Модел. и анализ информ. систем. Т. **18**, № **1** (2011) 142–148

УДК 517.51+514.17

Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции

Невский М. В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: mnevsk@uniyar.ac.ru

получена 24 сентября 2010

Ключевые слова: функции n переменных, полиномиальная интерполяция, проектор, норма, гомотетия

Доказываются новые геометрические оценки для проекторов, связанных с полиномиальной интерполяцией непрерывных функций n переменных.

1. Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n := [0,1]^n$. Через Ω обозначим замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, а через $C(\Omega)$ — пространство непрерывных функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{C(\Omega)} := \max_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Для симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ через $\mathrm{vol}(S)$ обозначим его объём, через σS — результат гомотетии S относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Если S является невырожденным, положим

$$\xi(S;\Omega) := \min\left\{\sigma \geq 1 : \Omega \subset \sigma S\right\}, \quad \xi(S) := \xi(S; Q_n).$$

Включение $\Omega \subset S$ эквивалентно равенству $\xi(S;\Omega) = 1$.

В статье рассматриваются вопросы, связанные с интерполяцией функций из $C(\Omega)$ с помощью алгебраических многочленов, принадлежащих одному из некоторых конечномерных пространств. Каждое такое пространство Π вводится следующим образом. Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ под *мономом* x^α, как обычно, понимается выражение $x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $d \geq n+1$; $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_d(x)$ — линейно независимые функции, представляющие собой мономы. В дальнейшем предполагается, что

$$\varphi_1(x) \equiv 1,\ \varphi_2(x) = x_1,\ \ldots,\ \varphi_{n+1}(x) = x_n.$$

Под *допустимым* d-мерным пространством многочленов от n переменных ниже понимается совокупность $\Pi := \operatorname{lin}(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$. Отметим варианты $\Pi = \Pi_k(\mathbb{R}^n)$ — пространство многочленов общей степени $\leq k$ $(k \in \mathrm{N})$ и $\Pi = \Pi_\alpha(\mathbb{R}^n)$ — пространство многочленов степени $\leq \alpha_i$ по x_i $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$.

При рассмотрении интерполяции функций $f \in C(\Omega)$ с помощью многочленов из Π важную роль будет играть отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{d-1}$, определяемое равенством

$$y = F(x) := (\varphi_2(x), \ldots, \varphi_d(x)) = (x_1, \ldots, x_n, \varphi_{n+1}(x), \ldots, \varphi_d(x)).$$

Мы будем рассматривать F на множестве Ω. Отмеченный выше выбор первых мономов $\varphi_j(x)$ обеспечивает обратимость F. Как обычно, $F(\Omega)$ обозначает образ Ω при отображении F.

Совокупность точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(d)} \in \Omega$ будем называть *допустимым* набором узлов для интерполяции с помощью Π, если $\Delta := \det(\mathbf{A}) \neq 0$. Здесь и ниже $\mathbf{A}$ есть $(d \times d)$-матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \varphi_1\left(x^{(1)}\right) & \varphi_2\left(x^{(1)}\right) & \ldots & \varphi_d\left(x^{(1)}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1\left(x^{(d)}\right) & \varphi_2\left(x^{(d)}\right) & \ldots & \varphi_d\left(x^{(d)}\right) \end{pmatrix}.$$

Интерполяционный проектор $P : C(\Omega) \to \Pi$ по этому набору узлов определяется с помощью равенств $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$, $j = 1, \ldots, d$. Аналогом интерполяционной формулы Лагранжа является представление

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{d} f\left(x^{(j)}\right) \lambda_j(x), \quad \lambda_j(x) := \frac{\Delta_j(x)}{\Delta}, \tag{1.1}$$

где $\Delta_j(x)$ — определитель, который получается из Δ заменой j-й строки на строку $\left(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_d(x)\right)$. Многочлены $\lambda_j \in \Pi$ обладают свойством $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$. Их коэффициенты в базисе $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ составляют столбцы $\mathbf{A}^{-1}$. Из (1.1) следует, что норма P как оператора из $C(\Omega)$ в $C(\Omega)$ равняется

$$\|P\|_\Omega := \max_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^{d} |\lambda_j(x)| = \frac{1}{|\Delta|} \max_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^{d} |\Delta_j(x)|.$$

В дальнейшем рассматриваются лишь допустимые наборы узлов и те множества Ω, каждое из которых содержит такой набор.

