $m = St(1)/(k(G)-1)$:

Если $q = 7$, то $k(G) = 52$, $St_G(1) = 2401$, откуда $m = 2401/51 > 47$, следовательно, $B_2(7)$ не SM_{47}-группа.

Если $q = 8$, то $k(G) = 83$, $St_G(1) = 4096$, значит $m = 4096/82 > 49$, следовательно, $B_2(8)$ не SM_{49}-группа.

Если же $q = 2$, то из условия $2^{n-1} < 6\sqrt[n]{2}$, получаем, что n может принимать значения $2, 3$. Нам остается рассмотреть только группу $B_3(2) \cong C_3(2)$. Для точных результатов воспользуемся GAP: $B_3(2)$ — SM_{91}-группа (см. таблицу 1).

В общем случае, для числа m получается оценка: $m = \dfrac{q^{n(n-1)}}{6^n - 1} > \left(\dfrac{q^{n-1}}{6}\right)^n$, что при $q \geqslant 3$ и $n > 2$ дает $m > 3$.

Группы $D_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$

Рассматривается случай $n \geqslant 4$. Для $G \cong D_n(q)$ или ${}^2D_n(q)$ степень характера Стейнберга $St_G(1) = q^{n(n-1)}$. При этом ранг $l = n-1$, а значит, классовое число оценивается как $k(G) \leqslant (6q)^{n-1}$. Из условия $q^{n(n-1)} < m(6q)^{n-1}$, при $m = 2$, получаем неравенство $q^{n-1} < 6\sqrt[3]{m} < 8$, которое для $q \geqslant 2$ верно только при $n < 4$. Мы получили противоречие, следовательно, группы $D_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$ не являются SM_2-группами.

В общем случае для m получается оценка: $m > \dfrac{q^{(n-1)^2}}{6^{n-1}} = \left(\dfrac{q^{n-1}}{6}\right)^{n-1} > 2.$

Лемма доказана. □

Исключительные простые группы лиева типа

Лемма 5. *Среди исключительных простых групп лиева типа нет SM_2-групп.*

Доказательство. Для каждой из исключительных простых групп $E_n(q)$, ${}^2E_6(q)$, $G_2(q)$, ${}^2B_2(2^{2n+1})$, $F_4(q)$, ${}^3D_4(q)$, ${}^2G_2(3^{2n+1})$, ${}^2F_4(2^{2n+1})$, оценим число $m = m(G)$, равное отношению степени характера Стейнберга к числу $k(G)-1$. Для этого воспользуемся значениями, представленными в таблице 3.

Пусть $G \cong E_6(q)$ или ${}^2E_6(q)$. Тогда $St_G(1) = q^{36}$, $k(G) \leqslant (6q)^6$, откуда $m = q^{30}/(k(G)-1) > 2^{30}/6^6 > 23014$.

Для $G \cong E_7(q)$, используя значения $St_G(1) = q^{63}$ и оценку а $k(G) \leqslant (6q)^7$ получаем, что $m = q^{56}/(k(G)-1) > 2^{56}/6^7 > 2,57 \cdot 10^{11}$.

Если $G \cong E_8(q)$, имеем $St_G(1) = q^{120}$ и $k(G) \leqslant (6q)^8$, откуда получаем, что $m = q^{112}/(6^8-1) > 2^{112}/6^8 > 3,09 \cdot 10^{27}$.

Пусть $G \cong G_2(q)$. Случай $q = 2$ не рассматриваем, поскольку $G_2(2)$ не является простой, а ее коммутант $G_2(2)' \cong U_3(3)$ — SM_5-группа. Пусть $q = 3$. Тогда из таблицы 3 получаем $St_{G_2(3)} = 3^6$, $k(G_2(3)) = 23$, и $m(G) = 3^6/22 > 33$. Пусть теперь $q > 3$. Для группы $G \cong G_2(q)$ имеем $St_G(1) = q^6$, а $k(G) \leqslant (6q)^2$. Тогда $m = q^6/((6q)^2-1) > q^4/36 > 4^4/36 > 7$.

