Модел. и анализ информ. систем. Т.**18**, №**1** (2011) 149–154

УДК 517.9

О работе семинара «Нелинейная динамика»

В 2010 году в рамках научно-образовательного центра «Нелинейная динамика» продолжил работу научный семинар, посвященный исследованиям поведения, а также методам анализа динамических систем. За прошедший учебный год на нем было заслушано более тридцати сообщений по тематике исследований научно-образовательного центра. Ниже представлены тезисы наиболее интересных докладов, прозвучавших на семинаре.

Кащенко И. С. Асимптотические методы исследования уравнений с малой диффузией. Рассматривается система нелинейных уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_0 + \mu A_1)u + F(u), \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \tag{1}$$

Здесь $u \in R^n$, $0 < \varepsilon$, $\mu \ll 1$ матрица D имеет собственные значения с положительной вещественной частью, а нелинейная вектор-функция $F(u)$ достаточно гладкая. В работе [1] изучается вопрос о поведении всех решений (1) с начальными условиями из некоторой достаточно малой (в метрике $C_{[0,2\pi]}(R^n)$), но не зависящей от ε и μ, окрестности нулевого состояния равновесия.

Мы рассмотрим случай, когда матрица A_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$ $(\omega > 0)$, а все остальные её собственные значения и все собственные значения $A(z) = A_0 - zD$ при $z > 0$ имеют отрицательные вещественные части. Примем обозначение: пусть $A_0 a = i\omega a$, $A_0^* b = -i\omega b$, выполнены условия нормировки $(a, b) = 1$ и невырожденности $(Da, b) > 0$. Наконец, пусть между малыми параметрами ε и μ выполняется соотношение $\mu = c\varepsilon^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$.

Выберем произвольное положительное γ. Положим $\beta = \frac{1}{2}(1 - \alpha)$. Обозначим через $\Theta_\gamma = \Theta_\gamma(\varepsilon)$ такое значение из полуинтервала $[0, 1)$, что $\gamma\varepsilon^{-\beta} + \Theta_\gamma$ является целым. Тогда поведение решений из некоторой части окрестности нулевого состояния равновесия определяется динамикой следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \gamma^2 (Da, b)\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + c(A_1 a, b)\xi + \sigma|\xi|^2\xi, \quad \xi(\tau, y + 2\pi) \equiv \xi(\tau, y). \tag{2}$$

Здесь σ — некоторая константа, определяющаяся функцией $F(u)$.

Теорема. *Пусть краевая задача (2) имеет определенное при всех $\tau \geq 0$ ограниченное решение $\xi_0(\tau, y)$. Тогда краевая задача (1) имеет при $t \geq 0$ асимптотическое по невязке решение*

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{\alpha/2}\left[a\xi_0(\tau, y)\exp(i\omega t) + \bar{a}\bar{\xi}_0(\tau, y)\exp(-i\omega t)\right] + O(\varepsilon^\alpha),$$

где $\tau = \varepsilon^\alpha t$, $y = (\gamma\varepsilon^{-\beta} + \Theta_\gamma)x$.

1. Кащенко И. С. Мультистабильность в нелинейных параболических системах с малой диффузией // Доклады Академии Наук. 2010. Т. 435, № 2. С. 164–167.

Нестеров П.Н. О собственных значениях одномерного оператора Дирака с колебательно убывающим потенциалом. В докладе исследуется вопрос о существовании собственных значений на непрерывном спектре (вложенные собственные значения) у одномерного оператора Дирака

$$Dy = B\frac{dy}{dx} + U(x)y = \lambda y, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad x \geq 0, \tag{1}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_2(x) & -u_1(x) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

действующего в пространстве $L_2\big((0,\infty), \mathbb{C}^2\big)$. Элементами потенциала $U(x)$ являются колебательно убывающие функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$:

$$u_1(x) = -\frac{Q(x)}{(x+1)^{\beta}}, \qquad u_2(x) = \frac{P(x)}{(x+1)^{\alpha}}. \tag{3}$$

