

УДК 517.51+514.17

О геометрических характеристиках n -мерного симплекса

Невский М.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: mnevsk@uniyar.ac.ru

получена 29 ноября 2010

Ключевые слова: n -мерный симплекс, n -мерный куб, гомотетия, осевой диаметр, линейная интерполяция, проектор

Доказываются и обсуждаются некоторые соотношения для геометрических характеристик n -мерного симплекса. Отмечается связь с линейной интерполяцией на кубе $[0, 1]^n$.

1. Введение

Пусть n — натуральное число. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \dots, x_n)$. Через $e_1, \dots, e_n$ обозначим канонический базис $\mathbb{R}^n$. Положим $Q_n := [0, 1]^n$, $e := (1, \dots, 1)$. Для выпуклого многогранника $G \subset \mathbb{R}^n$ через $\text{ver}(G)$ обозначим совокупность его вершин, через $\text{vol}(G)$ — объём, через $\text{int}(G)$ — совокупность его внутренних точек, а через σG — результат гомотетии G относительно центра тяжести с коэффициентом σ . Считаем $-G := (-1)G$. Под *транслятом* будем понимать результат некоторого параллельного переноса. Ниже $C(Q_n)$ есть пространство непрерывных функций $f : Q_n \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{C(Q_n)} := \max\{|f(x)| : x \in Q_n\}$; $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1 .

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Обозначим вершины S через $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$, $j = 1, \dots, n+1$. Матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной. Если $\Delta := \det(\mathbf{A})$, то $\text{vol}(S) = |\Delta|/n!$. Обозначим через $\Delta_j(x)$ определитель, который получается из Δ заменой j -й строки на строку $(x_1, \dots, x_n, 1)$. Многочлены $\lambda_j(x) := \Delta_j(x)/\Delta$ из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ обладают свойством

$\lambda_j(x^{(k)}) = \delta_j^k$ (здесь δ_j^k — символ Кронекера). Коэффициенты λ_j составляют j -й столбец $\mathbf{A}^{-1}$. В дальнейшем считаем $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$, иначе говоря,

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}. \quad (1.1)$$

Любой многочлен $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет равенству

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} p(x^{(j)}) \lambda_j(x). \quad (1.2)$$

Применяя (1.2) последовательно к $p(x) = 1, x_1, \dots, x_n$, получим для $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) x^{(j)} = x. \quad (1.3)$$

Числа $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ являются *барицентрическими координатами x относительно S* . Справедливо представление $S = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \lambda_j(x) \leq 1, j = 1, \dots, n\}$. Уравнение $\lambda_j(x)$ задаёт гиперплоскость, которая содержит $(n-1)$ -мерную грань S , противоположную $x^{(j)}$. Из (1.3) получаются следующие равенства для строчных сумм элементов $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\sum_{j=1}^{n+1} l_{n+1,j} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} l_{ij} = \sum_{j=1}^{n+1} [\lambda_j(e_i) - \lambda_j(0)] = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(e_i) - \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1.4)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} l_{ij} = 0. \quad (1.5)$$

Столбцовые суммы $\mathbf{A}^{-1}$, в отличие от строчных, зависят от S :

$$\sum_{i=1}^{n+1} l_{ij} = \lambda_j(e), \quad 1 \leq j \leq n+1.$$

Для симплекса S , не содержащего Q_n , положим $\xi(S) := \min \{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$. Имеет место равенство (см. [3; лемма 2.1])

$$\xi(S) = (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1, x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1. \quad (1.6)$$

Определим величину $\xi_n := \min \{\xi(S) : S \subset Q_n\}$. Через $d_i(S)$ обозначим максимальную длину отрезка, содержащегося в S и параллельного оси x_i . Величину $d_i(S)$ будем называть *i -м осевым диаметром S* . Термин *осевой, или аксиальный, диаметр (axial diameter)* для выпуклых тел был введён Скоттом [8, 9]. Пусть $d(S) := \max \{d_i(S) : 1 \leq i \leq n\}$.