Пусть $G \cong {}^2B_2(2^{2n+1})$. Группа ${}^2B_2(2)$ разрешима, а при бо́льших n будет простой, поэтому считаем, что $n \geqslant 1$. Тогда $St_G(1) = (2^{2n+1})^2$, а $k(G) = 2^{2n+1}+3$. Используя GAP получаем, что ${}^2B_2(8)$ — SM_{24}-группа (см. таблицу 1). Если $n = 2$, то $m({}^2B_2(2^5)) = 2^{10}/(2^5+3-1) > 30$. При $n \geqslant 3$, получаем нижнюю границу для значений $m : m = (2^{2n+1})^2/(2^{2n+1}+2) = (2^{4n+1})/(2^{2n}+1) \geqslant 2^{13}/65 > 126$.

Пусть $G \cong F_4(q)$. Для этой группы $St_G(1) = q^{24}$, $k(G) \leqslant (6q)^4$. Оценка для m получается такой: $m = q^{24}/(6q)^4 = q^{20}/6^4 \geqslant 2^{20}/6^4 > 809$.

Пусть $G \cong {}^3D_4(q)$. Тогда $St_G(1) = q^{12}$, $k(G) = q^4+q^3+q^2+q+6$, при $q > 2$. Так как, при $q \geqslant 3$, $k(G)-1 = q^4+q^3+q^2+q+5 = q^2(q^2+q+1)+q+5 < q^2(q^2+2q)+3q = q^3(q+2)+3q < 2q^4+3q < q(2q^3+3) < q(3q^3) = 3q^4$, то $m = St_G(1)/(k(G)-1) > q^{12}/3q^4 = q^8/3 \geqslant 3^8/3 > 2187$. Если $q = 2$, то $k(G) = 35$ и $m = 2^{12}/35 > 117$.

Пусть $G \cong {}^2G_2(3^{2n+1})$, $n \geqslant 1$. Тогда $St_G(1) = (3^{2n+1})^3$, а $k(G) = 3^{2n+1}+8$. При $n \geqslant 1$ $k(G)-1 = 3^{2n+1}+7 < 3^{2n+1}+9 = 3(3^{2n}+3) \leqslant 2\cdot 3^{2n+1}$ получаем оценку $m = (3^{2n+1})^3/(2\cdot 3^{2n+1}) = 3^{4n+2}/2 \geqslant 3^6/2 > 364$.

Пусть $G \cong {}^2F_4(2^{2n+1})$. Группа G при $n \geqslant 1$ является простой. Если же $n = 0$, то простой группой будет коммутант ${}^2F_4(2)'$ — группа Титса. Если $G \cong {}^2F_4(2)'$, то $St_G(1) = 2^{11}$, а $k(G) = 22$, откуда $m = 2^{11}/21 > 97$.

Пусть $n \geqslant 1$. Тогда $St_G(1) = (2^{2n+1})^{12}$, а $k(G) = (2^{2n+1})^2 + 4 \cdot 2^{2n+1} + 17$. Из неравенства $k(G) - 1 = (2^{2n+1})^2 + 4 \cdot 2^{2n+1} + 16 \leqslant (2^{2n+1})^2 + 4 \cdot 2^{2n+1} + 2 \cdot 2^{2n+1} = (2^{2n+1}) \cdot (2^{2n+1} + 6) < 2^{2n+1} \cdot (2^{2n+1} + 2^{2n+1}) = 2^{2n+1} \cdot 2^{2n+2} = 2^{4n+3}$ получаем оценку $m = (2^{2n+1})^{12}/(k(G) - 1) > (2^{2n+1})^{12}/2^{4n+3} = 2^{20n+9} \geqslant 2^{29} > 5 \cdot 10^8$.

Лемма доказана. □

Спорадические группы

Лемма 6. *Спорадические группы не являются SM_{20}-группами*

Доказательство. С помощью системы компьютерной алгебры GAP были получены точные значения наименьшего числа $m(G)$, такого, что G — SM_m-группа (см. таблицу 2). Видно, что наименьшее из возможных значений $m = m(M_{11})$ равно 21. Отсюда можно сделать вывод, что ни одна из спорадических групп не является SM_{20}-группой. Лемма доказана. □

Знакопеременные группы

Значение $\chi_0(1)$ характера максимальной степени группы A_n для $n \leqslant 23$ можно найти на персональной странице Нейла Слоэна, последовательность A060955[4]. Там же имеется информация о классовом числе $k(A_n)$ и числе разбиений $p(n)$[5].