Здесь $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, а действительные функции $P(x)$ и $Q(x)$ являются или периодическими с периодом $T > 0$, или тригонометрическими многочленами

$$P(x) = \sum_{j=-N}^{N} p_j e^{\mathrm{i}\omega_j x}, \qquad Q(x) = \sum_{j=-M}^{M} q_j e^{\mathrm{i}\nu_j x}, \tag{4}$$

где $p_j, q_j \in \mathbb{C}$ и $\omega_j, \nu_j \in \mathbb{R}$.

Основным аппаратом, используемым для изучения задачи (1)–(4), является техника асимптотического интегрирования линейных систем дифференциальных уравнений с применением усредняющих замен переменных [1].

1. *Нестеров П.Н.* Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №6. С. 731–742.

Глазков Д.В. Локальная динамика уравнения с сильно запаздывающей обратной связью. Рассматривается модельная задача управления поведением некоторой динамической системы в окрестности ее нулевого решения с помощью запаздывающей обратной связи. Объектом изучения является комплексное уравнение [1-3]

$$\frac{dz}{ds} = (\nu + i\omega)z - Ke^{-i\varphi}\big[\, z - z(s-h)\big] + F(z), \tag{1}$$

где нелинейность $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = F_2(z) + F_3(z) + \ldots = c_{20}z^2 + c_{11}|z|^2 + c_{02}\bar{z}^2 + c_{30}z^3 + c_{21}|z|^2 z + c_{12}|z|^2\bar{z} + c_{03}\bar{z}^3 + \ldots,$$

c_{kl} – комплексные коэффициенты, величины K и φ трактуются как управляющие параметры. В отсутствие слагаемого с запаздыванием при K=0 нулевое решение задачи (1) является фокусом, устойчивость которого определяется знаком величины ν. Отметим, что параметры K≥0 и $-\varphi$ можно рассматривать как модуль и аргумент комплексного коэффициента $Ke^{-i\varphi}$.

Теорема 1. *Пусть* $\nu{>}0$, $\varphi{\neq}\pi{+}2\pi n$, $n{\in}\mathbb{Z}$, *тогда при*

$$0 \le K < \frac{\nu}{1+\cos\varphi}$$

нулевое решение задачи (1) неустойчиво. Пусть $\nu{<}0$, $\varphi{\neq}2\pi n$, $n{\in}\mathbb{Z}$, *тогда при*

$$0 \le K < K_0 = \frac{-\nu}{1-\cos\varphi}$$

нулевое решение задачи (1) устойчиво.

Ставится задача исследования локальной динамики системы (1) в окрестности нулевого решения методом нормальных форм [4]. Рассматривается случай асимптотически большого запаздывания $h{=}1/\varepsilon$.

В результате получаем параболическое уравнение типа Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + d_1 \frac{\partial u}{\partial r} + d_0 u + d\,|u|^2 u, \tag{2}$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r{+}1) = u(\tau, r)\,, \tag{3}$$

где

$$d_2 = \frac{1}{2K_0^2}\,, \quad d_1 = \frac{1{+}i\Omega_1}{K_0^2}\,, \quad d_0 = \frac{K_0K_1(1{-}\,e^{-i\varphi}){+}i\Omega_1{-}\,\Omega_1^2/2}{K_0^2}\,,$$

$$d = \frac{1}{K_0}\left[c_{21} - \frac{2i}{\Omega_0}\Big(|c_{11}|^2{+}\frac{1}{3}|c_{02}|^2\Big)\right].$$

Здесь K_0 определено в теореме 1, а величины Ω_0 и $0{\le}\,\Omega_1{<}\,2\pi$ определяются из соотношений

$$\Omega_0 = \omega + K_0 \sin\varphi, \qquad \frac{\Omega_0}{\varepsilon} + \varphi + \Omega_1 = 0 \mod 2\pi.$$

Полученное нормализованное уравнение связано с исходной задачей следующим образом.

