Модел. и анализ информ. систем. Т. **18**, № **4** (2011) 34–44

УДК 519.71+004.021

Построение приближений бисимуляции в односчетчиковых сетях

Башкин В.А.[1]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: bas@uniyar.ac.ru

получена 29 сентября 2011 года

Ключевые слова: односчетчиковые сети, сети Петри, бисимуляция, однопериодический базис

Односчетчиковые сети представляют собой конечные автоматы с дополнительным целочисленным неотрицательным счетчиком. Переход управляющего автомата увеличивает или уменьшает значение счетчика, при этом уменьшение возможно только в том случае, когда результат будет неотрицательным; проверка на ноль отсутствует. Односчетчиковые сети эквивалентны по выразительной мощности сетям Петри с не более чем одной неограниченной позицией, а также магазинным автоматам с односимвольным стековым алфавитом.

В работе представлен метод приближения наибольшей бисимуляции в односчетчиковой сети, основанный на использовании однопериодической символьной арифметики и понятия расслоенной бисимуляции.

1. Введение

Односчетчиковые сети (Сети Петри с не более чем одной неограниченной позицией; магазинные автоматы с односимвольным стековым алфавитом) являются достаточно известной моделью вычислений. Ограничение на число счетчиков делает их менее выразительными, чем обыкновенные сети Петри, однако существенно облегчает анализ. Проблемы достижимости и бисимулярности для односчетчиковых сетей рассматривались в работах [2, 12, 13, 7].

Максимальное допустимое число неограниченных счетчиков — важный параметр, который порождает несколько содержательных иерархий классов в теории сетей Петри. Он позволяет установить ряд интересных границ сложности и разрешимости. Например, односчетчиковые сети являются наибольшим классом счетчиковых сетей с разрешимой бисимулярностью [11], двухсчетчиковые сети — наибольший класс с полулинейной достижимостью [8]. В более выразительном случае (автоматы с проверкой на ноль) односчетчиковые системы — наибольший класс

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00277, 11-01-00737, 11-07-00549).

с разрешимой эквивалентностью языков [17]. Заметим, что конструктивные части всех упомянутых результатов были получены путем обнаружения какой-либо периодичности соответствующего бесконечного множества состояний.

В работе [3] нами была доказана специфическая периодичность всякого одномерного счетчика, обладающего свойством полулинейности. Для этого был использован теоретико-числовой подход, основанный на числах Фробениуса (решении задачи Фробениуса о монетах, полученном Сильвестром в [16]). Было показано, что любое полулинейное множество натуральных чисел может быть представлено при помощи так называемого одноопериодического базиса: объединения конечного множества и конечного набора одноопериодических линейных множеств с одинаковым периодом. Одноопериодический базис является нормальной формой и обладает рядом конструктивных свойств, которые позволяют использовать его в качестве эффективного инструмента символьных вычислений.

В данной работе одноопериодические базисы применены для приближенного решения проблемы построения конечного символьного представления отношения бисимуляции состояний ($\sim$) односчетчиковой сети. Эта проблема является более сложной, чем хорошо изученная разрешимая [11] проблема проверки бисимулярности двух данных состояний сети, поскольку требует рассмотрения всего (в общем случае бесконечного) множества классов эквивалентности.

Насколько нам известно, вычислимость наибольшей бисимуляции остается открытой проблемой. В данной работе мы представляем специфический символьный метод аппроксимации отношения наибольшей бисимуляции, основанный на использовании одноопериодической арифметики [3] и понятия расслоенной бисимуляции [10]. Показано, что одноопериодические базисы позволяют достаточно эффективно работать с бесконечными полулинейными множествами разметок (состояний сети). Доказано, что в случае бисимулярности исходной сети некоторой конечной системе предложенный алгоритм за конечное число шагов построит не приближение, а само отношение $\sim$ для данной сети.

2. Предварительные сведения

1. Односчетчиковые сети

Через Nat обозначим множество неотрицательных целых чисел.

Односчетчиковой сетью называется набор $N = (Q, T, l)$, где Q — конечное множество управляющих состояний, $T \subset Q \times Q \times \mathbf{Z}$ — конечное множество переходов, $l : T \to \Sigma$ — помечающая функция, Σ — конечный алфавит имен (меток) действий.