Через $\theta_n(\Pi; \Omega)$ обозначим минимальную величину нормы проектора $P : C(\Omega) \to \Pi$ при условии, что соответствующие P узлы интерполяции принадлежат Ω :

$$\theta_n(\Pi; \Omega) := \min_{x^{(j)} \in \Omega} \|P\|_\Omega.$$

Проектор, норма которого равна $\theta_n(\Pi; \Omega)$, будем называть *минимальным*. Положим $\theta_n := \theta_n\left(\Pi_1\left(\mathbb{R}^n\right); Q_n\right)$.

Некоторые оценки величин $\|P\|_\Omega$ и $\theta_n(\Pi;\Omega)$ через геометрические характеристики множеств были получены автором в [2]. Целью настоящей работы является доказательство и обсуждение ряда новых оценок для интерполяционных проекторов. При их выводе, кроме соотношений работы [2], применяются геометрические неравенства статьи [4].

2. Теорема о симплексе и параллелепипеде

Пусть W — невырожденный n-мерный параллелепипед. Предположим, что рёбра W задаются линейно независимыми векторами $w_1,\ldots,w_n$. Через $a_i(W)$ обозначим длину w_i. Для выпуклого $G\subset\mathbb{R}^n$ через $\delta_i^W(G)$ обозначим максимальную длину отрезка, содержащегося в G и параллельного w_i. В дальнейшем мы существенно используем следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(W)}{\delta_i^W(S)}\le\xi(S;W). \tag{2.1}$$

По поводу обоснования (2.1) заметим следующее. Любые два невырожденных n-мерных параллелепипеда аффинно-эквивалентны, а соответствующее аффинное преобразование переводит симплекс в симплекс. При таком преобразовании сохраняется отношение длин. Поэтому (2.1) достаточно установить для $W=Q_n$. В этом случае теорема 2.1 объединяет результаты утверждений, доказанных автором в статье [4] (см. там теорему 4.1 и следствие 4.2):

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\delta_i(S)}\le\xi(S).$$

Здесь $\delta_i(S):=\delta_i^{Q_n}(S)$. Если $Q_n\subset S$, то $\xi(S)=1$. Величина $\delta_i(S)$ есть максимальная длина отрезка, содержащегося в S и параллельного i-й координатной оси. Она называется *i-м осевым диаметром* S. В [4] получен простой способ вычисления осевых диаметров симплекса по координатам его вершин.

Автору удалось показать, что *левая часть (2.1) равна минимальному $\sigma>0$, для которого результат некоторого параллельного переноса симплекса σS содержит* W. Доказательство последнего утверждения предполагается изложить в отдельной статье.

3. Соотношения для норм проекторов

В формулировке и доказательстве следующей теоремы используются обозначения пп. 1 и 2.

Теорема 3.1. *Пусть* Π *— допустимое пространство многочленов размерности* d, $G := \mathrm{conv}(F(\Omega))$. *Тогда*

$$\max_{D\subset G}\sum_{i=1}^{d-1}\frac{a_i(D)}{\delta_i^D(G)} \le \frac{d}{2}\left(\theta_n(\Pi;\Omega)-1\right)+1. \tag{3.1}$$

Максимум в левой части (3.1) берётся по совокупности невырожденных $(d-1)$*-мерных параллелепипедов* $D\subset G$.