Теорема 2. *Пусть краевая задача (2)–(3) имеет решение* $u{=}u_*(\tau, r)$. *Тогда уравнение (1) имеет быстро осциллирующее асимптотическое по невязке решение*

$$z_*(s) = \varepsilon e^{i\,[\Omega_0+\Omega_1\varepsilon+o(\varepsilon)]s} u_*\big(\varepsilon s, (\varepsilon{+}o(\varepsilon))s\big) + o(\varepsilon). \tag{4}$$

1. *Schikora, S. [et al.]* All-Optical Noninvasive Control of Unstable Steady States in a Semiconductor Laser // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97, 213902. P. 1–4.
2. *Глазков Д.В.* Особенности динамики модели Ланга–Кобаяши в одном критическом случае // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, №2. С. 36–45.
3. *Yanchuk S. [et al.]* Control of unstable steady states by long delay feedback // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74, 026201. P. 1–7.
4. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, №2. С. 262–270.

Кубышкин Е.П., Хребтюгова О.А. Некоторые вопросы теории колебаний балки Тимошенко. Математическая модель поперечных колебаний балки, предложенная С.П. Тимошенко [1] и получившая название балки Тимошенко, является развитием известной модели поперечных колебаний балки Эйлера–Бернулли. Согласно расчетной схеме этой модели плоские сечения балки, до деформации нормальные к ее оси, остаются плоскими и после изгиба, но перестают быть нормальными к ее изогнутой оси. Учитывается инерция вращения сечения и его сдвиговая деформация. Таким образом, положение каждого сечения деформируемой балки определяется двумя независимыми величинами: поперечным смещением и углом поворота сечения.

Модель однородной балки Тимошенко постоянного сечения в безразмерных величинах описывается следующей системой уравнений в частных производных:

$$\varepsilon y_{tt} - \gamma(y_{xx} - \phi_x) = 0, \tag{1}$$

$$\varepsilon^2 \phi_{tt} - \varepsilon \phi_{xx} - \gamma(y_x - \phi) = 0, \tag{2}$$

где $y(x,t)$, $\phi(x,t)$ – смещение балки в направлении, перпендикулярном оси балки в положении покоя, и угол поворота поперечного сечения балки в точке x в момент времени t; $\varepsilon = J/(Sl^2)$, $\gamma = æ/[2(1+\nu)]$, размерное время $t' = [EJ/(\rho S)]^{1/2}/l^2 t$. Здесь ρ – линейная плотность балки, S – площадь поперечного сечения балки, l – длина балки, J – момент инерции сечения балки относительно оси вращения, E – модуль упругости Юнга, ν – коэффициент Пуассона, æ – коэффициент, зависящий от характера распределения сдвигов по сечению. Для квадратного сечения он равен 2/3 [1].

Считаем, что один конец балки защемлен, а второй свободен. Тогда краевые условия имеют вид

$$y(0,t) = \phi(0,t) = 0, \quad y_x(1,t) - \phi(1,t) = 0, \quad \phi_x(1,t) = 0. \tag{3}$$

Для рассматриваемой балки изучим связь между частотами колебаний балки Тимошенко и балки Эйлера-Бернулли. Из уравнения (1) имеем $\phi_{xxx} = y_{xxxx} - \gamma^{-1}\varepsilon y_{xxtt}$, $\phi_{xtt} = y_{xxtt} - \gamma^{-1}\varepsilon y_{tttt}$, $y_{xx} - \phi_x = \gamma^{-1}\varepsilon y_{tt}$. Подставим эти выражения в уравнение (2), предварительно продифференцировав его по x. В результате получим дифференциальное уравнение для определения $y(x,t)$

$$y_{xxxx} + y_{tt} - \varepsilon(1+\gamma^{-1})y_{xxtt} + \varepsilon^2\gamma^{-1}y_{tttt} = 0, \tag{4}$$