Состояние сети описывается парой (q, c), где $q \in Q$ — текущее управляющее состояние, $c \in Nat$ — текущее значение счетчика. Переход $t = (q, q', z)$ *активен* в состоянии (q, c), если $c + z \geq 0$. Активный переход может *сработать*, переводя сеть в состояние $(q', c + z)$ (обозначается $(q, c) \xrightarrow{t} (q', c + z)$).

Для перехода $t = (q, q', z)$ обозначим $start(t) = q$, $fin(t) = q'$, $\delta(t) = z$. Определим пред- и постусловие перехода: если $z < 0$, то $\delta^-(t) = -z$ и $\delta^+(t) = 0$; если $z \geq 0$, то $\delta^-(t) = 0$ и $\delta^+(t) = z$.

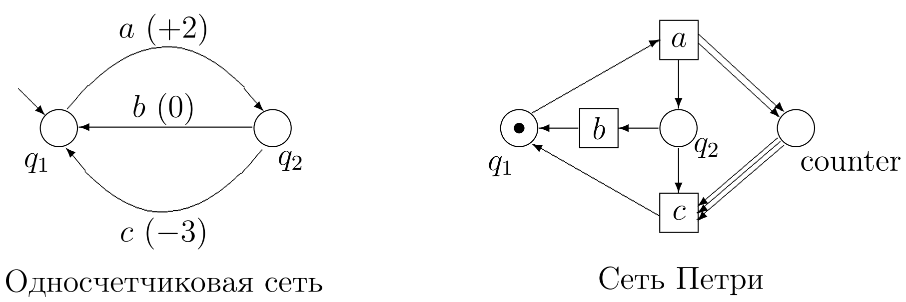

Рис. 1. Односчетчиковая сеть и эквивалентная сеть Петри

Для последовательности переходов $U = t_1.t_2 \dots t_{n-1}.t_n$ также определим её пред- и постусловие: ${}^\bullet U = {}^\bullet(t_2 \dots t_{n-1}.t_n) + |\delta(t_1)|$ при $\delta(t_1) < 0$ и ${}^\bullet U = {}^\bullet(t_2 \dots t_{n-1}.t_n) \ominus \delta(t_1)$ при $\delta(t_1) \geq 0$; $U^\bullet = (t_1.t_2 \dots t_{n-1})^\bullet \ominus |\delta(t_n)|$ при $\delta(t_n) < 0$ и $U^\bullet = (t_1.t_2 \dots t_{n-1})^\bullet + \delta(t_n)$ при $\delta(t_n) \geq 0$ (где $\ominus$ — усечённое вычитание до нуля).

Внешний наблюдатель в момент срабатывания перехода t видит только его метку $l(t)$ (то есть он не может различить срабатывания переходов с одинаковой меткой).

Односчетчиковые сети эквивалентны сетям Петри с не более чем одной неограниченной позицией. Граф достижимости односчетчиковой сети с заданным начальным состоянием представляет собой бесконечную (в общем случае) систему помеченных переходов.

Пример односчетчиковой сети и эквивалентной ей сети Петри приведен на Рис. 1. Здесь у односчетчиковой сети два управляющих состояния (q_1 и q_2) и три перехода ($(q_1, q_2, +2)$, $(q_2, q_1, 0)$ и $(q_2, q_1, -3)$). У эквивалентной сети Петри три позиции: две безопасные управляющие позиции и один неограниченный счетчик.

2. Бисимуляции

Обозначим множество состояний сети, достижимых от состояния M_0, как $\mathcal{R}(N, M_0)$.

Отношение $R \subseteq \mathcal{R}(N, M_0) \times \mathcal{R}(N, M_0)$ называется *бисимуляцией* (обладает *свойством переноса*), если для любой пары $(M_1, M_2) \in R$ и любого символа $a \in \Sigma$:

- если $M_1 \xrightarrow{a} M_1'$ то $M_2 \xrightarrow{a} M_2'$, где $(M_1', M_2') \in R$; и
- если $M_2 \xrightarrow{a} M_2'$ то $M_1 \xrightarrow{a} M_1'$, где $(M_1', M_2') \in R$.

