Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **3** (2014) 55–61

УДК 519.876.5 + 517.938

Об устойчивости состояния равновесия одной модели нейронной сети[1]

Богомолов Ю. В.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: mathematics@inbox.ru

получена 24 апреля 2014

Ключевые слова: нейронная сеть, устойчивость

Рассматривается одна математическая модель нейронной сети на основе трёх нейронов-сумматоров Мак-Каллока–Питтса. Ранее для нее был проведен численный анализ особенностей динамики, в ходе которого исследовалась устойчивость различных режимов функционирования сети при малых изменениях текущего состояния, в том числе отмечались значения параметров, при которых динамика системы похожа на хаос. В представленной работе рассматривается задача анализа устойчивости состояний равновесия (стационарного режима функционирования) данной модели нейронной сети при различных значениях синаптических весовых коэффициентов обратной связи. В качестве основного результата приводится доказательство того, что нулевое состояние равновесия соответствующей динамической системы является неустойчивым при любых значениях параметров рассматриваемой модели нейронной сети.

Введение

Искусственные нейронные сети представляют собой системы, имитирующие структуру реальной нервной системы, а также происходящие в ней процессы. На настоящее время предложено большое количество моделей нейроподобных элементов и сетей на их основе, находящих свое применение как для решения прикладных задач, так и при моделировании биофизических процессов в нервной системе.

Одной из первых в середине XX века была предложена модель искусственного нейрона Мак-Каллока–Питтса [1], анализ некоторых особенностей динамики нейронной сети на основе которого приводится в представленной работе. Ранее [2] динамика рассматриваемой модели нейронной сети анализировалась численно, в результате чего выявлены параметры, при которых возможна динамика соответствующей системы, похожая на хаотическую.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (задание № 1.1875.2014/K) .

Рассматривается задача исследования состояний равновесия системы, описывающей динамику данной модели нейронной сети. В статье приводится аналитическое доказательство неустойчивости нулевого состояния равновесия при всех значениях параметров модели.

Статья состоит из двух разделов. В первом из них описывается математическая модель рассматриваемой нейронной сети, конкретизируются значения параметров модели. Во втором разделе формулируется и доказывается основное утверждение о неустойчивости нулевого состояния равновесия.

1. Математическая модель нейронной сети

В этом разделе будет описана используемая модель формального нейрона (нейроподобного элемента) и сети на его основе.

В соответствии с [1], модель нейрона Мак-Каллока–Питтса определяется так: на вход нейрона подаются n вещественных сигналов (чисел) x_1, x_2, $\ldots$, x_n, которые соответственно умножаются на вещественные синаптические веса (коэффициенты) w_1, w_2, $\ldots$, w_n и суммируются. К результату прибавляется вещественное число w_0 (величина смещения). Полученная сумма X является аргументом активационной функции нейрона $f(X)$, значение данной функции будем называть выходом нейрона, его же будем отождествлять с состоянием нейрона.

В статье рассматривается нейронная сеть, состоящая из трех нейронов описанного вида, каждый из которых имеет три входа. На входы каждого нейрона подаются выходные значения всех нейронов сети (в том числе и выходное значение этого же нейрона). Таким образом, динамику соответствующей нейронной сети можно описать следующим соотношением:

$$X(t+1) = F(W \cdot X(t) + I), \tag{1}$$

где $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ — вектор состояния нейросети в момент времени t, представляющий собой совокупность состояний нейронов. Поведение сети определяется матрицей синаптических весов $W = \{w_{ij}\}$, состоящей из 3 строк и 3 столбцов (здесь w_{ij} – синаптический вес связи от i-го нейрона к j-му), вектором смещения $I = (I_1, I_2, I_3)$, а также функцией активации $F(X) = (f(x_1), f(x_2), f(x_3))$ (x_i – компоненты вектора состояния сети X).

Рассматриваемая в статье нейронная сеть по своей структуре аналогична рассмотренной в работе [3]. Матрица синаптических весов имеет следующий вид:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & p_0 & -1 \\ 0 & 1 & p_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

При этом p_0 и p_1 — вещественные параметры (весовые коэффициенты обратных синаптических связей), относительно которых и будет исследоваться динамика описанной нейронной сети (системы).

В качестве функции активации рассматривается линейная функция с насыщением, задаваемая следующим образом:

$$f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{2}. \tag{3}$$

В работе предполагается рассмотреть нейронную сеть, для которой вектор смещения I нулевой. При этом отметим, что используемый в работе подход к исследованию динамики нейронной сети описанного вида может быть применен и для сетей на основе нейрона-сумматора с ненулевым смещением.