В [3] автором были доказаны следующие утверждения. Для любого $i = 1, \dots, n$

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (1.7)$$

Из (1.7) и (1.4) вытекает, что величина $1/d_i(S)$ равна сумме положительных элементов i -й строки $\mathbf{A}^{-1}$ и одновременно сумме модулей отрицательных элементов этой строки. (Дополнение свойства (1.7), выраженное последней фразой, в [3] не отмечалось.) В симплексе S существует ровно один отрезок длины $d_i(S)$, параллельный оси x_i . Середина этого отрезка совпадает с точкой $\sum_{j=1}^{n+1} m_{ij} x^{(j)}$, где

$$m_{ij} := \frac{|l_{ij}|}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|}.$$

Рассматриваемый отрезок располагается в S таким образом, что каждая $(n-1)$ -мерная грань S содержит по крайней мере один из его концов. Сумма размерностей двух минимальных по включению граней S , содержащих концы этого отрезка, не превосходит $n-1$. Если $Q_n \not\subset S$, то выполняется

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq \xi(S). \quad (1.8)$$

Равенство в (1.8) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)). \quad (1.9)$$

Если $Q_n \subset S$, то справедливо

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq 1. \quad (1.10)$$

Приведённые свойства осевых диаметров симплекса имеют интересные приложения. Например, из (1.10) легко следует, что $d(S) \geq n$. Иными словами, в случае $Q_n \subset S$ для некоторого i симплекс S содержит отрезок длины n , параллельный оси x_i . Последнее утверждение в виде гипотезы было сформулировано в [2].

Другое направление использования этих результатов — получение оценок для нормы интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, узлы которого совпадают с вершинами симплекса $S \subset Q_n$. Проектор P определяется условиями $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$, $j = 1, \dots, n+1$. Пусть $\|P\|$ есть норма P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$. Справедливы равенства

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f(x^{(j)}) \lambda_j(x), \quad \|P\| = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

В настоящей статье уточняются полученные автором ранее оценки величины ξ_n , обсуждаются условия ряда соотношений для $\|P\|$ и других величин, а также формулируются некоторые открытые вопросы.

2. Оценки для ξ_n

Оценка $\xi_n \geq n$ первоначально была получена в работе автора [2] с использованием результатов статьи Лассака [7]. Более простое её доказательство, связанное с неравенством (1.8), отмечено в [3]. Именно, если $S \subset Q_n$, то для любого i верно $d_i(S) \leq 1$, и (1.8) даёт $\xi(S) \geq n$. Значит, $\xi_n \geq n$.

Ещё один способ вывода последнего неравенства основан на следующем утверждении, приведённом в [5] (простое доказательство дано в [3; следствие 4.9]). Пусть D_1 и D_2 — параллелепипеды, T — симплекс в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что D_2 есть результат гомотетии D_1 с коэффициентом $\sigma > 1$. Если $D_1 \subset T \subset D_2$, то $\sigma \geq n$. Возьмем произвольный симплекс $S \subset Q_n$. Так как $Q_n \subset \xi(S)S$, то для некоторого транслята Q куба $\xi(S)Q_n$ справедливы включения $Q_n \subset \xi(S)S \subset Q$. В связи с предыдущим $\xi(S) \geq n$, поэтому $\xi_n \geq n$.

Если $n + 1$ — число Адамара, т.е. существует матрица Адамара порядка $n + 1$, то $\xi_n = n$; см. [2]. В этом случае равенство $\xi(S) = n$ выполняется для правильного симплекса S , вершины которого совпадают с вершинами Q_n . Приведём здесь иное, чем в [2], доказательство этих утверждений.