Понятие бисимуляционной эквивалентности было введенно Р. Милнером [14] и Д. Парком [15] и является в настоящее время классическим средством анализа систем, в том числе и систем с бесконечным числом состояний. Интуитивно, две системы бисимуляционно-эквивалентны, если они могут имитировать друг друга.

Объединение всех бисимуляций обозначается как $\sim$. Известно, что для любой сети отношение $\sim$ является бисимуляцией.

Известно [9], что проблема бисимулярности неразрешима для двухсчетчиковых сетей и разрешима для односчетчиковых сетей. Эта проблема формулируется следующим образом:

Проблема 1. *(Бисимуляция) Для данных $M_1, M_2 \in \mathcal{R}(N, M_0)$ проверить, выполняется ли $M_1 \sim M_2$.*

Для пары состояний односчетчиковой сети это может быть проделано при помощи процедуры, строящей так называемое дерево расширений [11].

Глобальная версия проблемы бисимулярности учитывает (возможно, бесконечное) множество *всех* пар бисимулярных разметок данной сети.

Проблема 2. *(Максимальная бисимуляция) Построить эффективное представление множества*

$$(\sim) = \{(M_1, M_2) \mid M_1, M_2 \in \mathcal{R}(N, M_0),\ M_1 \sim M_2\}.$$

Здесь под "эффективностью" понимается эффективная вычислимость. Очевидно, для неё требуется какое-то конечное символьное представление: формула арифметики Пресбургера, периодическое или аффинное ограничение и т.п. Мы будем использовать однопериодические базисы.

3. Полулинейные множества над *Nat* (однопериодическая арифметика)

Для множества k–мерных векторов $M \subseteq Nat^k$ и вектора $m \in Nat^k$ определим операции "сдвига вправо" и "сдвига влево": $M \triangleright m =_{\text{def}} \{m' + m \mid m' \in M\}$, $M \triangleleft m =_{\text{def}} \{m' - m \mid m' \in M\ \wedge\ m' \geq m\}$.

Множество $m \subseteq Nat^k$ называется *линейным*, если оно представимо в виде $m = \{v + n_1 w_1 + \ldots + n_l w_l \mid n_1, \ldots, n_l \in Nat\}$, где $v, w_1, \ldots, w_l \in Nat^k$ — фиксированы.

Множество $m \subseteq Nat^k$ называется *полулинейным*, если оно является объединением конечного числа линейных множеств.

Если $M, M' \subseteq Nat^k$ — полулинейные множества, то $Nat^k \setminus M$ и $M \cap M'$ также являются полулинейными [6]. Операции сдвига также сохраняют полулинейность. Известно, что полулинейные множества — это в точности те множества, которые описываются арифметикой Пресбургера.

Пусть $x, y \in Nat$. Через НОД(x, y) и НОК(x, y) обозначим наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел x и y.

Лемма 1. *[3] Пусть $m \subseteq Nat$ — линейное множество, такое что $m = \{v + n_1 w_1 + n_2 w_2 \mid n_1, n_2 \in Nat\}$, где $v, w_1, w_2 \in Nat$ фиксированы. Тогда, обозначив $p =$ НОД(w_1, w_2) и $b = v + p(\frac{w_1}{p} - 1)(\frac{w_2}{p} - 1)$, имеем:*

$$m = m_0 \cup m_\infty,\ \textit{где}$$
$$m_0 \subseteq \big\{b - kp \mid k \in \{1, 2, \ldots, (\tfrac{w_1}{p} - 1)(\tfrac{w_2}{p} - 1)\}\big\}, m_\infty = \big\{b + kp \mid k \in Nat\big\}.$$

В доказательстве леммы используется теорема теории чисел (решение Сильвестра [16] задачи Фробениуса о монетах) о том, что для любых натуральных a, b и c, таких что a и b взаимно простые, а $c \geq (a-1)(b-1)$, уравнение $ax + by = c$ имеет натуральное решение.