Таким образом, в дальнейшем в статье будет рассматриваться нейронная сеть, динамика которой может быть описана системой

$$X(t+1) = F(W \cdot X(t)), \tag{4}$$

где $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ — вектор состояния нейросети в момент времени t, матрица синаптических весов W имеет вид (2), компоненты активационной функции $F(X) = (f(x_1), f(x_2), f(x_3))$ вида (3).

Легко видеть, что при любых значениях параметров p_0 и p_1 данная система имеет неподвижную точку $(0,0,0)$. Зададимся вопросом об устойчивости данной неподвижной точки.

2. Анализ устойчивости нулевого состояния равновесия

В данном разделе будет описано исследование неподвижной точки рассматриваемой нейронной сети на устойчивость.

Рассмотрим нейронную сеть, описываемую системой (4). Как уже было отмечено, точка $(0,0,0)$ является неподвижной при всех значениях параметров p_0 и p_1 (это соответствует стационарному режиму динамики данной нейронной сети).

Теорема 1. *Неподвижная точка* $(0,0,0)$ *является неустойчивой при любых значениях коэффициентов обратной синаптической связи* (p_0, p_1).

Доказательство. Найдем характеристический многочлен P матрицы W:

$$W - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & p_0-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & p_1-\lambda \end{pmatrix}. \tag{5}$$

$$P(\lambda) = \det(W - \lambda E) = (1-\lambda)((p_0-\lambda)(p_1-\lambda)+1) + (p_1-\lambda). \tag{6}$$

Критерием устойчивости нулевой неподвижной точки является принадлежность корней характеристического многочлена $P(\lambda)$ (собственных значений матрицы (5)) внутренности единичного круга $|\lambda| < 1$.

Воспользуемся преобразованием комплексной плоскости

$$x \to \lambda = \frac{x+1}{x-1}, \tag{7}$$

переводящим левую комплексную полуплоскость во внутренность единичного круга: корни многочлена $P(\lambda)$ лежат внутри единичного круга тогда и только тогда, когда корни многочлена

$$Q(x) = (1-x)^3 P\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \tag{8}$$

лежат в левой комплексной полуплоскости.

После подстановки (7) в характеристический многочлен $P(\lambda)$ и умножения на $(1-x)^3$ получим:

$$Q(x) = -2[((p_0-1)x-(p_0+1))((p_1-1)x-(p_1+1))+ \\ +(x-1)^2]+(x-1)^2((p_1-1)x-(p_1+1)). \tag{9}$$

После элементарных преобразований многочлен Q приобретает следующий вид:

$$Q(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} c_0 &= p_1 - 1, \\ c_1 &= -2p_0p_1 + 2p_0 - p_1 - 3, \\ c_2 &= 4p_0p_1 + 3p_1 + 5, \\ c_3 &= -2p_0p_1 - 2p_0 - 3p_1 - 5. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, для исследования нулевого состояния равновесия на устойчивость необходимо выяснить, при каких значениях параметров p_0 и p_1 корни многочлена (10) лежат в левой комплексной полуплоскости.

Воспользуемся критерием Рауса–Гурвица [4] для данного кубического многочлена: его корни лежат в левой комплексной полуплоскости тогда и только тогда, когда $\Delta = c_1c_2 - c_0c_3 > 0$, а коэффициенты c_0, c_1, c_2, c_3 имеют один и тот же знак. Рассмотрим случаи положительных и отрицательных значений коэффициентов (11).

Первый случай: c_0, c_1, c_2, c_3 положительны. Заметим, что тогда их сумма также положительна:

$$c_1 + c_2 + c_3 = (-2p_0p_1 + 2p_0 - p_1 - 3) + (4p_0p_1 + 3p_1 + 5) + \\ +(-2p_0p_1 - 2p_0 - 3p_1 - 5) = -p_1 - 3 > 0. \tag{12}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что $p_1 < -3$. В то же время из условия $c_0 > 0$ следует, что $p_1 > 1$. Таким образом, в данном случае условие критерия Рауса–Гурвица не выполняется.

Второй случай: c_0, c_1, c_2, c_3 отрицательны.

Из условия $c_0 < 0$ следует, что $p_1 < 1$.

Также отметим, что сумма $c_1 + c_2 + c_3 = -p_1 - 3 < 0$, откуда аналогично (12) получаем второе ограничение: $p_1 > -3$.