Таблица 5. Значения $p(n), k(A_n), \chi_0(1)$, для $5 \leqslant n \leqslant 12$

L	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
$k(L)$	5	7	9	14	18	24	31	43
$p(n)$	7	11	15	22	30	42	56	77
$\chi_0(1)$	5	10	35	70	216	567	2310	5775

Предложение 4. Для $n > 12$ верно неравенство $k(S_n) < (2 \cdot \sqrt{3})^{-1/2} \cdot (3/2)^n$.

Доказательство. [8] Лемма 3.2. □

Предложение 5. Пусть G — простая неабелева группа. Тогда существует такой неприводимый характер χ группы G, что $\chi(1)^3 \geqslant |G|$.

Доказательство. См. [13]. □

Лемма 7. *Среди простых знакопеременных групп SM_2-группой является только группа A_5.*

[4] http://www.research.att.com/∼njas/sequences/A060955

[5] последовательности A000702 и A000041

Доказательство. Пусть L — знакопеременная SM_2-группа и $n \geqslant 5$. Тогда, по лемме 1, должно выполняться

$$\chi_0(1) < 2k(L) \leqslant 2 \cdot 2k(S_n) = 4p(n). \tag{1}$$

Пусть $n > 12$. Тогда, по предложению 4, $p(n) < (3/2)^n \cdot (2 \cdot \sqrt{3})^{-1/2}$ и неравенство (1) примет вид $\chi_0(1) < 4 \cdot (3/2)^n \cdot (2 \cdot \sqrt{3})^{-1/2}$.

При $n \geqslant 5$ группа A_n простая, поэтому, согласно предложению 5, $\chi_0(1) > |L|^{1/3} = (n!/2)^{1/3}$. Отсюда мы получаем неравенство: $(n!/2)^{1/3} < 4 \cdot (3/2)^n \cdot (2 \cdot \sqrt{3})^{-1/2}$ или $n! < 19,9 \cdot (3/2)^{3n}$, а поскольку $3^3 < 2^5$, то $n! < 19,9 \cdot (3/2)^{3n} < 19,9 \cdot 2^{2n} < 2^{2n+5}$. Пусть $n = 13$. Тогда $13! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 > 2^{19} \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 > 2^{25} \cdot 11 \cdot 13 > 2^{32}$. Подставив полученные значения в неравенство (1), получаем, что $2^{32} < 13! < 2^{2 \cdot 13+5} = 2^{31}$, противоречие, следовательно, случай $n = 13$ не подходит. Несложно увидеть, что при $n > 13$ неравенство $n! < 2^{2n+5}$ также неверно.

Нам осталось проверить неравенство $\chi_0(1) < 2k(A_n)$ при $5 \leqslant n \leqslant 12$. Воспользовавшись информацией из таблицы 5, убеждаемся, что ни одна из групп A_n, при $8 < n < 12$ не является SM_2-группой.

Из оставшихся групп только группа A_5 является SM_2-группой. Действительно, группа $A_5 \cong L_2(4)$ уже рассматривалась, — это SM_2-группа. Далее, $A_6 \cong L_2(9)$ — SM_3-группа. Случай A_8 также был рассмотрен: $A_8 \cong L_4(2)$ — SM_{16}-группа. Для $n = 7$ используем GAP: A_7 — SM_{17} (см. таблицу 1). Лемма доказана. $\square$

Из лемм 4–7 следует, что среди конечных простых групп только группы $L_2(q)$, $q = 2^t, t \geqslant 2$ являются SM_2-группами. Это и доказывает теорему 1.

Приложение

Вычисления в GAP

Система компьютерной алгебры GAP — это программное обеспечение, основное применение которого — вычисления в дискретных алгебраических структурах. В настоящей работе главным образом использовались инструменты для работы с конечными группами. Приведем некоторую информацию об основных командах системы GAP, которые использовались при отдельных вычислениях и в специально составленных функциях.