Таким образом, в одномерном случае из линейности следует однопериодичность. Лемма 1 может быть обобщена:

Теорема 1. *[3] Любое полулинейное множество $m \subseteq Nat$ может быть представлено как объединение конечного множества и конечного набора линейных одноопериодических множеств с одинаковым периодом: для некоторых $p, b \in Nat$ существует* характеристическое множество $\Psi \subseteq \{b, b+1, b+2, \ldots, b+(p-1)\}$, *такое что*

$$m = m_0 \cup m_\infty, \quad \text{где} \ \ m_0 \subseteq \bigcup_{k=1}^{[\frac{b}{p}]} \big(\Psi \triangleleft kp\big), \ m_\infty = \bigcup_{k=0}^{\infty} \big(\Psi \triangleright kp\big).$$

Рассмотрим двоичный вектор v длины p, такой что $v[i] = 0$ для $b + i \notin \Psi$ и $v[i] = 1$ для $b + i \in \Psi$. Теорема утверждает, что этот вектор является "битовой маской" для периодического "закрашивания" натурального ряда справа от числа b. Таким образом, мы можем использовать в качестве конечного символьного представления произвольного полулинейного одномерного множества m его *одноопериодический базис* (m_0, b, p, v), состоящий из конечного *базового множества* m_0, *базового элемента* b, *длины периода* p, *вектора периода* v.

Данное представление проще формул арифметики Пресбургера [4, 5], однако может быть использовано только в одномерном случае.

Пример 1. $m = \{2 + 3k \mid k \in Nat\} \cup \{6k_1 + 9k_2 \mid k_1, k_2 \in Nat\}$.

$$m = \{0, \quad 2, \qquad 5, 6, \quad 8, 9, \quad 11, 12, \quad 14, 15, \quad \ldots\}.$$

Одноопериодический базис: $Z = (\{0, 2\}, 4, 3, (0, 1, 1))$.

Базис $Z = (m_0, b, p, v)$ полулинейного множества $m \subseteq Nat$ называется *минимальным*, если для любого базиса $Z' = (m'_0, b', p', v')$ множества m выполняется $p < p'$ или ($p = p'$ и $b \leq b'$). Известно [3], что для любого одномерного полулинейного множества минимальный базис существует и единственен; произвольный базис может быть преобразован в минимальный за полиномиальное время относительно $b * p$ (обозначим соответствующий алгоритм как Mmz).

Минимальный базис множества m обозначим как $Base(m)$; множество, определяемое базисом Z, обозначим как $Set(Z)$.

Для двоичных векторов $v, v' \in \{0, 1\}^p$ через $NOT(v)$, $AND(v, v')$ и $OR(v, v')$ обозначим покомпонентное умножение, сложение и отрицание:

$$AND(v, v')[i] =_{\text{def}} min\{v[i], v'[i]\}, \ OR(v, v')[i] =_{\text{def}} max\{v[i], v'[i]\},$$
$$NOT(v)[i] =_{\text{def}} (1 - v[i]).$$

Через v^k обозначим конкатенацию k векторов v.

Теоретико-множественные операции и отношения могут эффективно вычисляться не над множествами, а непосредственно над их одноопериодическими базисами.

Теорема 2. *[3] Пусть $m, m' \subseteq Nat$ — полулинейные множества, $Base(m) = (m_0, b, p, v)$, $Base(m') = (m'_0, b', p', v')$, $y \in Nat$. Обозначим $K = max\{b, b'\}$ и $L = НОК(p, p')$. Пусть $K = b + ip = b' + jp'$ для некоторых $i, j \in Nat$. Тогда:*

1. *$Base(Nat) = (\varnothing, 0, 1, (1))$;*

2. $Base(m \cup m') = Mmz\big(\{x \in m \cup m' \mid x < K\}, K, L, OR(v^{\frac{L}{p}}, (v')^{\frac{L}{p'}})\big)$;
3. $Base(m \cap m') = Mmz\big(\{x \in m \cap m' \mid x < K\}, K, L, AND(v^{\frac{L}{p}}, (v')^{\frac{L}{p'}})\big)$;
4. $Base(m \setminus m') = Mmz\big(\{x \in m \setminus m' \mid x < K\}, K, L,$
   $AND(v^{\frac{L}{p}}, NOT((v')^{\frac{L}{p'}}))\big)$;
5. $m \subseteq m' \iff AND(v^{\frac{L}{p}}, (v')^{\frac{L}{p'}}) = v^{\frac{L}{p}} \ \wedge\ \forall x \in m\ (x < K \Rightarrow x \in m')$;
6. $Base(m \triangleright y) = Mmz(\{x + y \mid x \in m_0\}, b + y, p, v)$;
7. $Base(m \triangleleft y) = Mmz(\{x - y \mid x \in m, x < B, x \geq y\}, B, p, v)$, *где*
   $B = min_{k \in Nat}\{b + kp - y \mid b + kp - y \geq 0\}$.