которое дополним в соответствии с (3) краевыми условиями

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0, \quad y_{xx}(1,t) = y_{xxx}(1,t) = 0. \tag{5}$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (4) превращается в уравнение Эйлера–Бернулли, частотами собственных колебаний которого будут величины $\omega_n = \beta_n^2$, где β_n положительный корень характеристического уравнения $\cos\beta\,\mathrm{ch}\,\beta = -1$, а соответствующие собственные формы имеют вид $u_n(x) = \tilde{u}_n(x)/\parallel \tilde{u}_n(x) \parallel_{L_2}$, где $\tilde{u}_n(x) = (\mathrm{sh}\,\beta_n + \sin\beta_n)(\mathrm{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)) - (\mathrm{ch}\,\beta_n + \cos\beta_n)(\mathrm{sh}(\beta_n x) - \sin(\beta_n x))$.

Будем искать частоты колебаний $\omega_n(\varepsilon)$ и формы колебаний $u_n(x,\varepsilon)$ краевой задачи (4)–(5) в виде рядов

$$\omega_n(\varepsilon) = \omega_n + \varepsilon\omega_{n1} + \varepsilon^2\omega_{n2} + \ldots, \quad u_n(x,\varepsilon) = u_n(x) + \varepsilon u_{n1}(x) + \varepsilon^2 u_{n2}(x) + \ldots \tag{6}$$

Подставим $y_n(x,t;\varepsilon) = u_n(x,\varepsilon)\exp(i\omega(\varepsilon)t)$ $(i = \sqrt{-1})$ в (4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате получим рекуррентную последовательность краевых задач вида

$$u''''_{nj} - \omega_n^2 u_{nj} = 2\omega_n\omega_{nj}u_n(x) + f_{nj}(x), \tag{7}$$

$$u_{nj}(0) = u'_{nj}(0) = 0, \quad u''_{nj}(1) = u'''_{nj}(1) = 0 \tag{8}$$

для определения $u_{nj}(x)$ и ω_{nj}. В (7) $f_{nj}(x)$ – известная функция, определяемая $u_{ns}(x)$, ω_{ns} ($s = 1, \ldots, j-1$).

Условие разрешимости краевой задачи (7)–(8) позволяет однозначно определить

$$\omega_{nj} = -(f_{nj}(x), u_n(x))/(2\omega_n). \tag{9}$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в $L_2(0,1)$. Решение $u_{nj}(x)$ краевой задачи (7)–(8) при условии (9) определяется неоднозначно, а с точностью до функции $\alpha u_n(x)$. Дополнительное условие $(u_{nj}(x), u_n(x)) = 0$ позволяет однозначно определить $u_{nj}(x)$. При выполнении этого условия ряды (6) будут сходящимися при малых ε. При этом $f_{n1}(x) = -(1+\gamma^{-1})\omega_n^2 u''_n(x)$ и $\omega_{11} = 1.508$, $\omega_{21} = -1.464 \cdot 10^2$, $\omega_{31} = -1.416 \cdot 10^3$, $\omega_{41} = -5.976 \cdot 10^3$, $\omega_{51} = -1.714 \cdot 10^4$. Таким образом, первая частота (6) возрастает, а последующие убывают. Отметим, что краевая задача (4)–(5) имеет также высокочастотные колебания с частотами $\sim 1/\varepsilon$.

1. *Тимошенко С.П.* Курс теории упругости. Киев: Изд-во Наукова Думка, 1972. 501 с.