Теорема 2.1. Пусть существует симплекс $S \subset Q_n$ максимального возможного объёма, центр тяжести которого совпадает с центром куба. Тогда

$$\xi(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} = \xi_n = n.$$

Доказательство. Так как S имеет максимальный возможный объём в Q_n , то $Q_n \subset -nS$. (В предположении противного некоторая вершина S может быть перемещена в Q_n так, что объём симплекса увеличится; но это невозможно.) Положим $T := -S$. Тогда $T \subset Q_n \subset nT$. Значит, $\xi(T) \leq n$. Так как $\xi(S) = \xi(T)$ и $d_i(S) = d_i(T) \leq 1$, то

$$n \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq \xi(S) \leq n.$$

Отсюда и неравенства $\xi_n \geq n$ следует утверждение теоремы. Заметим также, что равенства $d_i(S) = 1$ выполняются для любого симплекса максимального объёма в Q_n (см. [7]; другое доказательство дано в [3; следствие 4.8]). $\square$

Следствие 2.1. Если $n + 1$ — число Адамара, то $\xi_n = n$.

Для доказательства достаточно применить теорему 2.1 к правильному симплексу, вписанному в Q_n .

Если S — симплекс максимального объёма в Q_n , то $\xi(S) \leq n + 2$ (см. [2; теорема 4.1]). Поэтому для любого n справедливо неравенство $\xi_n \leq n + 2$. Покажем, что последняя оценка может быть заменена более точной.

Теорема 2.2. Если $n > 2$, то

$$\xi_n \leq \frac{n^2 - 3}{n - 1}. \quad (2.1)$$

При любом n верно

$$\xi_n < n + 1. \quad (2.2)$$

Доказательство. Сначала пусть $n \geq 2$. Рассмотрим n -мерный симплекс S с вершинами $x^{(1)} = (0, 1, \dots, 1)$, $x^{(2)} = (1, 0, \dots, 1)$, $\dots$, $x^{(n)} = (1, 1, \dots, 0)$, $x^{(n+1)} = (0, 0, \dots, 0)$. В этом случае

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} -(n-2) & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & -(n-2) & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -(n-2) & \dots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -(n-2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix},$$

$\Delta = \det(\mathbf{A}) = (-1)^{n-1}(n-1)$, $\text{vol}(S) = (n-1)/n!$. Коэффициенты многочленов λ_j составляют столбцы $\mathbf{A}^{-1}$, поэтому

$$\lambda_j(x) = -(n-2)x_j + \sum_{k \neq j} x_k, \quad 1 \leq j \leq n;$$

$$\lambda_{n+1}(x) = -\sum_{k=1}^n x_k + n - 1.$$

При $n = 2$ по формуле (1.6) имеем: $\xi(S) = -3\lambda_3(1, 1) + 1 = 4$. Если $n > 2$, та же формула даёт

$$\xi(S) = -(n+1)\lambda_1(e_1) + 1 = \frac{(n+1)(n-2)}{n-1} + 1 = \frac{n^2-3}{n-1}.$$

Так как $\xi_n \leq \xi(S)$, то при $n > 2$ выполняется (2.1).

Очевидно, $\xi_1 = 1 < 2$. Значение ξ_2 найдено в [1; п. 3]: $\xi_2 = 1 + 3\sqrt{5}/5 = 2.3416\dots < 3$. Поскольку при $n > 2$ верно неравенство $(n^2-3)/(n-1) < n+1$, то при любом n справедливо (2.2). $\square$

Рассмотренный в доказательстве теоремы 2.2 симплекс S при $n \geq 3$ обладает следующим свойством [6, лемма 3.3]: замена любой вершины S на любую точку Q_n уменьшает объём симплекса. По этой причине симплекс S при $n \geq 3$ назван в [6] *жестким (rigid)*. При $n = 2, 3, 4$ (и только в этих ситуациях) объём S является максимально возможным для симплекса, содержащегося в Q_n . При любом $n \geq 2$ из (1.7) следуют равенства $d_1(S) = \dots = d_n(S) = 1$. Они эквивалентны тому, что сумма

модулей элементов каждой из верхних n строк матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ равна 2, а каждая из сумм положительных или модулей отрицательных элементов любой из этих строк равна 1.

