

УДК 517.51+514.17

О тензорных квадратах неприводимых представлений конечных почти простых групп. II

Поляков С.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: SVPUniyar@yandex.ru

получена 22 января 2010

Ключевые слова: SR-группы, SM_m -группы, почти простые группы, автоморфизмы простых групп, GAP

Изучаются конечные почти простые SM_m -группы. Основной результат статьи: если G — конечная почти простая группа, принадлежащая классу SM_2 -групп, то $G \cong PGL_2(q)$.

Введение

Цель данной работы — изучение конечных почти простых групп, у которых каждое неприводимое представление разлагается в сумму неприводимых представлений группы с небольшими кратностями. Напомним определение, данное в первой части статьи.

Определение 1. Конечная группа G называется SM_m -группой, если тензорный квадрат любого неприводимого представления разлагается в сумму неприводимых представлений группы G с кратностями, не превосходящими m .

В первой части работы [11] были рассмотрены конечные простые неабелевы группы. Для каждой такой группы L были получены оценки числа r такого, что L — не SM_r -группа. Кроме того, с помощью системы компьютерной алгебры GAP были получены результаты для некоторых простых групп лиева типа, знакопеременных групп и всех спорадических групп с их группами автоморфизмов о том, к какому SM_m классу они принадлежат.

Также в первой части были получены неравенства, связывающие порядок SM_m -группы G , ее классовое число $k(G)$ и степень ее неприводимого характера χ : если G — конечная SM_m -группа, то:

- 1) $\chi(1) \leq mk(G)$,
- 2) $|G| \leq m^2 k(G)^3$,
- 3) если G — неразрешимая группа, то $\chi(1) \leq mk(G) - m$.

Основное внимание было уделено конечным простым неабелевым SM_2 -группам. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы:

Теорема 1. Среди конечных простых групп к SM_2 -группам относятся только линейные группы $L_2(q)$, $q = 2^t$, $t \geq 2$.

Во второй части рассматриваются конечные почти простые группы, у которых цоколь L — простая неабелева группа. Основной результат статьи — теорема:

Теорема 2. Если G — конечная почти простая SM_2 -группа, то $G \cong PGL_2(q)$.

Для доказательства теоремы 2 используются оценки числа $m = \chi(1)/(k(L) - 1)$, полученные в первой части работы. Если $L \cong L_3(q)$ или $U_3(q)$, то нам понадобится дополнительная информация о степенях и кратностях некоторых неприводимых характеров этих групп. Соответствующие результаты рассмотрены в леммах 1 и 2. В леммах 3, 4, 5, 6 выполняется проверка на принадлежность к классу SM_2 почти простых групп с цоклем L , где L — простая классическая или исключительная группа лиева типа, знакопеременная или спорадическая группа.

Вспомогательные результаты

При доказательстве теоремы 2 нам будет необходимо знать порядок $|\text{Out}(L)|$. Мы будем пользоваться известными результатами из [1], с. 491 и [3]. Также полезным оказывается следующий важный результат:

Предложение 1. (см. [2]). Пусть G — группа и H — ее подгруппа. Тогда

$$k(H)/|G : H| \leq k(G) \leq |G : H|k(H).$$

Если H — нормальная подгруппа G , то $k(G) \leq k(H)k(G/H)$.

Далее нам понадобится дополнительная информация о степени характера Стейнберга St , классовом числе и порядке $|\text{Out}(L)|$ для некоторых групп $L_n(q)$, $U_n(q)$, $B_n(q)$ и $C_n(q)$. Эти значения также получены из [3] и с помощью GAP.

Таблица 1. Значения $k(L)$, $St(1)$, $|\text{Out}(L)|$ для некоторых групп $L_n(q)$

L	$L_3(2)$	$L_3(3)$	$L_3(4)$	$L_3(5)$	$L_3(7)$	$L_3(8)$	$L_3(9)$
$k(L)$	6	12	10	30	22	72	90
$St(1)$	8	27	64	125	343	512	729
$ \text{Out}(L) $	2	2	12	2	6	6	4
L	$L_3(11)$	$L_3(13)$	$L_3(16)$	$L_3(17)$	$L_3(19)$	$L_3(25)$	$L_3(32)$
$k(L)$	132	64	94	306	130	220	1056
$St(1)$	1331	2197	4096	4913	6859	15625	32768
$ \text{Out}(L) $	2	6	24	2	6	12	10
L	$L_3(64)$	$L_4(2)$	$L_4(3)$	$L_4(4)$	$L_4(5)$	$L_5(2)$	$L_7(2)$
$k(L)$	1390	14	29	84	49	27	117
$St(1)$	262144	64	729	4096	15625	1024	2^{21}
$ \text{Out}(L) $	36	2	4	4	8	2	2

Таблица 2. Значения $k(L)$, $St(1)$, $|Out(L)|$ для некоторых групп $U_n(q)$

L	$U_3(3)$	$U_3(4)$	$U_3(5)$	$U_3(7)$	$U_3(8)$	$U_3(9)$	$U_3(11)$	$U_3(16)$
$k(L)$	14	22	14	58	28	92	48	274
$St(1)$	27	64	125	343	512	729	1331	4096
$ Out(L) $	2	4	6	2	18	4	6	8
L	$U_3(17)$	$U_3(23)$	$U_3(32)$	$U_3(128)$	$U_4(2)$	$U_4(3)$	$U_5(2)$	$U_7(2)$
$k(L)$	106	188	356	5508	20	20	47	239
$St(1)$	4913	12167	32768	2^{21}	64	729	1024	2^{21}
$ Out(L) $	6	6	30	42	2	8	4	2

Таблица 3. Значения $St(1)$, $k(L)$, $|Out(L)|$ для некоторых групп $B_n(q)$, $C_n(q)$

L	$B_2(2)'$	$B_2(3)$	$B_2(4)$	$B_2(5)$	$B_2(7)$	$B_2(8)$	$B_2(9)$
$k(L)$	7	20	27	34	52	83	74
$St(1)$	9	81	256	625	2401	4096	6561
$ Out(L) $	2	2	4	2	2	6	4
L	$B_2(11)$	$B_2(16)$	$B_3(2)$	$B_3(3)$	$C_3(3)$	$B_4(2)$	
$k(L)$	100	291	30	98	74	81	
$St(1)$	14641	65536	512	19683	19683	65536	
$ Out(L) $	2	8	1	2	2	1	

При доказательстве леммы 5 будут использоваться результат о степени неприводимого характера простой группы, а также оценка числа разбиений $p(n)$.