Если интерполяционный проектор $P^*: C(\Omega)\to\Pi$ *и параллелепипед* $D^*\subset G$ *удовлетворяют равенству*

$$\sum_{i=1}^{d-1}\frac{a_i(D^*)}{\delta_i^{D^*}(G)} = \frac{d}{2}\left(\|P^*\|_\Omega-1\right)+1, \tag{3.2}$$

то P^* *является минимальным.*

Доказательство. Пусть $P: C(\Omega)\to\Pi$ — интерполяционный проектор по допустимому набору узлов $x^{(1)},\ldots,x^{(d)}$. Для этих узлов $\Delta\ne 0$. Рассмотрим симплекс $S\subset\mathbb{R}^{d-1}$ с вершинами $y^{(j)} := F\left(x^{(j)}\right)$, $j=1,\ldots,d$. Так как $\mathrm{vol}(S)=|\Delta|/(d-1)!>0$, то S является невырожденным. В [2, теорема 3.2] автором доказано, что

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{d-1}\right)\left(\|P\|_\Omega-1\right)+1 \le \xi(S;F(\Omega)) \le \frac{d}{2}\left(\|P\|_\Omega-1\right)+1. \tag{3.3}$$

Воспользуемся правым неравенством из (3.3). В силу выпуклости S верно $\xi(S;F(\Omega))=\xi(S;G)$. Пусть $D\subset G$ — произвольный невырожденный параллелепипед. Имеем:

$$\xi(S;D)\le\xi(S;G)=\xi(S;F(\Omega))\le\frac{d}{2}\left(\|P\|_\Omega-1\right)+1. \tag{3.4}$$

Величину $\xi(S;D)$ оценим снизу с помощью (2.1):

$$\xi(S;D)\ge\sum_{i=1}^{d-1}\frac{a_i(D)}{\delta_i^D(S)}. \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) следует, что норма P удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i=1}^{d-1}\frac{a_i(D)}{\delta_i^D(S)} \le \frac{d}{2}\left(\|P\|_\Omega-1\right)+1. \tag{3.6}$$

Так как G содержит точки $y^{(j)}$ и является выпуклым, то G содержит S. Поэтому при $i=1,\ldots,d-1$ выполняется $\delta_i^D(S)\le\delta_i^D(G)$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{d-1}\frac{a_i(D)}{\delta_i^D(G)} \le \frac{d}{2}\left(\|P\|_\Omega-1\right)+1. \tag{3.7}$$

Правая часть (3.7) не зависит от D. Взяв в (3.7) максимум по параллелепипедам $D \subset G$, видим, что для любого интерполяционного проектора $P : C(\Omega) \to \Pi$

$$\max_{D \subset G} \sum_{i=1}^{d-1} \frac{a_i(D)}{\delta_i^D(G)} \leq \frac{d}{2} \left(\|P\|_\Omega - 1\right) + 1.$$

Для получения (3.1) осталось в последнем соотношении взять минимум по P.

Вторая часть утверждения (достаточность (3.2) для минимальности P^*, т. е. для равенства $\|P^*\|_\Omega = \theta_n(\Pi; \Omega)$) легко следует из первой. Именно, допустим, что (3.2) выполняется, но P^* не является минимальным. Тогда, очевидно,

$$\max_{D \subset G} \sum_{i=1}^{d-1} \frac{a_i(D)}{\delta_i^D(G)} > \frac{d}{2} \left(\theta_n(\Pi; \Omega) - 1\right) + 1,$$

что противоречит (3.1). □

4. Замечания, примеры и открытые вопросы

Дадим несколько замечаний к теореме 3.1.

4.1. При оценивании нормы конкретного проектора можно применять неравенство (3.6), в котором $D \subset G$ — произвольный невырожденный параллелепипед. Однако следует иметь в виду, что в случае $D \subset S$ левая часть (3.6) не превышает 1; это вытекает из теоремы 2.1 и равенства $\xi(D; S) = 1$. Так как норма любого проектора больше либо равна 1, то для $D \subset S$ оценка (3.6) тривиальна.