С помощью (2.1) можно несколько уточнить теоремы 5.1 и 5.2 работы [2]. Приведем формулировки соответствующих утверждений, доказываемых так же, как в [2]. Обозначим через θ_n минимальную величину нормы интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ при условии, что все соответствующие ему узлы интерполяции принадлежат Q_n . Пусть v_n — максимальный возможный объём n -мерного симплекса, принадлежащего Q_n ; Ψ_n — стандартизованный многочлен Лежандра степени n , т. е.

$$\Psi_n(t) := \frac{1}{2^n n!} [(t^2 - 1)^n]^{(n)}.$$

Следствие 2.2. Если $n > 2$ таково, что $\theta_n > (3n - 5)/(n - 1)$, то

$$\xi_n < \frac{n+1}{2} (\theta_n - 1) + 1. \quad (2.3)$$

Следствие 2.3. Если $n > 2$ таково, что

$$\Psi_n\left(\frac{3n-5}{n-1}\right) \cdot v_n < 1,$$

то имеет место (2.3).

3. О равенстве $\sum \frac{1}{d_i(S)} = \frac{n+1}{2} (\|P\| - 1) + 1$

Пусть $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами симплекса $S \subset Q_n$. Точку $x \in \text{ver}(Q_n)$ будем называть μ -вершиной Q_n относительно S , если $\|P\| = \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|$ и среди чисел $\lambda_j(x)$ имеется ровно μ отрицательных ($1 \leq \mu \leq n$).

Как доказано в [3; следствие 4.11],

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq \frac{n+1}{2} (\|P\| - 1) + 1. \quad (3.1)$$

Равенство в (3.1) имеет место тогда и только тогда, когда существует 1-вершина Q_n относительно S и выполняется (1.9). Дополним эти утверждения следующим свойством.

Теорема 3.1. Если выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} = \frac{n+1}{2} (\|P\| - 1) + 1, \quad (3.2)$$

то при любом j точка, на которой достигается $\max\{(-\lambda_j(x)) : x \in \text{ver}(Q_n)\}$, является 1-вершиной Q_n относительно S .

Доказательство. В силу выполнения равенства (3.2) обе его части равняются $\xi(S)$ (см. [3]). Пусть y — любая 1-вершина Q_n относительно S . Тогда существует k , для которого

$$\|P\| = -\lambda_k(y) + \sum_{j \neq k} \lambda_j(y) = -2\lambda_k(y) + \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(y) = -2\lambda_k(y) + 1.$$

Отсюда

$$\frac{n+1}{2}(\|P\| - 1) + 1 = -(n+1)\lambda_k(y) + 1.$$

Левая часть последнего равенства одновременно равняется $\xi(S)$. В силу (1.6)

$$-\lambda_k(y) = \max_{1 \leq j \leq n+1, x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)).$$

Пусть $y^{(j)}$ — любая точка, на которой достигается $\max\{(-\lambda_j(x)) : x \in \text{ver}(Q_n)\}$. Из (1.9) следует, что $-\lambda_k(y) = -\lambda_1(y^{(1)}) = \dots = -\lambda_{n+1}(y^{(n+1)})$. Имеем:

$$\begin{aligned} \|P\| &= -2\lambda_k(y) + 1 = -2\lambda_1(y^{(1)}) + 1 = \\ &= -\lambda_1(y^{(1)}) + \sum_{j \neq 1} \lambda_j(y^{(1)}) \leq \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(y^{(1)})| \leq \|P\|. \end{aligned}$$

Поэтому $-\lambda_1(y^{(1)}) = |-\lambda_1(y^{(1)})| > 0$; $\lambda_2(y^{(1)}) \geq 0, \dots, \lambda_n(y^{(1)}) \geq 0$. Таким образом, $y^{(1)}$ есть 1-вершина Q_n относительно S . Аналогично 1-вершинами Q_n относительно S являются точки $y^{(2)}, \dots, y^{(n+1)}$. $\square$

4. Величины $\alpha(S)$ и $\beta(S)$

Введём в рассмотрение ещё две числовые величины, связывающие n -мерный невырожденный симплекс S с основным кубом Q_n . Через $\alpha(S)$ обозначим минимальное $\sigma > 0$ такое, что некоторый транслят σS содержит Q_n . Через $\beta(S)$ обозначим максимальное $\sigma > 0$, для которого некоторый транслят σS принадлежит Q_n .