Все приведенные операции эффективны, то есть выполняются за полиномиальное время относительно размеров входных базисов [3]. Ограничение $K = b + ip = b' + jp'$ носит технический характер — оно позволяет записать формулы в более краткой форме. Это ограничение не является существенным — мы легко можем трансформировать *любую* пару полулинейных базисов таким образом, чтобы она удовлетворяла данному условию (“сдвинув” вправо базовый элемент одного из базисов).

3. Построение приближений бисимуляции

Расслоенная бисимуляция, или i-бисимуляция (обозначается $\sim_i$), определяется индуктивно:

Во-первых, положим $M_1 \sim_0 M_2$ для любых $M_1, M_2 \in \mathcal{R}(N, M_0)$. Далее, для любого $n \in Nat$ положим $M_1 \sim_{n+1} M_2$, если для любого $a \in \Sigma$:

- если $M_1 \xrightarrow{a} M_1'$, то $M_2 \xrightarrow{a} M_2'$, где $M_1' \sim_n M_2'$; и
- если $M_2 \xrightarrow{a} M_2'$, то $M_1 \xrightarrow{a} M_1'$, где $M_1' \sim_n M_2'$.

Известно [10], что для любого $i \in Nat$ отношение $\sim_i$ является эквивалентностью, более того, $\sim_i \subseteq \sim_{i-1}$. Также известно, что $M_1 \sim M_2 \ \Leftrightarrow\ M_1 \sim_i M_2$ для любого $i \in Nat$. Кроме того, если $\sim_i = \sim_{i-1}$, то $\sim_i = \sim \infty = \sim$.

Расслоенная i-бисимуляция (множество i-бисимулярных пар состояний) может быть естественным образом представлена конечным множеством непересекающихся классов эквивалентности на множестве достижимых состояний:

$$Cl(\sim_i) = \{E_i^1, E_i^2, \ldots, E_i^{m_i}\},$$

где $E_i^j \subseteq \mathcal{R}(N, M_0)$, $E_i^1 \cup \ldots \cup E_i^{m_i} = \mathcal{R}(N, M_0)$, $E_i^j \cap E_i^k = \varnothing$ для $j \neq k$, и для любых $M \in E_i^j, M' \in E_i^k$ мы имеем $M \sim_i M'$ при $j = k$ и $M \not\sim_i M'$ в противном случае.

Напомним, что множество $\mathcal{R}(N, M_0)$ полулинейно у любой одно- и двухсчетчиковой сети [8] (более того, у односчетчиковой сети оно может быть эффективно вычислено при помощи однопериодических базисов [3]). Для произвольного управляющего состояния множество значений счетчика, i-бисимулярных данному значению, также полулинейно.

Утверждение 1. *Для любых $i, j \in Nat$, таких что $1 \le j \le m_i$, и для любого $q \in Q$ множество чисел $\{c \in Nat \mid (q,c) \in E_i^j\}$ полулинейно.*

Доказательство. Утверждение верно, поскольку отношение $(\sim_i)$ индуктивно построено из тривиально полулинейного отношения $(\sim_0)$ посредством конечного числа трансформаций (переходов). □

Итак, мы рассматриваем только полулинейные подмножества $\mathcal{R}(N, M_0)$. Для удобства обозначим полулинейное множество состояний, соответствующее данному управляющему состоянию $q \in Q$, как пару $(q|A)$, где q — управляющее состояние, A — однопериодический базис полулинейного множества соответствующих состоянию q значений счетчика. Например, обозначив $n = |Q|$, имеем

$$E_i^j = \Big\{ \big(q_1 \big| E_i^j(q_1)\big), \big(q_2 \big| E_i^j(q_2)\big), \ldots, \big(q_n \big| E_i^j(q_n)\big) \Big\}.$$

Здесь $E_i^j(q_k)$ обозначает однопериодический базис полулинейного множества значений счетчика для всех состояний из E_i^j с управляющим состоянием q_k.