4.2. Если $D \subset G$, то $a_i(D) \leq \delta_i^D(G)$, поэтому левые части (3.1) и (3.2) не превышают $d - 1$. Пусть выполняется (3.2), тогда

$$\|P^*\|_\Omega = \frac{2}{d} \left(\sum_{i=1}^{d-1} \frac{a_i(D^*)}{\delta_i^{D^*}(G)} - 1 \right) + 1 \leq \frac{2(d-2)}{d} + 1 = 3 - \frac{4}{d}.$$

Следовательно, *сфера действия условия (3.2) охватывает лишь проекторы, норма которых не превышает* $3 - 4/d$. Это весьма ограничительно уже в случае $\Omega = Q_n$, $\Pi = \Pi_1(\mathbb{R}^n)$. В [1, теорема 6.2] доказано, что при любом n

$$\theta_n = \theta\left(\Pi_1\left(\mathbb{R}^n\right); Q_n\right) > \frac{\sqrt{n-1}}{e}. \tag{4.1}$$

В этом варианте $d = n+1$. Из предыдущего и (4.1) следует, что при достаточно больших n проекторов, удовлетворяющих (3.2), не существует. Это справедливо и для $n = 2$, см. далее. Таким образом, *условие (3.2), достаточное для минимальности* P^*, *не является необходимым.*

4.3. Для $\Omega = Q_n$, $\Pi = \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ имеем $F(x) = x$ и $G = Q_n$. Левая часть (3.1) в точности равна $d-1 = n$. Максимум в ней достигается на $D = Q_n$, и (3.1) приводится к виду

$$\theta_n \geq 3 - \frac{4}{n+1}. \tag{4.2}$$

Известные автору случаи равенства в (4.2) исчерпываются $n = 1, n = 3$ и $n = 7$; они соответствуют $\theta_1 = 1, \theta_3 = 2, \theta_7 = 5/2$, см. [1]. При $n = 1, 3, 7$ каждый из минимальных проекторов удовлетворяет (3.2), если взять $D^* = Q_n$; тогда (3.2) эквивалентно $\|P^*\|_\Omega = 3 - 4/(n+1)$. Первое значение n, при котором в (4.2) выполняется строгое неравенство, есть $n = 2$. Как показано в [1], $\theta_2 = 1 + 2\sqrt{5}/5 = 1.8944\ldots$, а правая часть (4.2) при $n = 2$ равна 5/3. Значит, в двумерной ситуации (3.2) не верно для всех P^* и D^*.

Минимальное n, для которого наличие равенства в (4.2) не ясно, равно 4. Применяя в [3] более точную, чем (4.1), оценку для θ_n с помощью многочленов Лежандра, автор установил, что строгое неравенство в (4.2) выполняется по крайней мере начиная с $n = 57$. Вопрос о точном значении этой границы открыт.

4.4. Пусть $\Omega = [-1, 1]$, $\Pi = \Pi_2(\mathbb{R})$. Тогда $d = \dim \Pi_2(\mathbb{R}) = 3$. Отображение F имеет вид $y = F(x) = (x, x^2)$. Поэтому

$$G = \mathrm{conv}(F(\Omega)) = \{(y_1, y_2) : -1 \le y_1 \le 1,\ y_2 \ge y_1^2\}$$

есть область, лежащая над параболой $y_2 = y_1^2$ на отрезке $[-1, 1]$. Известно (см., например, [5]), что $\theta(\Pi_2(\mathbb{R}); [-1, 1]) = 5/4$, а проектор по равномерным узлам является минимальным. В [2] с помощью геометрических средств доказано, что минимальным является любой проектор с узлами $-s$, 0, s при $s \in [2\sqrt{2}/3, 1]$, причём других минимальных проекторов нет. Максимум в левой части (3.1) достигается на прямоугольнике с вершинами $(\pm 1/2, 1/4)$, $(\pm 1/2, 1)$ и равен 5/4. После простых преобразований (3.1) даёт

$$\theta(\Pi_2(\mathbb{R}); [-1, 1]) \ge \frac{7}{6}.$$

Как оказывается, никакой интерполяционный проектор не удовлетворяет (3.2). Вместе с тем минимальный проектор P с узлами $-2\sqrt{2}/3, 0, 2\sqrt{2}/3$ удовлетворяет более слабому, чем (3.2), условию

$$\frac{a_1(D)}{\delta_1^D(S)} + \frac{a_2(D)}{\delta_2^D(S)} = \frac{3}{2}(\|P\|_\Omega - 1) + 1, \tag{4.3}$$