Автору удалось показать, что

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}. \quad (4.1)$$

Доказательство этого равенства дано в [4]. Из (4.1) и (1.7) следует, что $\alpha(S)$ равно полусумме модулей всех элементов матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, за исключением элементов последней строки:

$$\alpha(S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (4.2)$$

В связи с (4.2) и (1.5) число $\alpha(S)$ равно сумме положительных элементов верхних n строк $\mathbf{A}^{-1}$ и одновременно сумме модулей отрицательных элементов этих строк.

Обратимся к вычислению $\beta(S)$. Как и ранее, $x^{(j)}$ обозначают вершины S .

Лемма 4.1. *Некоторый транслят S принадлежит Q_n тогда и только тогда, когда для $i = 1, \dots, n$ и $j, k = 1, \dots, n + 1$ верно*

$$\left| x_i^{(k)} - x_i^{(j)} \right| \leq 1. \quad (4.3)$$

Доказательство. Пусть выполнено (4.3). Рассмотрим прямоугольный параллелепипед

$$D := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \min_{1 \leq j \leq n+1} x_i^{(j)} \leq x_i \leq \max_{1 \leq j \leq n+1} x_i^{(j)}, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Ясно, что $S \subset D$. Так как длины рёбер D не превышают 1, то транслят D принадлежит Q_n . Значит, некоторый транслят S также принадлежит Q_n . Необходимость (4.3) для принадлежности транслята S кубу Q_n очевидна. $\square$

Пусть

$$M_i(S) := \max_{1 \leq j, k \leq n+1} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(j)} \right|, \quad M(S) = \max_{1 \leq i \leq n} M_i(S).$$

Теорема 4.1. *Справедливо равенство*

$$\beta(S) = \frac{1}{M(S)}. \quad (4.4)$$

Доказательство. Пусть $\sigma > 0$ таково, что транслят σS принадлежит Q_n . Тогда Q_n содержит некоторый транслят симплекса с вершинами $\sigma x^{(j)}$. Применив к последнему симплексу лемму 4.1, получим

$$\max \sigma \cdot \left| x_i^{(k)} - x_i^{(j)} \right| \leq 1. \quad (4.5)$$

Максимум в (4.5) взят по $i = 1, \dots, n$; $j, k = 1, \dots, n + 1$. Поэтому

$$\sigma \leq \frac{1}{\max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(j)} \right|} = \frac{1}{M(S)}.$$

Значит,

$$\beta(S) = \max \{ \sigma > 0 : \text{транслят } \sigma S \subset Q_n \} \leq \frac{1}{M(S)}.$$

Предположим, что для некоторого S^* выполняется строгое неравенство $\beta(S^*) < 1/M(S^*)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, для которого $(\beta(S^*) + \varepsilon)M(S^*) \leq 1$, то есть

$$\max_{i,j,k} (\beta(S^*) + \varepsilon) \left| x_i^{(k)} - x_i^{(j)} \right| \leq 1.$$

По лемме 4.1 некоторый транслят симплекса $(\beta(S^*) + \varepsilon)S^*$ принадлежит Q_n . Это включение противоречит определению $\beta(S)$. Равенство (4.4) установлено. $\square$

Так как транслят $\beta(S)S$ принадлежит Q_n , то $\beta(S)d_i(S) = d_i(\beta(S)S) \leq 1$. Следовательно, $\beta(S) \leq 1/d_i(S)$. Поэтому (4.1) приводит к оценке

$$\beta(S) \leq \frac{\alpha(S)}{n}. \quad (4.6)$$

В случае, когда $S \subset Q_n$ и все $d_i(S) = 1$, имеем $M_i(S) = M(S) = \beta(S) = 1$; в то же время $\alpha(S) = n$. Для такого S (4.6) обращается в равенство. Как отмечалось выше (см. п. 2), свойством $d_1(S) = \dots = d_n(S) = 1$ обладает симплекс максимального объёма в Q_n .