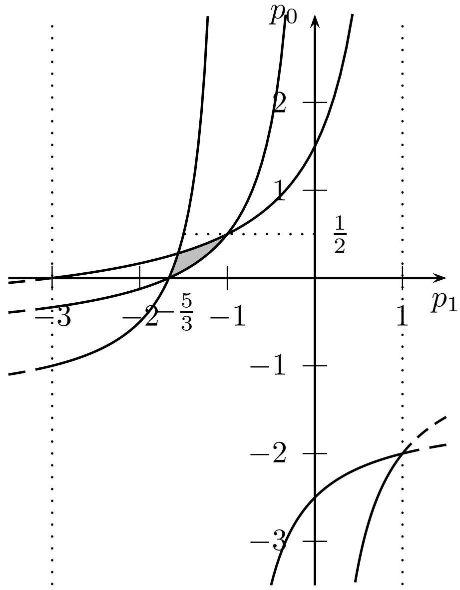
Несложно убедиться в том, что условия $c_1 < 0$, $c_2 < 0$, $c_3 < 0$ равносильны следующим:

$$p_0 < -\frac{1}{2} - \frac{2}{p_1 - 1}, \tag{13}$$

$$4p_0p_1 + 3p_1 + 5 < 0, \tag{14}$$

$$-2p_0p_1 - 2p_0 - 3p_1 - 5 < 0. \tag{15}$$

Полученное ограничение $p_1 \in (-3, 1)$ и неравенства (13)–(15) задают следующую область D в диапазоне значений $p_0 \in (0; 1/2)$, $p_1 \in (-5/3; -1)$:



Рассмотрим оставшееся условие критерия Рауса–Гурвица: $\Delta = c_1c_2 - c_0c_3 > 0$. Подставляя найденные ранее значения коэффициентов, после преобразования получим неравенство:

$$F(p_0, p_1) = 4p_0^2p_1^2 + 4p_0p_1^2 - 4p_0^2p_1 + 8p_0p_1 + p_0 + 6p_1 + 10 < 0. \tag{16}$$

Для доказательства неустойчивости нулевого решения исходной системы достаточно показать, что условие (16) в области D не выполняется.

При ограничениях на параметры из области D ($p_0 \in (0; 1/2)$, $p_1 \in (-5/3; -1)$) получаем:

$$\frac{\partial F(p_0, p_1)}{\partial p_1} = 8p_0^2p_1 + 8p_0p_1 - 4p_0^2 + 8p_0 + 6 = 8p_0^2p_1 + 8p_0(p_1 + 1) - 4p_0^2 + 6. \tag{17}$$

Также при упомянутых ограничениях на параметры p_0 и p_1 несложно убедиться в том, что $8p_0^2p_1 > -10/3$, $-4p_0^2 > -1$, а при дополнительном условии $p_0 < 5/16$ также $8p_0(p_1 + 1) > -4/3$. Тогда

$$\frac{\partial F(p_0, p_1)}{\partial p_1} > -\frac{10}{3} - \frac{4}{3} - 1 + 6 = \frac{1}{3} > 0. \tag{18}$$

Таким образом, $F(p_0, p_1)$ возрастает по p_1 в части области D, расположенной в прямоугольнике $p_0 \in (0; 5/16)$, $p_1 \in (-5/3; -1)$. Отсюда следует, что если выполнено условие $F(p_0, p_1) \geqslant 0$ при некотором $(\tilde{p}_0, \tilde{p}_1)$ из данного прямоугольника, то $F(\tilde{p}_0, p_1) > 0$ при всех $p_1 > \tilde{p}_1$ (при $p_1 \in (-5/3; -1)$).

Легко видеть, что $F\left(p_0, -\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{p_0}{9}(160p_0 - 11)$. Отсюда непосредственно следует, что $F(p_0, p_1) > 0$ в той части области D, которая расположена в диапазоне значений параметра $11/160 < p_0 < 5/16$.

Часть области D при $p_0 \leqslant 11/160$ слева ограничена кривой $p_0 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{p_1+1}$. Докажем, что на этой границе функция F принимает неотрицательные значения (отсюда непосредственно будет следовать, что $F(p_0, p_1) \geqslant 0$ в области D при условии $0 < p_0 < 11/160$).

Из условия $p_0 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{p_1+1}$ получим: $p_1 = -\dfrac{5+2p_0}{3+2p_0}$. Заметим, что в ограничениях на параметры из области D выражение $F\left(p_0, -\dfrac{5+2p_0}{3+2p_0}\right)$ имеет тот же знак, что и многочлен $G(p_0) = (3+2p_0)^2 F\left(p_0, -\dfrac{5+2p_0}{3+2p_0}\right)$.

В то же время $G(p_0) = 32p_0^4 + 132p_0^3 + 140p_0^2 + 13p_0 \geqslant 0$ при неотрицательных p_0 (а значит, что и при $p_0 \in [0, 11/160]$).