Для полулинейного множества состояний $S \subseteq \mathcal{R}(N, M_0)$ и перехода $t \in T$ определим “обратное расширение” множества состояний:

$$Back(S,t) = S \cup \Big\{ \Big(start(t) \Big| S\big(fin(t)\big) \lhd \delta^+(t) \rhd \delta^-(t) \Big) \Big\}.$$

Неформально, $Back(S,t)$ вычисляется из S добавлением всех состояний, обратно достижимых от S посредством t. Это обозначение позволяет нам определить процедуру однопериодического построения $(\sim_{i+1})$ следующим образом:

Теорема 3. *Для любого $E_i^j \in Cl(\sim_i)$ найдутся $E \subseteq Cl(\sim_{i-1})$, $U \subseteq T$, такие что*

$$E_i^j = \bigcup_{S \in E, t \in U} Back(S,t).$$

Доказательство. Доказательство чисто техническое и основано на определениях однопериодической арифметики. □

Поскольку множество $Cl(\sim_{i-1})$ конечно, множество E также конечно, и, следовательно, расслоенное свойство переноса может быть эффективно проверено для любого кандидата E и набора переходов U. Следовательно, мы получили символьный алгоритм вычисления $Cl(\sim_n)$:

Алгоритм 1 (аппроксимация бисимуляции)
Input: Односчетчиковая сеть $N = (Q, T, l)$, состояние M_0, параметр $n \in Nat$.
Output: Однопериодическое представление $Cl(\sim_n)$ расслоенной бисимуляции $\sim_n$.

1. Вычислим однопериодический базис $\mathcal{R}(N, M_0)$ (по Алгоритму 1 из [3]).

2. Вычислим $Cl(\sim_0)$ как однопериодическое представление $\mathcal{R}(N, M_0) \times \mathcal{R}(N, M_0)$, содержащее единственный класс эквивалентности $Id(\mathcal{R}(N, M_0))$.

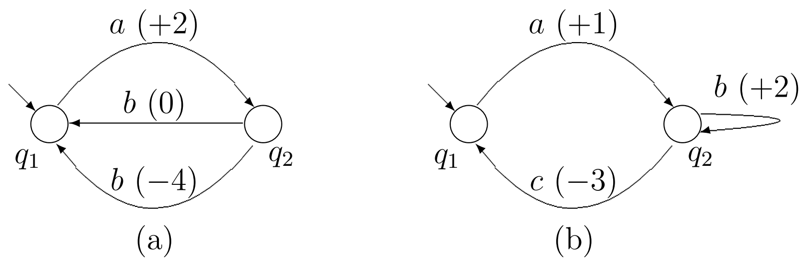

Рис. 2. Сети с конечным (a) и бесконечным (b) множествами классов эквивалентности.

3. Для i от 1 до n выполним:

   Рассмотрим все разбиения-кандидаты множества $Cl(\sim_{i-1})$, полученные посредством всевозможных обратных расширений (их число конечно в силу конечности T), и проверим для них выполнение расслоенного свойства переноса. Выберем наименьшего (относительно вложения) кандидата со свойством переноса в качестве $Cl(\sim_i)$.

Доказательство корректности алгоритма основано на конечности $Cl(\sim_i)$ и T и на вычислимости однопериодических операций. Очевидно, что для его работы требуется экспоненциальный объем памяти (точнее, каждый из шагов 1 и 3 требует экспоненциальной памяти).

Алгоритм может завершиться досрочно, если $Cl(\sim_i) = Cl(\sim_{i-1})$ для некоторого $i \leq n$, и, следовательно, $\sim_i = \sim$ (Пример 2). Однако в общем случае последовательность расслоенных бисимуляций может оказаться бесконечной, так что наш алгоритм не является полуразрешающей процедурой для глобальной бисимуляции, которая в принципе может содержать бесконечное число классов эквивалентности (Пример 3).