Предложение 2. (см. [6]). Пусть G — простая неабелева группа. Тогда существует такой комплексный неприводимый характер χ этой группы, что $|G|$ меньше $\chi(1)^3$.

Предложение 3. (см. [9]). Если $n > 12$, то $p(n) < c \cdot (3/2)^n$, где $c = (2 \cdot \sqrt{3})^{-1/2}$.

Таблица 4. Значения $p(n)$ для $7 \leq n \leq 12$

n	7	8	9	10	11	12
$p(n)$	15	22	30	42	56	77

Некоторые характеры групп $L_3(q)$ и $U_3(q)$

Необходимая нам информация о характерах χ_{st} , χ_{r^2s} группы $L_3(q)$ вычислена по таблице характеров из [8]. Здесь мы будем использовать следующие обозначения: C_i — семейство классов сопряжённых элементов, $N(C_i)$ — количество классов в семействе C_i , а $|C_i|$ — размер каждого из этих классов.

Таблица 5. Значения характеров χ_{st} , χ_{r^2s} группы $L_3(q)$, $q > 4$

	C_1	C_2	$C_3^{(l)}$	$C_4^{(k)}$	$C_5^{(k)}$	C_6'	$C_6^{(k,l,m)}$	$C_7^{(k)}$	$C_8^{(k)}$
$ C_i $	1	rst	$qr'rst$	q^2t	q^2rst	q^3st'	q^3st	q^3rt	q^3r^2s
χ_{st}	st	$q + s$	1	B	A	C	D	0	0
χ_{r^2s}	r^2s	$-r$	1	0	0	0	0	0	$E_{u,k}$
$N(C_i)$	1	1	d	$r' - 1$	$r' - 1$	$1 - d'$	$t'' - r''$	$3t'' - r'' - d'$	$2t''$

где $r = q-1$, $s = q+1$, $t = q^2+q+1$, $d = (n, r)$, $r' = r/d$, $s' = s/d$, $t' = t/d$, $d' = (3-d)/2$, $t'' = (t' - 1)/6$, $A = \epsilon^{-3uk} + \epsilon^{-3vk} + \epsilon^{-3wk}$, $B = sA$, $C = 3A$, $D = \sum_{[u,v,w]} \epsilon^{uk+lv+mw}$, $\epsilon^r = 1$, $E_{u,k} = \gamma^{uk} + \gamma^{qk} + \gamma^{q^2uk}$, $\gamma^{dt} = 1$.

Лемма 1. Пусть χ_{st} , χ_{r^2s} — два неприводимых характера группы $L_3(q)$, $q > 4$ степеней $(q+1)(q^2+q+1)$ и $(q-1)^2(q+1)$ соответственно. Тогда $[\chi_{st}^2, \chi_{r^2s}] = d(q+3)$.

Доказательство. Вычислим скалярное произведение $[\chi_{st}^2, \chi_{r^2s}]$:

$$\begin{aligned} [\chi_{st}^2, \chi_{r^2s}] &= \frac{1}{|G|} \left(s^2 t^2 r^2 s - (q+s)^2 r^2 s t + q r' r s t d \right) = \frac{r^2 s t}{q^3 r' r s t} \left(s^2 t - (q+s)^2 + q \right) = \\ &= \frac{d}{q^3} \left(s^2 t - q^2 - 2qs - s^2 + q \right) = \frac{d}{q^3} \left(s^2 (t-1) - q^2 + q(1-2s) \right) = \\ &= \frac{d}{q^2} \left(s^2 (q+1) - 2s + 1 \right) = \frac{d}{q^2} \left(q(s^2 - 1) + (s-1)^2 \right) = d(s+2) = d(q+3). \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Приведем значения характеров χ_{rt} и χ_{r^2s} для групп $U_3(q)$. В дальнейшем нам понадобятся группы $U_3(q)$ где $q = p^2 > 2$. Как несложно убедиться, наибольший общий делитель $d = (q+1, 3)$ в этом случае равен 1. Действительно, число p при делении на 3 дает остаток 0, 1 или 2, тогда $p^2 + 1$ дает в остатке 1, 2 или 2 соответственно, поэтому $p^2 + 1$ не делится на 3.

Таблица характеров из [8] будет выглядеть так:

Таблица 6. Значения характеров χ_{rt}, χ_{r^2s} группы $U_3(q), q = p^2 > 2$

	C_1	C_2	$C_3^{(l)}$	$C_4^{(k)}$	$C_5^{(k)}$	C_6'	$C_6^{(k,l,m)}$	$C_7^{(k)}$	$C_8^{(k)}$
$ C_i $	1	rst	qr^2st	q^2t	q^2rst	q^3st	q^3st	q^3rt	q^3r^2s
χ_{rt}	rt	1	1	b	a	0	0	b	0
χ_{r^2s}	r^2s	$-r$	-1	0	0	0	0	0	$-E_{u,k}$
$N(C_i)$	1	1	d	$r' - 1$	$r' - 1$	$1 - d'$	$t'' - r''$	$3t'' - r'' - d'$	$2t''$

где $a = \epsilon^{3uk}$, $b = -rA$.

Лемма 2. Пусть χ_{rt} , χ_{r^2s} — неприводимые характеры группы $U_3(q)$, $q = p^2 > 2$, степеней $q^3 + 1$ и $(q+1)^2(q-1)$ соответственно. Тогда $[\chi_{r^2s}^2, \chi_{rt}] = q + 2$.

Доказательство. Вычислим рассматриваемое скалярное произведение.

$$\begin{aligned} [\chi_{r^2s}^2, \chi_{rt}] &= \frac{1}{|G|} \left(r^4 s^2 r t + r^2 r s t + q r^2 s t \right) = \frac{r^2 s t}{|G|} \left(r^3 s + r + q \right) = \frac{1}{q^3} \left(r(r^2 s + 1) + q \right) = \\ &= \frac{1}{q^3} \left(r(q^3 + q^2 - q) + q \right) = \frac{1}{q^2} \left(r(q^2 + q - 1) + 1 \right) = \frac{1}{q^2} \left(q^3 + 2q^2 \right) = q + 2. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Почти простые группы

Определение 2. Пусть L — простая неабелева группа. Группа G называется почти простой, если $L \leq G \leq \text{Aut}(L)$.