Глызин С. Д. Особенности динамики одного уравнения с двумя запаздываниями. Моделирование электрической активности нервных клеток связано обычно с тем или иным способом учета транспорта ионов через клеточную мембрану. В статье [1] предложена феноменологическая модель

$$\dot{u} = \lambda\big[-1 - f_{\mathrm{Na}}(u) + f_{\mathrm{K}}(u(t-1))\big]u, \tag{1}$$

учитывающая калиевые и натриевые ионные насосы. Здесь $u(t)$ – нормированный мембранный потенциал, параметр λ пропорционален скорости протекания процессов в клетке, единица измерения времени выбрана равной запаздыванию в калиевом канале. Функции $f_{\mathrm{K}}(u) = \alpha f(u)$, $f_{\mathrm{Na}}(u) = \beta g(u)$, характеризующие прохождение ионов Na^+ и K^+ через мембрану, предполагаются достаточно гладкими и удовлетворяющими условиям

$$\begin{gathered} f(0) = g(0) = 1, \;\; 0 < \beta\, g(u) + 1 < \alpha \quad \forall\, u \in \mathbb{R}_+; \\ f(u),\; g(u),\; uf'(u),\; ug'(u) = O(1/u) \;\text{ при }\; u \to +\infty. \end{gathered} \tag{2}$$

Уравнение (1) достаточно удачно описывает импульсную активность нейронной клетки и допускает качественное аналитическое исследование методами большого параметра, однако для одиночного уравнения (1) не удается найти значений параметров, при которых его устойчивыми решениями были бы импульсные пакеты, а не единичные импульсы. Исключение составляет задача о диффузионном взаимодействии осцилляторов вида (1), изученная в [2]. Учитывая сказанное, представляется целесообразным модифицировать (1) так, чтобы соответствующая модель обладала решениями типа импульсных пакетов. Простейшим способом модификации (1) является введение запаздывания не только в выражение, отвечающее за транспорт ионов K^+, но и в выражение, моделирующее прохождение клеточной мембраны ионами Na^+. На этом пути получаем модельное уравнение вида

$$\dot{u} = \lambda\big[-1 + \alpha f(u(t-1)) - \beta g(u(t-h))\big]u, \tag{3}$$

где $h > 0$, а функции $f(u)$, $g(u)$ удовлетворяют свойствам (2).

Следует отметить, что электрическая активность нейронных клеток не ограничивается транспортом ионов Na^+ и K^+. Учет двух ионных потоков, переносящих заряд в одном направлении с различными запаздываниями, приводит к уравнению вида

$$\dot{u} = \lambda\big[-1 + \alpha f(u(t-1)) + \beta g(u(t-h))\big]u, \tag{4}$$

где $f(u)$ и $g(u)$ по-прежнему удовлетворяют (2), а $0 < h < 1$.

В статье [3] выполнен локальный анализ (3), (4) при значениях параметров, близких к критическим, при потере устойчивости ненулевого состояния равновесия. Приведенные в [3] результаты численного счета показывают, что в этих задачах могут появляться импульсные пакеты.

Представляет интерес решение следующих трех задач, касающихся динамики уравнений (3), (4):

- Необходимо выполнить анализ (3), (4) методами большого параметра и доказать наличие у этих моделей при $\lambda >> 1$ импульсных пакетов.
- В [3] параметры уравнений (3), (4) выбирались так, чтобы потеря устойчивости ненулевым состоянием равновесия происходила при условии выхода на мнимую ось двух пар корней квазимногочлена устойчивости. В свою очередь импульсные пакеты были получены численно при увеличении параметра λ и сохранении значений остальных параметров прежними. Остается не изученной задача о характере фазовых перестроек, приводящих к устойчивым решениям типа импульсных пакетов.
- Отметим также важную задачу о коллективной динамике ассоциаций нейроподобных осцилляторов вида (3), (4) с различными типами связей.

1. *Майоров В. В., Мышкин И. Ю.* Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, № 11. С. 64–76.

2. *Глызин С. Д., Киселева Е. О.* Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, № 2. С. 75–88.

3. *Глызин С. Д., Овсянникова Е. О.* Двухчастотные колебания обобщенного уравнения импульсного нейрона с двумя запаздываниями // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. - Т. 18, № 1. С. 82–98.