Пример 2. *Рассмотрим сеть на Рис. 2 (a). Здесь*
$\mathcal{R}(N, M_0) = \Big\{ \big(q_1 \big| (\varnothing, 0, 2, (1,0))\big), \big(q_2 \big| (\varnothing, 0, 2, (1,0))\big) \Big\}$.
Применив алгоритм, получим:
$Cl(\sim_0) = \Big\{E_0^1\Big\}$, *где* $E_0^1 = \big\{ \big(q_1 \big| (\varnothing, 0, 2, (1,0))\big), \big(q_2 \big| (\varnothing, 0, 2, (1,0))\big) \big\}$;
$Cl(\sim_1) = \Big\{E_1^1, E_1^2\Big\}$, *где*
$E_1^1 = \big\{ \big(q_1 \big| (\varnothing, 0, 2, (1,0))\big) \big\}, E_1^2 = \big\{ \big(q_2 \big| (\varnothing, 0, 2, (1,0))\big) \big\}$;
$Cl(\sim_2) = Cl(\sim_1)$, *и, следовательно,* $Cl(\sim) = Cl(\sim_1)$.

Пример 3. *Рассмотрим сеть на Рис. 2 (b). Здесь*
$\mathcal{R}(N, M_0) = \Big\{ \big(q_1 \big| (\varnothing, 0, 2, (1,0))\big), \big(q_2 \big| (\varnothing, 0, 2, (0,1))\big) \Big\}$.
Применив алгоритм, получим:
$Cl(\sim_0) = \Big\{E_0^1\Big\}$, *где* $E_0^1 = \big\{ \big(q_1 \big| (\varnothing, 0, 2, (1,0))\big), \big(q_2 \big| (\varnothing, 0, 2, (0,1))\big) \big\}$;
$Cl(\sim_1) = \Big\{E_1^1, E_1^2, E_1^3\Big\}$, *где*

$E_1^1 = \{(q_1|(\varnothing, 0, 2, (1, 0)))\}$, $E_1^2 = \{(q_2|\{1\})\}$, $E_1^3 = \{(q_2|(\varnothing, 2, 2, (0, 1)))\}$;
$Cl(\sim_2) = \Big\{E_2^1, E_2^2, E_2^3, E_2^4, E_2^5\Big\}$, *где*
$E_2^1 = \{(q_1|\{0\})\}$, $E_2^2 = \{(q_1|(\varnothing, 2, 2, (1, 0)))\}$,
$E_2^3 = \{(q_2|\{1\})\}$, $E_2^4 = \{(q_2|\{3\})\}$, $E_2^5 = \{(q_2|(\varnothing, 4, 2, (0, 1)))\}$;
$Cl(\sim_n) = \Big\{E_n^1, \dots, E_n^{n-1}, E_n^n, E_n^{n+1}, \dots, E_n^{2n+1}, E_n^{2n+2}\Big\}$, *где*
$E_n^1 = \{(q_1|\{0\})\}$, $E_n^{n-1} = \{(q_1|\{2n-4\})\}$, $E_n^n = \{(q_1|(\varnothing, 2n-2, 2, (1, 0)))\}$, $E_n^{n+1} = \{(q_2|\{1\})\}$, $E_n^{2n+1} = \{(q_2|\{2n-1\})\}$, $E_n^{2n+2} = \{(q_2|(\varnothing, 2n, 2, (0, 1)))\}$.
Интуитивно очевидно, что $Cl(\sim_\infty) = Cl(\sim) = Id(\mathcal{R}(N, M_0))$.

Теорема 4. *Последовательность расслоенных бисимуляций односчетчиковой сети N стабилизируется тогда и только тогда, когда N бисимулярна некоторому конечному автомату.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Верно, поскольку максимальное отношение бисимуляции по построению содержит конечное число классов эквивалентности.

($\Leftarrow$) Предположим противное: последовательность различных расслоенных бисимуляций бесконечна. Тогда для любого $i \in Nat$ выполняется $\sim_i \subset \sim_{i-1}$. То есть по крайней мере один из классов эквивалентности отношения $\sim_{i-1}$ не является классом эквивалентности отношения $\sim_i$. Составлявшие данный класс элементы не могут попасть в другие унаследованные классы эквивалентности, следовательно, они образуют несколько (более одного) новых классов. Таким образом, число классов эквивалентности монотонно растёт с ростом i.

С другой стороны, в силу бисимулярности сети и автомата, а также в силу конечности числа состояний автомата, отношение эквивалентности $\sim$ содержит конечное число классов эквивалентности — противоречие. □

Таким образом, алгоритм 1 также может быть использован для проверки конечности наблюдаемого поведения односчетчиковой системы.