Доказательство теоремы 2 мы начнем со случая, когда L — простая группа лиева типа. В первой части работы [11] были получены оценки числа $m(L) > \chi(1)/k(L)$, такого, что L — не $\text{SM}_{m(L)}$ -группа. В качестве характера χ был выбран характер Стейнберга St . Значение степени этого характера хорошо известно, и, кроме того, в указанных группах L не существует другого неприводимого характера такой же степени. Это означает, что в любой почти простой группе G : $L \leq G \leq \text{Aut}(L)$ найдется неприводимый характер ψ , такой, что $\psi(1) \geq St(1)$.

Далее, по предложению 1, $k(G) \leq k(L)|G : L|$, и, в частности, $k(\text{Aut}(L)) \leq k(L)|\text{Out}(L)|$. Теперь, если ψ_0 — характер наибольшей степени группы G , то мы можем оценить число $m(G)$ такое, что G — не $\text{SM}_{m(G)}$ -группа:

$$m(G) = \frac{\psi_0(1)}{k(G) - 1} > \frac{St(1)}{k(G)} \geq \frac{St(1)}{k(L)|G : L|} \geq \frac{m(L)}{|\text{Out}(L)|}.$$

Заметим, что для числа $m(G)$ выполняется неравенство: $m(L) \leq m(G) \leq m(\text{Aut}(L))$.

В дальнейшем нам также придется использовать характеры группы L степени большей, чем $St(1)$. Покажем, что если χ_0 — неприводимый характер группы L , имеющий наибольшую степень, то в группе G найдется характер ψ , такой, что $\psi(1) \geq \chi_0(1)$.

Согласно теории Клиффорда (см. например, [7], глава 6) $\chi_0^G = \sum_{i=1}^k e_i \psi_i$, где $\psi_i \in \text{Irr}(G)$. Тогда, по закону взаимности Фробениуса, скалярное произведение $[\psi_i|_L, \chi_0]_L = [\psi_i, \chi_0^G]_G = e_i \neq 0$, для некоторого i . Это означает, что характер $\psi_i|_L$ раскладывается в сумму $\psi_i|_L = e\chi_0 + \theta$, где $e \geq 1$, а θ — сумма остальных характеров в этом разложении. Теперь, обозначив $\psi = \psi_i$, мы получаем $\psi(1) = \chi_i|_L(1) = e\psi(1) + \theta(1) \geq \chi(1)$.

Классические простые группы лиева типа

Лемма 3. Пусть G — конечная почти простая SM_2 -группа с цоколем L , изоморфным классической простой группе лиева типа. Тогда $G \cong \text{PGL}_2(q)$.

Доказательство. Разобьем доказательство на отдельные случаи.

Группы $L_2(q)$

Так как $L_2(q) \cong U_2(q)$, то и почти простые группы для них будут изоморфными.

Ранее нами было доказано (см. [12]), что, если G — почти простая SM_2 -группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$, то $G \cong \text{PGL}_2(q)$. Этот результат относится и к почти простым группам с цоколем $A_6 \cong L_2(9)$. Как будет показано далее, SM_2 -группой в этом случае будет только группа $\text{PGL}_2(9)$.

Группы $L_n(p^t)$, $n \geq 3$

Пусть $L \cong L_n(p^t)$, $n \geq 3$. Для $2 < n \leq 6$ верна оценка $m(L) > p^{t(n-1)(n-2)/2}/2$ (см. [11]), поэтому

$$m(G) \geq \frac{m(L)}{|\text{Out}(L)|} > \frac{p^{t(n-1)(n-2)/2}}{2|\text{Out}(L)|}.$$

Пусть $n = 3$. Тогда $|\text{Out}(L)| = 2(p^t - 1, 3)t \leq 6t$, и для $m(G)$ получается неравенство $m(G) > p^t/12t$. Условие $m(G) > 2$ записывается в виде $p^t > 24t$.

При $t = 1$ это неравенство выполняется для $p > 24$. То есть для дополнительной проверки понадобится рассмотреть случаи $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$.

При $t = 2$ получаем $p^2 > 48$, что неверно для $p = 2, 3, 5$.

При $t = 3, 4$ из неравенства $p^t > 24t$ следует, что требуется проверка для $p = 2, 3$.

Если $t = 5, 6, 7$, то неравенство $p^t > 24t$ верно для $p > 2$. Поэтому требуется проверка для $p = 2$.

При $t > 7$ неравенство $p^t > 24t$ выполняется для всех $p > 1$.

Пусть $n = 4$. Тогда $|\text{Out}(L)| = 2(p^t - 1, 4)t \leq 8t$. Условие $m(G) > 2$ запишется как $p^{3t} > 32t$. При $t = 1$ из неравенства $p^3 > 32$ заключаем, что требуется проверка для $p = 2, 3$. Если $t = 2$, то из неравенства $p^6 > 64$ следует, что требуется проверка для $p = 2$. При $t > 2$ неравенство $p^{3t} > 32t$ выполняется для всех $p > 1$.

Если $n = 5$, то $|\text{Out}(L)| = 2(p^t - 1, 5)t \leq 10t$, и условие $m(G) > 2$ записывается как $p^{6t} > 40t$. Это неравенство выполняется для любых $p > 1$.

Если $n = 6$, то $|\text{Out}(L)| = 2(p^t - 1, 6)t \leq 12t$, и условие $m(G) > 2$ записывается как $p^{10t} > 48t$. Это неравенство также выполняется для любых $p > 1$.

Для последующей проверки остаются случаи, когда L — одна из групп:

для $t = 1$: $L_3(3)$, $L_3(5)$, $L_3(7)$, $L_3(11)$, $L_3(13)$, $L_3(17)$, $L_3(19)$, $L_3(23)$, $L_4(2)$, $L_4(3)$,

для $t = 2$: $L_3(4)$, $L_3(9)$, $L_3(25)$, $L_4(4)$, для $t = 3$: $L_3(8)$, $L_3(27)$,

для $t = 4$: $L_3(16)$, $L_3(81)$, для $t = 5$: $L_3(32)$, для $t = 6$: $L_3(64)$, для $t = 7$: $L_3(128)$.