Осталось доказать, что $F(p_0, p_1) \geqslant 0$ в области D при ограничении $p_0 \in [5/16, 1/2]$. Сгруппируем:

$$F(p_0, p_1) = 4p_0^2 p_1^2 + 4p_0 p_1^2 + 4p_0(2 - p_0)p_1 + p_0 + 6p_1 + 10.$$

Несложно доказать, что при рассматриваемых ограничениях на коэффициент p_0 выполняются неравенства: $4p_0(2-p_0) \geqslant 3$, $4p_0^2 \geqslant 25/64$, $4p_0 p_1^2 \geqslant 5/4$. Также заметим, что при $p_0 \in [5/16, 1/2]$ рассматриваемая область D слева ограничена кривой $p_0 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{p_1 - 1}$, откуда при заданных значениях p_0 несложно получить ограничение $p_1 \geqslant -19/13$.

Разобьем множество значений параметра p_1 на несколько промежутков и на каждом из них докажем неравенство $F(p_0, p_1) \geqslant 0$ при ограничении $p_0 \in [5/16, 1/2]$.

1) $p_1 \in [-19/13, -4/3]$.

Здесь выполняются следующие неравенства:

$$4p_0^2 p_1^2 \geqslant \frac{25}{36}, \quad 4p_0 p_1^2 \geqslant \frac{20}{9}, \quad 4p_0(2-p_0)p_1 \geqslant -3 \cdot \frac{19}{13}, \quad 6p_1 + 10 \geqslant \frac{16}{13}, \tag{19}$$

откуда

$$F(p_0, p_1) \geqslant \frac{25}{36} + \frac{16}{9} - \frac{57}{13} + \frac{5}{16} + \frac{16}{13} = \frac{141}{144 \cdot 13} > 0. \tag{20}$$

2) $p_1 \in (-4/3, -5/4]$.

При данных условиях выполняются ограничения:

$$4p_0^2 p_1^2 \geqslant \frac{625}{1024}, \quad 4p_0 p_1^2 \geqslant \frac{125}{64}, \quad 4p_0(2-p_0)p_1 \geqslant -4, \quad 6p_1 + 10 \geqslant 2. \tag{21}$$

$$F(p_0, p_1) \geqslant \frac{625}{1024} + \frac{125}{64} - 4 + \frac{5}{16} + 2 = \frac{625}{1024} + \frac{5}{16} - \frac{3}{64} > 0. \tag{22}$$

3) $p_1 \in (-5/4, -1]$.

Аналогично показываем:

$$4p_0^2 p_1^2 \geqslant \frac{25}{64}, \quad 4p_0 p_1^2 \geqslant \frac{5}{4}, \quad 4p_0(2-p_0)p_1 \geqslant -\frac{15}{4}, \quad 6p_1 + 10 \geqslant \frac{5}{2}. \tag{23}$$

$$F(p_0, p_1) \geqslant \frac{25}{64} + \frac{5}{4} - \frac{15}{4} + \frac{5}{16} + \frac{5}{2} = \frac{25}{64} + \frac{5}{16} > 0. \tag{24}$$

Таким образом, $F(p_0, p_1) \geqslant 0$ в области D. Отсюда следует, что условие критерия Рауса–Гурвица $\Delta = c_1c_2 - c_0c_3 > 0$ (в силу введенных обозначений эквивалентное неравенству $F(p_0, p_1) < 0$) нарушается, поэтому нулевое решение системы неустойчиво при всех значениях параметров (p_0, p_1).

□

Список литературы

1. *Wasserman P.D.* Neural Computing, theory and Practice. Van Nostrand Reinhold, New York, 1989.

2. *Богомолов Ю. В.* О хаотическом поведении одной модели нейронной сети // Моделирование и анализ информационных систем. 2003. Т. 10, № 2. С. 35–40. [*Bogomolov Yu. V.* O khaoticheskom povedenii odnoy modeli neyronnoy seti // Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem. 2003. T. 10, № 2. S. 35–40 (in Russian)].

3. *Radu Dogaru, A.T. Murgan, Daniel Ioan.* Robust Oscillations and Bifurcations in Cellular Neural Networks // Proceedings of IEEE Int. Workshop on Cellular Neural Networks and Their Applications (CNNA'94). Rome, 1994. P. 297–302.

4. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. 304 с. (*Jury E.I.* Innors and Stability of Dynamic Systems. New York: Wiley, 1974.)

On the Equilibrium State Stability of a Neural Network Model

Bogomolov Y. V.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: neural network, stability

In the paper, a neural network model based on three McCulloch–Pitts adder neurons is considered. Previously, the features of the model dynamics were numerically analyzed and the stability of various dynamic modes of the network with small changes of the current state was studied, including the detection of parameters specific for the chaotic system dynamics. In the paper, the stability problem of the neural network equilibrium states (steady operating mode) is considered for different values of feedback synaptic weight coefficients. An analytic proof of the zero equilibrium state instability for the corresponding dynamic system for all parameter values of the neural network is presented as the main result of the article.

Сведения об авторе:
Богомолов Юрий Викторович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
старший преподаватель кафедры дискретного анализа