Если $n = 1$, то S есть отрезок $[x^{(1)}, x^{(2)}]$, $x^{(1)} < x^{(2)}$. Нетрудно видеть, что $\alpha(S) = \beta(S) = 1/(x^{(2)} - x^{(1)})$, поэтому (4.6) становится равенством.

Пусть $n \geq 2$. Покажем, что неравенство $\beta(S) \geq c_n \alpha(S)$ не выполняется одновременно для всех n -мерных симплексов ни с какой константой $c_n > 0$. Для $\varepsilon \in (0, 1)$ рассмотрим симплекс $S_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами $x^{(j)} = \varepsilon e_j$, $1 \leq j \leq n$; $x^{(n+1)} = e$. Вычислив $\mathbf{A}^{-1}$, получим

$$\lambda_j(x) = \frac{n - \varepsilon - 1}{\varepsilon(n - \varepsilon)} x_j + \frac{1}{\varepsilon(\varepsilon - n)} \sum_{i \neq j} x_i + \frac{1}{n - \varepsilon}, \quad 1 \leq j \leq n;$$

$$\lambda_{n+1}(x) = \frac{1}{n - \varepsilon} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\varepsilon}{n - \varepsilon}.$$

С учётом (4.1) имеем

$$\alpha(S_\varepsilon) = \frac{n^2 - n}{\varepsilon(n - \varepsilon)}.$$

Очевидно, $\beta(S_\varepsilon) = 1$, поэтому неравенство $\beta(S_\varepsilon) \geq C \alpha(S_\varepsilon)$ эквивалентно

$$C \leq \frac{\varepsilon(n - \varepsilon)}{n^2 - n}. \quad (4.7)$$

Остаётся заметить, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ правая часть (4.7) стремится к 0.

Приведём неравенства, в которых участвуют введённые выше геометрические характеристики $\alpha(S)$, $\beta(S)$, $\xi(S)$ и норма интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с узлами в вершинах симплекса $S \subset Q_n$:

$$n \leq n\beta(S) \leq \alpha(S) \leq \xi(S) \leq \frac{n+1}{2}(\|P\| - 1) + 1. \quad (4.8)$$

Цепочка (4.8) объединяет (4.6) и результаты предыдущих работ автора. Отметим случаи, когда все неравенства в (4.8) обращаются в равенства. Для $n = 1$ таковым является единственный симплекс $S = [0, 1] = Q_1$. Для $n = 2$ симплекса с таким свойством не существует, так как для любого S верно $\xi(S) \geq \xi_2 = 2.34\dots > 2$. В трёхмерной ситуации все равенства в (4.8) выполняются для любого проектора с минимальной нормой. Наконец, при $n = 7$ подходящим является правильный симплекс, вершины которого принадлежат множеству вершин Q_7 . Подробнее см. [1–3].

5. Открытые вопросы и замечания

В круге рассматриваемых проблем имеются интересные вопросы, ответы на которые автору не известны. Сформулируем и прокомментируем соответствующие гипотезы.

(Н1) Пусть $S \subset Q_n$ — невырожденный n -мерный симплекс. Если $\xi(S) = \xi_n$, то

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} = \xi(S). \quad (5.1)$$

(Н2) Для любого n существует константа $\gamma_n > 1$ такая, что если $S \subset Q_n$, то

$$\xi(S) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq \gamma_n (\xi(S) - \xi_n). \quad (5.2)$$

Здесь и далее γ_n обозначает наименьшую возможную константу, стоящую в (5.2).

(Н3) $n + 1$ является числом Адамара тогда и только тогда, когда $\xi_n = n$.