Вычислим для этих групп порядок $|\text{Out}(L)| = 2(p^t - 1, n)t$ и проверим выполнение неравенства $m(G) > 2$: $p^{t(n-1)(n-2)/2} > 4|\text{Out}(L)| = 8(p^t - 1, n)t$. В результате из списка исключаются группы: $L_3(11)$, $L_3(17)$, $L_3(23)$, $L_3(27)$, $L_3(81)$, $L_3(128)$.

Для проверки оставшихся групп обратимся к таблице 1 и оценим

$$m(G) > \frac{St(1)}{k(L)|\text{Out}(L)|}.$$

Проверив условие $m(G) > 2$, приходим к выводу, что для последующей проверки остаются группы: $L_3(2)$, $L_3(3)$, $L_3(4)$, $L_3(8)$, $L_3(16)$.

Пусть $L \cong L_3(2) \cong L_2(7)$. Поскольку $|\text{Out}(L)| = 2$, то почти простыми в этом случае будут только группы L и $\text{Aut}(L) \cong PGL_2(7)$. Нам уже известно (см. [12]), что $L_3(2)$ — SM_3 , а $PGL_2(7)$ — SM_2 -группа.

Пусть $L \cong L_3(3)$. Здесь также $|\text{Out}(L)| = 2$, а значит, почти простыми в этом случае будут только группы L и $\text{Aut}(L)$. В GAP получаем, что $L_3(3)$ — SM_{11} , а $\text{Aut}(L_3(3))$ — SM_{12} .

Пусть $L \cong L_3(4)$. Для этой группы $|\text{Out}(L)| = 12$. Группа автоморфизмов $\text{Aut}(L)$ представляет собой расширение L диэдральной группой D_{12} [3]. Почти простыми

группами здесь будут группы вида $L \cdot H$, где $H \leq D_{12}$. Перечислим эти группы. Во-первых, это сама группа L , затем 3 расширения $L \cdot C_2$, одна из этих групп — $P\Sigma L_3(4)$, группа $PGL_3(4) \cong L \rtimes C_3$, две группы $L \cdot S_3$, одна из которых $P\Gamma L_3(4)$, группа $L \cdot (C_2 \times C_2)$, группа $L \cdot C_6$ и, наконец, $\text{Aut}(L) \cong L \cdot D_{12}$.

Для групп $L_3(4)$, $PGL_3(4)$ и $\text{Aut}(L_3(4))$ в GAP было получены следующие результаты: $L_3(4)$ — SM₁₃, $PGL_3(4)$ — SM₂₂ и $\text{Aut}(L_3(4))$ — SM₆₅. Для оставшихся почти простых групп можно использовать оценку $m(G) \geq m(L)/c$, где c — индекс $L_3(4)$ в некотором расширении. Несложно увидеть, что таких групп число $m(G)$ всегда больше 2.

Пусть $L \cong L_3(8)$. Тогда $|\text{Out}(L)| = 6$, и группа автоморфизмов $\text{Aut}(L)$ имеет строение $L \cdot C_6$. Почти простыми группами здесь будут: L , $L \cdot C_2$, $L \cdot C_3$ и $\text{Aut}(L)$. Так как $m(L) > 7$, то для группы $G \cong L \cdot C_2$ число $m(G) > 3$, а для $G \cong L \cdot C_3$: $m(G) > 2$. Для группы $G \cong \text{Aut}(L_3(8))$ вычислим в GAP: $k(G) = 41$. Тогда $m(G) \geq St(1)/k(G) > 12$.

Пусть $L \cong L_3(16)$, тогда $k(L) = 93$, а $|\text{Out}(L)| = 24$. В группе L выберем характер $\chi = \chi_{rt}$ степени $(16+1)(16^2+16+1) = 4641$. Тогда для любой почти простой группы G мы получаем:

$$m(G) \geq \frac{4641}{93 \cdot 24} > 2.$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $n > 6$. Воспользовавшись полученной в [11] оценкой $m(L) = q^{(n-1)(n-2)/2}/6^{n-1}$, где $q = p^t$, мы получаем условие для $m(G)$:

$$m(G) > \frac{p^{t(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1}|\text{Out}(L)|} = \frac{p^{t(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1} \cdot 2(p^t - 1, n)t}.$$

Если $p > 2$, то

$$m(G) > \frac{3^{t(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1} \cdot 2nt} \geq \frac{3^{(n-1)(t(n-1)/2-1)}}{2^n \cdot nt} \geq \frac{3^{6(5t/2-1)}}{2^7 \cdot 7t} \geq \frac{3^{9t}}{2^7 \cdot 7t} > 21.$$

Пусть $p = 2$. В этом случае

$$m(G) > \frac{2^{t(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1} \cdot 2(2^t - 1, n)t} \geq \frac{2^{t(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1} \cdot 2nt}.$$

Непосредственная проверка показывает, что если $t > 1$ и $n \geq 7$, то $m(G) > 821$. Для $t = 1$ мы получаем, что $m(G) > 8$, если $n \geq 9$. Нам осталось рассмотреть случаи $n = 7, 8$, то есть группы $L_7(2)$ и $L_8(2)$.

Если $L \cong L_7(2)$ или $L_8(2)$, то $|\text{Out}(L)| = 2(2 - 1, n) = 2$. Оценим $m(G)$:

$$m(G) > \frac{St(1)}{k(L)|\text{Out}(L)|} = \frac{St(1)}{2k(L)}.$$

Если $L \cong L_7(2)$, то $k(L) = 117$, а $St(1) = 2^{21}$, поэтому $m(G) > 2^{20}/117 > 8962$.

Если же $L \cong L_8(2)$, то $k(L) = 246$, а $St(1) = 2^{28}$, поэтому $m(G) > 545600$.