если в качестве D взять прямоугольник с вершинами $(\pm\sqrt{2}/3, 2/9)$, $(\pm\sqrt{2}/3, 1)$. Иначе говоря, в неравенстве (3.6) на этих P и D достигается равенство. Обе части (4.3) равны 11/8, поэтому $\xi(S; D) = \xi(S; G) = 11/8$ (см. доказательство теоремы 3.1).

4.5. Пусть $\Omega = Q_n$, $\Pi = \Pi_{(1,\ldots,1)}(\mathbb{R}^n)$, $d = 2^n$. Из одномерного варианта следует, что $\theta\left(\Pi_{(1,\ldots,1)}(\mathbb{R}^n); Q_n\right) = 1$, а интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами Q_n, является минимальным. Тем самым, (3.1) принимает вид

$$\max_{D \subset G} \sum_{i=1}^{d-1} \frac{a_i(D)}{\delta_i^D(G)} \le 1. \tag{4.4}$$

Покажем, что при $n = 2$ в (4.4) имеет место равенство. В этом случае $d - 1 = 3$. Трёхмерное множество $F(Q_2) = \{(x_1, x_2, x_1 x_2) : 0 \le x_1, x_2 \le 1\}$ представляет собой часть гиперболического параболоида $y_3 = y_1 y_2$, содержащуюся в Q_3. Как отмечено в [2], $F(Q_2)$ содержится и в симплексе T с вершинами $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$,

$(1,1,1)$. Каждая из этих точек принадлежит $F(Q_2)$. Из соображений выпуклости $G = \mathrm{conv}(F(Q_2)) = T$. Пусть D^* — любой из четырёх максимальных "угловых" параллелепипедов, содержащихся в T. Одна из вершин D^* совпадает с вершиной T, исходящие из неё рёбра D^* направлены по рёбрам T, а длина каждого из этих рёбер D^* составляет 1/3 длины соответствующего ребра T. Имеем:

$$\frac{a_1(D^*)}{\delta_1^{D^*}(G)} + \frac{a_2(D^*)}{\delta_2^{D^*}(G)} + \frac{a_3(D^*)}{\delta_3^{D^*}(G)} = \frac{a_1(D^*)}{\delta_1^{D^*}(T)} + \frac{a_2(D^*)}{\delta_2^{D^*}(T)} + \frac{a_3(D^*)}{\delta_3^{D^*}(T)} = 1.$$

Поэтому максимум в левой части (4.4) равен 1.

Список литературы

1. Невский М. В. Геометрические методы в задаче о минимальном проекторе // Модел. и анализ информ. систем. 2006. Т. 13, № 2. С. 16 – 29.

2. Невский М. В. Неравенства для норм интерполяционных проекторов // Модел. и анализ информ. систем. 2008. Т. 15, № 3. С. 28 – 37.

3. Невский М. В. Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора // Модел. и анализ информ. систем. 2009. Т. 16, № 1. С. 24 – 43.

4. Невский М. В. Об одном свойстве n-мерного симплекса // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 580 – 593.

5. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.

Geometric Estimates in the Polynomial Interpolation

Nevskii M. V.

Keywords: functions of n variables, polynomial interpolation, projection, norm, homothety

We prove some new inequalities for the norms of projections due to the polynomial interpolation of continuous functions of n variables.

Сведения об авторе:
Невский Михаил Викторович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
кандидат физико-математических наук, доцент,
декан математического факультета