Как отмечалось выше, равенство (5.1) эквивалентно условию (1.5). Заметим, что (1.9) выполняется тогда и только тогда, когда каждая $(n - 1)$ -мерная грань симплекса $\xi(S)S$ содержит вершину Q_n . При этом грань $\xi(S)S$, параллельная грани S с уравнением $\lambda_j(x) = 0$, содержит ту вершину Q_n , на которой достигается $\max\{(-\lambda_j(x)) : x \in \text{ver}(Q_n)\}$. Для обоснования достаточно привлечь еще равенство (1.6). Таким образом, предложение (Н1) эквивалентно следующему: *если $S \subset Q_n$ и $\xi(S) = \xi_n$, то каждая $(n - 1)$ -мерная грань симплекса $\xi(S)S$ содержит вершину Q_n* . Любые два невырожденных параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$ связаны аффинным преобразованием. Поэтому последнее утверждение эквивалентно такому.

(Н4) Пусть S — симплекс, D — параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ и для некоторого $\sigma > 0$ верны включения $S \subset D \subset \sigma S$. Предположим, что некоторая $(n - 1)$ -мерная грань σS не содержит вершин D . Тогда существует параллелепипед D' , для которого одновременно $S \subset D' \subset \sigma S$ и $\text{ver}(D') \subset \text{int}(S)$.

Из результатов [1–3] следует, что утверждения гипотез (Н1) и (Н4) выполняются по крайней мере для $n = 2$ и случая, когда $n + 1$ есть число Адамара. Представляют интерес уже двумерный и трёхмерный варианты (Н4).

Если $\xi(S) = \xi_n$, то из (5.2) сразу получаем (5.1). Поэтому для доказательства (Н1) и (Н4) достаточно установить (Н2). В ситуации, когда $n + 1$ — число Адамара, для любого симплекса $S \subset Q_n$

$$\xi_n = n \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq \xi(S),$$

следовательно, (5.1) выполняется с неувлучшаемой константой $\gamma_n = 1$. Равенство в (5.1) эквивалентно условию $\sum 1/d_i(S) = n$, т.е. $d_1(S) = \dots = d_n(S) = 1$. Этим свойством обладает, например, правильный симплекс, вписанный в Q_n .

Итак, $\gamma_1 = \gamma_3 = 1$. Существуют ли отличные от 1 числа γ_n ? Первый нетривиальный случай, когда справедливость (5.1) не ясна, — двумерный. Отметим здесь, что если (5.1) выполняется для $n = 2$, то

$$\gamma_2 \geq \frac{5 + 2\sqrt{5}}{3} = 3.1573786 \dots \quad (5.3)$$

Достаточно учесть, что $\xi_2 = 1 + 3\sqrt{5}/5$ (см. [1; п. 3]), и рассмотреть в качестве S треугольник с вершинами

$$(1, 0), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (0, 0),$$

для которого $\xi(S) = 5/2$, $d_1(S) = d_2(S) = 1$. По предположению автора, γ_2 в точности равняется правой части (5.3). Вопрос о точных значениях величин γ_n в неаддитивной ситуации представляется весьма трудным.

По поводу гипотезы (Н3) заметим следующее. Как отмечалось выше, если $n+1$ — число Адамара, то $\xi_n = n$, но справедливость обратного автору не ясна. Интересно заметить, что из условия $\xi(S) = n$ не следует, что симплекс $S \subset Q_n$ является правильным. Например, тетраэдр $S \subset Q_3$ с вершинами

$$\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(1, \frac{1}{2}, 1\right), \left(0, \frac{1}{2}, 1\right),$$

очевидно, не является правильным. Из (1.6) следует $\xi(S) = 3$, откуда $d_1(S) = d_2(S) = d_3(S) = 1$. Последний факт геометрически очевиден, но может быть выведен и с помощью (1.7). Заметим также, что в этом случае $\|P\| = 2$, $\alpha(S) = 3$, $\beta(S) = 1$, поэтому все неравенства в (4.8) обращаются в равенства.

Теперь сформулируем гипотезу, обобщающую равенство (4.1). Пусть C — ограниченное замкнутое выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Определим величины $d_i(C)$, $\alpha(C)$ по аналогии со случаем $C = S$, см. пункты 1 и 4.