Добавим, что с помощью GAP удалось получить точные значения для этих групп: $L_7(2)$ — SM₁₂₄₂₈₆, $L_7(2) \cdot C_2$ — SM₃₇₂₃₁₂, $L_8(2)$ — SM₈₈₂₆₅₈₇-группа.

Группы $U_n(p^t)$

Порядок $|\text{Out}(U_n(p^t))|$ равен $2(p^t + 1, n)t$.

Пусть $L \cong U_n(p^t)$. При $2 < n \leq 6$, за исключением групп $U_4(2)$ и $U_5(2)$, верна оценка $m(L) > p^{t(n-1)(n-2)/2}/2$. Выполним проверку условия $m(G) > 2$ таким же образом, как и для групп $L_n(p^t)$. В результате проверки мы получили, что L может быть одной из групп: $U_3(2)$, $U_3(3)$, $U_3(5)$, $U_3(7)$, $U_3(8)$, $U_3(9)$, $U_3(11)$, $U_3(13)$, $U_3(16)$, $U_3(17)$, $U_3(19)$, $U_3(23)$, $U_3(25)$, $U_3(27)$, $U_3(32)$, $U_3(64)$, $U_3(81)$, $U_3(128)$, $U_4(2)$, $U_4(3)$, $U_4(4)$. Кроме того, остается группа $U_5(2)$.

Вычислим $|\text{Out}(L)|$ для каждой из этих групп и проверим, при каких n и p выполняется неравенство $m(G) > 2$:

$$p^{t(n-1)(n-2)/2} > 4|\text{Out}(L)| = 8(p^t + 1, n)t.$$

После проверки из списка исключаются группы: $U_3(13)$, $U_3(19)$, $U_3(25)$, $U_3(27)$, $U_3(81)$, $U_3(64)$, $U_4(4)$.

Для того, чтобы сократить список оставшихся групп, воспользуемся информацией о классом числе оставшихся групп из таблицы 2 и подставим их в неравенство:

$$m(G) \geq \frac{St(1)}{|\text{Out}(L)|(k(L) - 1)}.$$

После проверки условия $m(G) > 2$ список групп сократится до $U_3(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(8)$, $U_3(16)$, $U_4(2)$, $U_5(2)$. Рассмотрим каждую из этих групп отдельно.

Пусть $L \cong U_3(3) \cong PGU_3(3)$. Тогда $|\text{Out}(L)| = 2$, а значит, почти простыми в этом случае будут только группы $U_3(3)$ и $\text{Aut}(U_3(3))$. С помощью GAP получаем, что $U_3(3) - \text{SM}_5$, $\text{Aut}(U_3(3)) - \text{SM}_{20}$.

Пусть $L \cong U_3(4)$. Тогда G будет одной из групп: L , $L \rtimes C_2$, $\text{Aut}(L) \cong PGU_3(4)$. В GAP получаем, что $U_3(4) - \text{SM}_7$, $U_3(4) \rtimes C_2 - \text{SM}_{26}$, $\text{Aut}(U_3(4)) - \text{SM}_{101}$ -группа.

Пусть $L \cong U_3(5)$. Тогда G будет одной из групп: L , $L \rtimes C_2 \cong PGU_3(5)$, $L \rtimes C_2 \cong P\Sigma U_3(5)$, $\text{Aut}(U_3(3)) \cong PGU_3(5)$. Для этих групп, используя GAP, получаем, что $U_3(5) - \text{SM}_{23}$, $PGU_3(5) - \text{SM}_8$, $PGU_3(5) - \text{SM}_{32}$ -группа. Для группы $G \cong P\Sigma U_3(5)$ подойдет оценка $m(G) \geq m(L)/2 = 125/(13 \cdot 2) > 4$.

Пусть $L \cong U_3(8)$, тогда $|\text{Out}(L)| = 18$. Используем значение $m(L) = 512/27 > 18$. Для любой почти простой группы, строго содержащейся в $\text{Aut}(L)$, получается оценка $m(G) \geq m/9 > 2$. В GAP вычислим $k(\text{Aut}(L)) = 47$. Тогда для этой группы $m(G) \geq St(1)/k(\text{Aut}(L)) = 512/47 > 10$.

Пусть $L \cong U_3(16)$, тогда $|\text{Out}(L)| = 8$. В группе L существует (см. лемму 5) характер $\chi_{r^{2s}}$ степени $17^2 15 = 4335$. Далее, если $G - \text{SM}_2$ -группа, то для любого ее неприводимого характера χ выполняется $\chi^2(1) = \sum_{i=1}^{k(G)} c_i \chi_i(1)$, где $c_i \in 0, 1, 2$. Тогда

$$\chi_{r^{2s}}^2(1) \leq 2 \sum_{i=1}^{k(G)} \chi_i(1) \leq 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{k(G)} \chi_i^2(1) \sum_{i=1}^{k(G)} 1} = 2\sqrt{|G|k(G)}.$$

Вычислим $\chi_{r^{2s}}^2(1) = 4335^2 > 18,7 \cdot 10^6$ и $2\sqrt{k(G)|G|} \leq 2\sqrt{k(L)|L|}|\text{Out}(L)| < 8,7 \cdot 10^6$. Отсюда видно, что $\chi_{r^{2s}}^2(1) > \sum_{i=1}^{k(G)} c_i \chi_i(1)$, следовательно, $G -$ не SM_2 -группа.

Пусть $L \cong U_4(2)$. Поскольку $|\text{Out}(L)| = 2$, то единственная почти простая группа, кроме L , здесь будет $\text{Aut}(L)$. Для этих групп мы получаем в GAP следующий результат: $U_4(2) - \text{SM}_{21}$, $\text{Aut}(U_4(2)) - \text{SM}_{14}$.

Пусть $L \cong U_5(2)$. Тогда $|\text{Out}(L)| = 2$, и, значит, почти простыми группами также будут группы L и $\text{Aut}(L)$. Применяя GAP, мы получаем, что $U_5(2) - \text{SM}_{125}$, а $\text{Aut}(U_5(2)) - \text{SM}_{497}$ -группа.