Основная информация о группах может быть получена с помощью команд:
`Size(G)` — порядок группы G;
`NrConjugacyClasses(G)` — число классов сопряженных элементов группы G;
`StructureDescription(G)` — описание строения группы G;
`IsSimple(G)`, `IsSolvabe(G)` — проверка группы G на простоту и разрешимость;
`DerivedSubgroup(G)` — коммутант группы G; `AutomorphismGroup(G)` — группа $\mathrm{Aut}(G)$.

Следующие команды задают группы, используемые в работе:
`PSL(n,q)`, `PSU(n,q)`— группы $L_n(q)$ и $U_n(q)$, `PSp(n,q)` — группа $PSp_n(q)$,
`SuzukiGroup(q)` — группа ${}^2B_2(q)$.

В изучении неприводимых характеров группы помогают следующие команды:
`CharacterTable(G)` — таблица характеров группы G.
`Irr(G)` — список неприводимых характеров группы G.

Основным инструментом для определения того, к какому классу SM_m-групп принадлежит рассматриваемая группа, служит функция `SM(g)`. В ней для каждой пары неприводимых характеров `i`, `j` группы `g` вычисляется скалярное произведение `ScalarProduct(i*i,j)`, значение которого вносится в список `sp` вместе со значениями степеней этих характеров. В результате функция `SM(g)` выдает элемент списка `sp`, с максимальным значением `sp[1]`.

```
SM := function(g)
  local I, size, i, j, sp;
  I:=Irr(g);; size:=Size(I); sp:=[];
  for i in I do for j in I do
    Add(sp,[ScalarProduct(i^2,j),i[1],j[1]]);
  od; od;
  sp:=Maximum(sp);
  return [sp[1],sp[2],sp[3],size];
end;
```

Список литературы

1. Wigner E.P. On representations of finite groups // Amer. J. Math. 1941. Vol. 63. P. 57–63.

2. Gorenstein D. Finite groups. N.Y.: Harper and Row, 1968.

3. Carter R.W. Finite groups of Lie type. Conjugacy classes and complex characters. Willey, 1985.

4. Gallagher P.X. The number of conjugacy classes in a finite group // Math. Z. 1970. Vol. 118. P. 175–179.

5. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. Atlas of Finite Groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. `http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/`

6. Macdonald I.G. Numbers of conjugacy classes in some finite classical groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1981. Vol. 23, №1. P. 23–48.

7. Liebeck M., Pyber L. Upper bounds for the number of conjugacy classes of a finite group // J. Algebra, 1997. №198. P. 538–562.

8. Maróti A. Bounding the number of conjugacy classes of a permutation group // Journal of Group Theory. 2005. 8, №3. P. 273—289.

9. Кострикин А.И. Введение в алгебру, часть 3. Основные структуры алгебры. М.: Физ.-мат. лит., 2000.

10. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Издание 16-е, дополненное, включающее Архив решенных задач. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2006.

11. Казарин Л.С., Янишевский В.В. О конечных просто приводимых группах // Алгебра и анализ. 2007. Т. 19, № 6. С. 86–116.

12. Казарин Л.С., Чанков Е.И. Конечные просто приводимые группы разрешимы // Математический сборник. 2010. Т. 201, № 5. С. 27–40.

13. Kazarin L.S., Sagirov I.A. On the degrees of irreducible characters of finite simple groups // Proc. of the Steklov Inst. Math. Suppl. 2001. Vol. 2. P. 71–81.

14. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4.10, Aachen, St. Andrews, 2008; `http://www.gap-system.org`

On tensor squares of irreducible representations of almost simple groups. I

Polyakov S. V.

Keywords: SR-groups, SM$_m$-groups, almost simple groups, automorphisms, GAP

Almost simple SM$_m$-groups are considered. A group G is called a SM$_m$-group if the tensor square of any irreducible representation is decomposed into the sum of its irreducible representations with multiplicities not greater than m. In the first part of this article we consider simple groups. It turned out that among them only groups $L_2(q)$, $q = 2^t$, $t > 1$, are SM$_2$-groups.

Сведения об авторе:
Поляков Сергей Владимирович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ассистент кафедры общей математики