(Н5) *Справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)} \geq \alpha(C). \quad (5.4)$$

По поводу утверждений, близких к (Н5), автору известно следующее. Из результата Скотта [8; теорема 1] следует, что (5.4) верно, если Q_n вписан в транслят T выпуклого тела $\alpha(C)C$, т. е. все вершины Q_n принадлежат границе T . Однако это условие выполняется не для всякого C . Доказанное автором соотношение (4.1) означает, что если C — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$, то (5.4) является равенством. Обратное утверждение неверно: из выполнения для выпуклого тела C равенства в (5.4) не следует, что C — симплекс. Например, для квадрата $C \subset \mathbb{R}^2$ с вершинами $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ левая и правая части (5.4) одинаковы и равны 1. Вопрос о подходящих аналогах равенств (1.7) и (4.2) для произвольного выпуклого C не решён.

В заключение отметим, что неравенство, противоположное (5.4), выполняется с точной константой n в правой части:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)} \leq n\alpha(C). \quad (5.5)$$

Равенство в (5.5) верно тогда и только тогда, когда C есть транслят куба σQ_n , $\sigma > 0$. Приведём доказательства последних утверждений.

Поскольку транслят выпуклого тела $\alpha(C)C$ содержит Q_n , то при любом i верно $\alpha(C)d_i(C) = d_i(\alpha(C)C) \geq 1$, т.е. $1/d_i(C) \leq \alpha(C)$. Для получения (5.5) достаточно просуммировать последние неравенства по i .

Если C есть транслят σQ_n ($\sigma > 0$), то обе части (5.5) одинаковы и равны n/σ . Наконец, пусть ограниченное замкнутое выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ таково, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)} = n\alpha(C).$$

Из предыдущего имеем $d_i(\alpha(C)C) = 1$, $1 \leq i \leq n$. Так как при этом некоторый транслят куба Q_n , обозначим его через Q , принадлежит $\alpha(C)C$, то $\alpha(C)C = Q$. (Допустим противное. Пусть $x \in \alpha(C) \setminus Q$. Из выпуклости $\alpha(C)C$ следует, что для некоторого j существует отрезок, проходящий через x , параллельный e_j и содержащийся в $\alpha(C)C$. Длина этого отрезка превышает 1, что противоречит равенству $d_j(\alpha(C)C) = 1$.) Значит, C есть транслят σQ_n для некоторого $\sigma > 0$.

Список литературы

1. Невский М. В. Геометрические методы в задаче о минимальном проекторе // Модел. и анализ информ. систем. 2006. Т. 13, № 2. С. 16 – 29.
2. Невский М. В. Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора // Модел. и анализ информ. систем. 2009. Т. 16, № 1. С. 24 – 43.
3. Невский М. В. Об одном свойстве n -мерного симплекса // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 580 – 593.
4. Невский М. В. Свойства осевых диаметров симплекса // в печати.
5. Balla M. Y. Approximation of convex bodies by parallelotopes // International Centre for Theoretical Physics. Trieste, Italy. Internal Report. 1987. 5 pp.
6. Hudelson M., Klee V., Larman D. Largest j -simplices in d -cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem // Linear Algebra Appl. 1996. V. 241 – 243. P. 519 – 598.
7. Lassak M. Parallelotopes of maximum volume in a simplex // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 21. P. 449 – 462.

8. Scott P.R. Lattices and convex sets in space // Quart. J. Math. Oxford. 1985. V. 36, № 2. P. 359 – 362.
9. Scott P.R. Properties of axial diameters // Bull. Austral. Math. Soc. 1989. V. 39. P. 329 – 333.

On Geometric Characteristics of an n -Dimensional Simplex

Nevskii M.V.

Keywords: n -dimensional simplex, n -dimensional cube, homothety, axial diameter, linear interpolation, projection

We prove and discuss some propositions for geometric characteristics of an n -dimensional simplex. Also we note the connection with linear interpolation on the cube $[0, 1]^n$.

Сведения об авторе:

Невский Михаил Викторович,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
кандидат физико-математических наук, доцент,
декан математического факультета