Осталось рассмотреть случай, когда $n > 6$. Действуя таким же образом, как и для групп $L_n(p^t)$, мы получаем при $p > 2$: $m(G) > 21$, а при $p = 2$:

$$m(G) > \frac{2^{t(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1} \cdot 2(2^t + 1, n)t} \geq \frac{2^{t(n-1)(n-2)/2}}{6^{n-1} \cdot 2nt}.$$

Далее, если $t > 1$, то $m(G) > 821$. Для $t = 1$, $m(G) > 8$ при $n > 9$. Таким образом, нам осталось рассмотреть случаи, когда группа $L - U_7(2)$ или $U_8(2)$.

Вычислим порядок $|\text{Out}(L)|$ для каждой из этих групп и подставим в неравенство

$$m(G) > \frac{St(1)}{k(L)|\text{Out}(L)|}.$$

Если $L \cong U_7(2)$ или $U_8(2)$, то $|\text{Out}(L)| = 2$. Тогда, если $L \cong U_7(2)$, то $k(L) = 239$, а $St(1) = 2^{21}$, поэтому $m(G) > 2^{20}/239 > 548$, а если $L \cong U_8(2)$, то $k(L) = 520$, а $St(1) = 2^{28}$, поэтому $m(G) > 258111$.

Группы $B_n(p^t)$

Для группы $L \cong B_n(p^t)$ порядок $|\text{Out}(L)| = (2, p^t - 1)t \leq 2t$, для $n > 2$ или нечетного q . Если $L \cong B_2(2^t)$, то $|\text{Out}(L)| = 2t$. Тогда

$$m(G) \geq \frac{m(L)}{2t} = \frac{1}{2t} \left(\frac{p^{t(n-1)}}{6} \right)^n$$

Пусть $t = 1$. Если $n = 2$, то условие $m(G) > 2$ выполняется при $p > 12$. Оценим число $m(G)$ для $p = 2, 3, 5, 7, 11$, используя формулу $m(G) \geq St(1)/(k(L) \cdot |\text{Out}(L)|)$. Обратимся к таблице 6. Для $p = 3$ имеем $m(G) \geq 81/(20 \cdot 2) > 2$. Для $p = 5$ имеем $m(G) \geq 625/(34 \cdot 2) > 9$. Действуя таким же образом, получаем, что если $L \cong B_2(7)$, то $m(G) > 23$, а если $L \cong B_2(11)$, то $m(G) > 73$.

Если $t = 1$, а $n = 3$, то из условия $m(G) > 2$ следует, что $p > 3$, следовательно, требуется проверка для $q = 2$ и 3 . В силу того, что $|\text{Out}(B_3(2))| = 1$, $\text{Aut}(B_3(2)) \cong B_3(2)$. Мы получили в GAP, что $B_3(2) - \text{SM}_{91}$.

Поскольку $m(B_3(3)) > 202$, а $|\text{Out}(B_3(3))| = 2$, то $m(\text{Aut}(B_3(3))) > 100$.

Если же $t = 1$, а $n \geq 4$, то неравенство $m(G) \geq 1/2(p^3/6)^4$ выполняется для $p > 2$, поэтому необходимо проверить только группу $\text{Aut}(B_4(2))$. Поскольку $|\text{Out}(L)| = 1$, то $\text{Aut}(B_4(2)) \cong B_4(2)$, а группа $B_4(2)$, как было установлено в [11], не SM_{809} .

Пусть $t = 2$. Из неравенства $m(G) = 1/4(p^{2n-2}/6)^n > 2$ при $n = 2$ следует, что $p > 4$. При $n > 3$, неравенство выполняется для любых $p > 1$.

Пусть $t = 3$. В этом случае получаем неравенство $m(G) \geq 1/6(p^{3n-3}/6)^n > 2$, из которого при $n = 2$ следует, что $p > 2$. Для $n > 3$ следует, что $p > 1$.

Пусть $t = 4$. Тогда значение $m(G) \geq 1/8(p^{4n-4}/6)^n$ будет больше 2, если $n > 2$ или $p > 2$.

Наконец, при $t \geq 5$ неравенство $m(G) > 2$ выполняется при $n \geq 2, p > 1$.

Таким образом, для дополнительной проверки остаются группы автоморфизмов групп $B_2(4)$, $B_2(8)$, $B_2(9)$ и $B_2(16)$. Оценим значение $m(G)$, если L — одна из этих групп. Для $B_2(4)$, $m(G) \geq 256/(27 \cdot 4) > 2$. Для $B_2(8)$, $m(G) \geq 4096/(83 \cdot 6) > 8$. Для $B_2(9)$, $m(G) \geq 6561/74 \cdot 4 > 22$. Для $B_2(16)$, $m(G) \geq 65536/291 \cdot 8 > 28$.

Единственный оставшийся здесь случай $B_3(2) \cong S_6$ будет рассмотрен позднее.

Группы $C_n(p^t)$

Пусть $L \cong C_n(p^t), n > 2$. Так как $|\text{Out}(L)| = (2, p^t - 1)t \leq 2t$, то

$$m(G) \geq \frac{m(L)}{2t} = \frac{1}{2t} \left(\frac{p^{t(n-1)}}{6} \right)^n.$$

Проверим, при каких t, p и n значение $m(G)$ больше 2. Пусть $t = 1$. Тогда при $n = 3, 4$, требуется, чтобы p было больше 3, а для $n \geq 5$ неравенство $m(G) > 2$ выполняется для любых $q > 1$. Таким образом, нам необходимо проверить случаи, когда L изоморфна $C_3(2)$, $C_3(3)$ или $C_4(2)$.

Так как $C_3(2) \cong B_3(2)$, $C_4(2) \cong B_4(2)$ то $\text{Aut}(C_3(2)) = \text{SM}_{91}$, $\text{Aut}(C_4(2))$ не SM_{809} . В свою очередь, $C_3(3)$ не SM_{265} , следовательно, $\text{Aut}(C_3(3))$ не SM_{132} .

Если $t > 1$, то наименьшее значение $m(G) = 4$ будет при $p = 2, n = 3$.