4. Заключение

В данной работе представлен символьный алгоритм построения приближений бисимуляции в односчетчиковых сетях (сетях Петри с не более чем одной неограниченной позицией). В алгоритме используется новый метод конечного символьного представления бесконечных полулинейных множеств натуральных чисел при помощи однопериодических базисов.

Возможными направлениями дальнейших исследований в данной области являются приложения однопериодической арифметики для символьной проверки моделей и анализа поведенческих эквивалентностей. Данный метод уже показал свою применимость в качестве средства решения проблемы достижимости [3] и проблемы глобальной верификации формул темпоральной логики EF [1].

Список литературы

1. *Башкин В.А.* Верификация на основе моделей с одним неограниченным счетчиком // Информационные системы и технологии. 2010. № 4(60). С. 5–12.

2. *Abdulla P.A., Cerans K.* Simulation is decidable for one-counter nets (extended abstract)// Proc. of CONCUR'98. 1998. LNCS 1466. P. 69–153.

3. *Bashkin V.A.* On the single-periodic representation of reachability in one-counter nets // Proc. of CS&P'2009 (Warsaw). 2009. P. 60–71.

4. *Bultan T., Gerber R., Pugh W.* Symbolic model checking of infinite state systems using Presburger arithmetic // Proc. of CAV'97. 1997. LNCS 1254. P. 400–411.

5. *Comon H., Jurski Y.* Multiple counters automata, safety analysis and Presburger arithmetic // Proc. of CAV'98. 1994. LNCS 1427. P. 268–279.

6. *Ginsburg S., Spanier E.H.* Semigroups, Presburger formulas and languages // Pacific Journal of Mathematics. 1966. № 16. P. 285–296.

7. *Goller S., Mayr R., To A.W.* On the Computational Complexity of Verifying One-Counter Processes // Proc. of LICS'2009. 2009. P. 235–244.

8. *Hopcroft J.E., Pansiot J.-J.* On the reachability problem for 5–dimensional vector addition systems // Theor. Comp. Sci. 1979. № 8(2). P. 135–159.

9. *Jančar P.* Decidability questions for bisimilarity of Petri nets and some related problems // Proc. of STACS'94. 1994. LNCS 775. P. 581–592.

10. *Jančar P., Moller F.* Techniques for decidability and undecidability of bisimilarity // Proc. of CONCUR'99. 1999. LNCS 1664. P. 30–45.

11. *Jančar P., Kučera A., Moller F.* Simulation and Bisimulation over One-Counter Processes // Proc. of STACS'2000. 2000. LNCS 1770. P. 334–345.

12. *Jančar P., Kučera A., Moller F., Sawa Z.* DP Lower bounds for equivalence-checking and model-checking of one-counter automata // Inf. Comput. 2004. № 188(1). P. 1–19.

13. *Kučera A.* Efficient verification algorithms for one-counter processes // Proc. of ICALP'2000. 2000. LNCS 1853. P. 317–328.

14. *Milner R.* A Calculus of Communicating Systems // Lecture Notes in Computer Science. 1980. V. 92.

15. *Park D.M.R.* Concurrency and automata on infinite sequences // Lecture Notes in Computer Science. 1981. V. 104.

16. *Sylvester J.J.* Question 7382 // Mathematical Questions with their Solutions, Educational Times. 1884. Vol. 41. P. 21.

17. *Valiant L.* Deterministic One-Counter Automata // Journal of Computer and System Sciences. 1975. № 10. P. 340–350.

Approximating Bisimulation in One-counter Nets

Bashkin V.A.

Keywords: one-counter nets, Petri nets, bisimulation, single-periodic base

One-counter nets are finite-state machines operating on a variable (counter) which ranges over the natural numbers. Every transition can increase or decrease the value of the counter (the decrease is possible only if the result is non-negative, hence zero-testing is not allowed). The class of one-counter nets is equivalent to the class of Petri nets with one unbounded place, and to the class of pushdown automata where the stack alphabet contains one symbol. We present a specific method of approximation of the largest bisimulation of a one-counter net, based on the single-periodic arithmetics and a notion of stratified bisimulation.

Сведения об авторе:
Башкин Владимир Анатольевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
доцент кафедры теоретической информатики