Группы $D_n(p^t)$

Пусть $L \cong D_n(p^t)$. Известно, что при $n = 4$, $|\text{Out}(L)| = 6(4, p^{4t} - 1)t$. Если $p > 2$, то $|\text{Out}(L)| \leq 24t$, и для $m(G)$ получается следующая оценка:

$$m(G) \geq \frac{m(L)}{24t} = \frac{p^{9t}}{24t \cdot 6^3} \geq \frac{3^9}{24 \cdot 6^3} > 3.$$

Если $p = 2$, то $|\text{Out}(L)| = 6t$, и тогда

$$m(G) \geq \frac{m(L)}{6t} = \frac{2^{9t}}{6t \cdot 6^3}.$$

При $t > 1$ выполняется $m(G) > 101$. Если же $t = 1$, то, воспользовавшись данными таблицы 3, получаем оценку $m(G) \geq 2^{12}/(53 \cdot 6) > 12$.

Если $n > 4$, то $|\text{Out}(L)| = 2(4, p^{tn} - 1)t$. При $p > 2$, $|\text{Out}(L)| \leq 8t$. В этом случае

$$m(G) \geq \frac{m(L)}{8t} = \frac{p^{t(n-1)^2}}{8t \cdot 6^{n-1}} = \frac{1}{8t} \left(\frac{p^{t(n-1)}}{6} \right)^{n-1}.$$

Наименьшее значение этого выражения будет при $t = 1, p = 3$ и $n = 5$. Таким образом, $m(G) \geq 19683/64 > 307$.

Пусть $p = 2$. Тогда $|\text{Out}(L)| = 2t$, что позволяет оценить $m(G)$ как

$$m(G) \geq \frac{m(L)}{2t} = \frac{2^{t(n-1)^2}}{2t \cdot 6^{n-1}} = \frac{1}{2t} \left(\frac{2^{t(n-1)}}{6} \right)^{n-1}.$$

Понятно, что наименьшее значение этого выражения будет при $t = 1$ и $n = 5$. Таким образом, $m(G) \geq 2048/81 > 25$.

Для группы $L \cong {}^2D_n(p^t)$ используем равенство $|\text{Out}(L)| = 2(4, p^{tn} + 1)t$. При $p = 2$ получаем $|\text{Out}(L)| = 2t$, и, следовательно, оценка для $m(G)$ такая же, как и в случае $L \cong D_n(2)$, при $n > 4$: $m(G) > 25$. Если же $p > 2$, то $|\text{Out}(L)| \leq 8t$, и тогда $m(G) > 307$ (как и в случае $L \cong D_n(p^t)$, при $n > 4$). Лемма доказана. $\square$

Исключительные простые группы лиева типа

Лемма 4. Среди почти простых групп для исключительных простых групп лиева типа не существует SM_2 -групп.

Доказательство. Пусть $L \cong E_6(p^t)$, тогда $|\text{Out}(L)| = 2(3, p^t - 1)t \leq 6t$. Тогда $m(G)$ можно оценить как $m(G) \geq m(L)/6t = p^{30t}/(6^6 \cdot 6t) = p^{30t}/(6^7 \cdot t)$. Наибольшее значение $m(G)$ будет при $t = 1$, что в 6 раз меньше $m(L)$. То есть $m(G) > 3835$.

Если $L \cong {}^2E_6(p^t)$, то $|\text{Out}(L)| = 2(3, p^t + 1)t \leq 6t$. Этот случай аналогичен предыдущему, $m(G) > 3835$.

Если $L \cong E_7(p^t)$, то $|\text{Out}(L)| = (2, p^t - 1)t$. Если $p = 2$, то $|\text{Out}(L)| = t$, и тогда $m(G) \geq m(L)/t = 2^{56t}/(6^7 \cdot t) = 2^{56t-7}/(3^7 \cdot t) > 2,57 \cdot 10^{11}$. Если же $p > 2$, то $|\text{Out}(L)| = 2t$, и $m(G) \geq m(L)/2t = 2^{56t}/(6^7 \cdot 2t) = 2^{56t-8}/(3^7 \cdot t) > 1,28 \cdot 10^{11}$.

Пусть $L \cong E_8(p^t)$. Поскольку $|\text{Out}(L)| = t$, то $m(G) \geq p^{112t}/(6^8 \cdot t) > 3,09 \cdot 10^{27}$.

Пусть $L \cong G_2(p^t)$. Если $p = 3$, то $|\text{Out}(L)| = 2t$. В этом случае $m(G) \geq m(L)/2t = 3^{4t}/(36 \cdot 2t) = 3^{4t-2}/8t > 45$ при $t > 1$. Если же $t = 1$, то, поскольку $m(G_2(3)) > 33$, то $m(G) > 33/2 > 16$. Пусть $p \neq 3$, тогда $|\text{Out}(L)| = t$. Для $m(G)$ получается такая оценка: $m(G) \geq m(L)/3t = p^{4t}/36t$. При $p \geq 5$ число $m(G)$ будет больше 17. Если $p = 2$, то для $t > 1$ выполняется $m(G) > 3$. Остается последний случай — группа $\text{Aut}(G_2(2)) \cong \text{Aut}(U_3(3)) \cong P\Gamma U_3(3)$, — SM_{20} -группа.

Пусть $L \cong {}^2B_2(2^{2n+1})$. Тогда $|\text{Out}(L)| = 2n + 1$. Число $m(G)$ можно оценить так: $m(G) \geq 2^{2n+4}/9(2n + 1) > 5$, при $n \geq 2$.

Пусть $L \cong F_4(p^t)$. Для нее $|\text{Out}(L)| = (2, p)t$, что при $p \neq 2$ дает оценку для $m(G)$: $m(G) \geq p^{20t}/(6^4 \cdot t) > 2690420$. Если же $p = 2$, то $m(G) \geq 2^{20t}/(6^4 \cdot t) > 809$.

Пусть $L \cong {}^3D_4(p^t)$. Тогда $|\text{Out}(L)| = 3t$, откуда $m(G) \geq p^{8t}/9t > 28$.

Пусть $L \cong {}^2G_2(3^{2n+1})$. Так как $|\text{Out}(L)| = 2n + 1$, то $m(G) \geq 3^{4n+3}/4(2n + 1) > 20$.

Пусть $L \cong {}^2F_4(2^{2n+1})$. Тогда $|\text{Out}(L)| = 2n + 1$, и $m(G) \geq 2^{20n+12}/7(2n + 1) > 2 \cdot 10^8$.

Известно, что $|\text{Out}({}^2F_4(2)')| = 2$, поэтому для нее $m(G) \geq 93/2 > 46$.

Лемма доказана. $\square$

Знакопеременные группы

Лемма 5. Среди почти простых групп с цоколем A_n , $n \geq 5$, SM_2 -группами являются только группы A_5 , S_5 и $PGL_2(9)$.

Доказательство. В случае $n \geq 5$, $n \neq 6$, $\text{Aut}(A_n) \cong S_n$. Пусть $n \geq 5$ и $n \neq 6$. Поскольку у группы S_n , кроме ее самой, нет подгрупп, строго содержащих A_n , то среди почти простых групп нужно проверить только S_n . Пусть χ_0 и ψ_0 — характеры максимальной степени у групп A_n и S_n . Их степени $\chi_0(1)$ и $\psi_0(1)$ будут равны, если

они соответствуют одной и той же несимметричной диаграмме Юнга. В противном случае $\chi_0(1) < \psi_0(1)$. Тогда, если S_n — SM_2 -группа, то $\psi_0(1) \leq 2(k(S_n) - 1)$, откуда учитывая, что $k(S_n) = p(n)$, мы получаем неравенство:

$$\chi_0(1) < 2p(n). \quad (1)$$

Если $n > 12$, то, с учетом предложений 2 и 3, это неравенство можно записать так:

$$n! < 16p(n)^3 < 16 \cdot (3/2)^{3n} \cdot (2 \cdot \sqrt{3})^{-3/2} < 2,49 \cdot (3/2)^{3n} < 2,49 \cdot 2^{2n}.$$

Пусть $n = 13$. Так как $13! > 2^{32}$, то мы получаем $2^{32} < 2,49 \cdot 2^{26}$, противоречие. Несложно увидеть, что при $n > 13$ это неравенство также неверно.

Для $n = 7, \dots, 12$ обратимся к таблице 4. Используя значения $p(n)$ и информацию о степени характера $\chi_0(1)$ из [11], убеждаемся, что при $n > 6$ неравенство (1) не будет верным. Следовательно, и эти случаи отпадают.

Пусть $n = 5$. Группа $S_5 \cong PGL_2(5)$ и, как было доказано, это — SM_2 -группа.

Рассмотрим теперь группу A_6 . Ее группа автоморфизмов $P\Gamma L_2(9)$ содержит в себе следующие подгруппы, строго содержащие A_6 : M_{10} , S_6 , $PGL_2(9)$. Группа $PGL_2(9)$, как было доказано, — SM_2 -группа. Для оставшихся групп вновь прибегнем к помощи GAP: M_{10} и S_6 — SM_5 , а $P\Gamma L_2(9)$ — SM_4 -группа (см. таблицу 1 в [11]). Лемма доказана. $\square$

Спорадические группы

Лемма 6. Ни одна из почти простых групп с цокелем, изоморфным спорадической группе, не является SM_{20} -группой.

Доказательство. По имеющейся информации в [3], для группы L , изоморфной одной из групп: M_{12} , M_{22} , J_2 , J_3 , Fi_{22} , Fi'_{24} , Suz , He , HS , McL , HN , $O'N$, порядок $|\text{Out}(L)|$ равен 2. Отсюда можно сделать вывод о том, что если G — почти простая группа с цокелем L , то $G \cong L$ или $G \cong \text{Aut}(L)$. С помощью GAP была получена информация о том, к какому классу SM_m -групп принадлежат рассматриваемые группы автоморфизмов (см. таблицу 2 в [11]). Как оказалось, каждая из перечисленных групп будет SM_m -группой, где $m \geq 28$.

Для остальных спорадических групп $|\text{Out}(L)| = 1$, поэтому почти простой группой с цокелем L будет только сама группа L . Как уже было доказано в [11], ни одна из простых спорадических групп не является SM_{20} -группой. Лемма доказана. $\square$

Из лемм 3–6 следует, что к классу SM_2 -групп среди конечных почти простых групп принадлежат только группы $PGL_2(q)$. Это и доказывает теорему 2.

Список литературы

1. Gorenstein D. Finite groups. N.Y.: Harper and Row, 1968.
2. Gallagher P.X. The number of conjugacy classes in a finite group // Math. Z. 1970. Vol. 118. P. 175–179.

3. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. Atlas of Finite Groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. <http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/>
4. Казарин Л.С., Янишевский В.В. О конечных просто приводимых группах // Алгебра и анализ. 2007. Т. 19, № 6. С. 86–116.
5. Казарин Л.С., Чанков Е.И. Конечные просто приводимые группы разрешимы // Математический сборник. 2010. Т. 201, № 5. С. 27–40.
6. Kazarin L.S., Sagirov I.A. On the degrees of irreducible characters of finite simple groups // Proc. of the Steklov Inst. Math. Suppl. 2001. Vol. 2. P. 71–81.
7. Isaacs I.M. Character theory of finite groups. N.Y.: Acad. Press, 1976.
8. Simpson W.A., Frame W.A. The character tables for $SL(3, q)$, $SU(3, q)$, $PSL(3, q)$, $PSU(3, q)$ // Can. J. Math. 1973. Vol. XXV, №3. P. 486–494.
9. Maróti A. Bounding the number of conjugacy classes of a permutation group // Journal of Group Theory. 2005. 8, № 3. P. 273–289.
10. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4.10, Aachen, St. Andrews, 2008; <http://www.gap-system.org>
11. Поляков С.В. О тензорных квадратах неприводимых представлений конечных почти простых групп. I // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18, №1. С. 130–141.
12. Поляков С.В. О тензорных квадратах неприводимых представлений почти простых групп с цоклем, изоморфным $L_2(q)$ // Вестник Пермского университета (в печати).

On Tensor Squares of Reducible Representations of Almost Simple Groups. II

Polyakov S. V.

Keywords: SR-groups, SM_m -groups, almost simple groups, automorphisms, GAP

Almost simple SM_m -groups are considered. A group G is called SM_m -group if the tensor square of any irreducible representation is decomposed into the sum of all characters with multiplicities not greater than m . It turned out that if G is an almost simple SM_2 -group, then $G \cong PGL_2(q)$.

Сведения об авторе:

Поляков Сергей Владимирович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ассистент кафедры общей математики