

УДК 517.928 + 517.929

## Импульсный нейрон и нейронный клеточный автомат асимптотически эквивалентны

Копылов В. Д., Дунаева О. А., Мячин М. Л.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

*e-mail: valerii-kopilov@yandex.ru*

*получена 29 мая 2014*

**Ключевые слова:** биологический нейрон, импульсный нейрон с запаздыванием, нейронный клеточный автомат

В работе установлена асимптотическая эквивалентность динамики нейронных сетей, состоящих из импульсных нейронов и нейронных клеточных автоматов различных типов (автогенераторов и детекторов) при соответствующем выборе их параметров и при условии неналожения входных воздействий на каждый нейрон. В первом разделе описаны модель импульсного нейрона-автогенератора и две различные модели импульсного нейрона-детектора. Для этих моделей доказываются утверждения относительно величины латентного периода нейрона при единичном внешнем воздействии. Во втором разделе описана модель нейронного клеточного автомата с автогенераторной динамикой и модификация этой модели, имеющая детекторную динамику. Для этих моделей также доказываются утверждения относительно латентного периода нейронного автомата, находящегося под внешним воздействием. В третьем разделе для импульсных нейронов и нейронных клеточных автоматов различных типов сформулированы и доказаны утверждения относительно условий их асимптотической эквивалентности.

## Введение

Исторически первой импульсной моделью биологического нейрона можно считать модель Ходжкина и Хаксли, описывающую процессы ионного обмена, протекающие в мембране нейрона. Модель Ходжкина–Хаксли хорошо согласуется с экспериментальными данными, но оказывается слишком сложной для ее использования при моделировании нейронных сетей. Многочисленные работы были посвящены воспроизведению наиболее существенных деталей динамики модели Ходжкина–Хаксли в рамках более простых моделей, не описывающих протекающие в мембране электрохимические процессы или описывающих их только в самых общих чертах.

В работе [1] была предложена биологически правдоподобная модель импульсного нейрона, основанная на использовании дифференциального уравнения с запаздыванием и эксплуатирующая феноменологическое представление о задержке

калиевого ионного тока по сравнению с натриевым. Эта модель хорошо согласуется с биологическими данными, достаточно проста и во многих случаях допускает аналитическое исследование систем, состоящих из большого числа взаимодействующих импульсных нейронов. В своем первоначальном варианте модель описывает динамику биологического нейрона-автогенератора, но в работе [16] исходная модель была расширена на случай биологического нейрона-детектора.

В работе [2] была предложена модель синаптического взаимодействия, на основе которой в цикле работ [3–7] были построены кольцевые импульсные нейронные сети, решающие основные задачи планирования волновых режимов — генерирование последовательности импульсов с заданными межимпульсными расстояниями, воспроизведение внешней периодической последовательности импульсов (как результат адаптации синаптических весов), синхронизация колебаний в кольцевых нейронных структурах и т.п.

Получение аналитических результатов для нейронных сетей, состоящих из импульсных нейронов с запаздыванием, связано с построением асимптотического решения системы дифференциально-разностных уравнений, содержащих большой параметр. Тем не менее, все перечисленные выше биологически значимые результаты были получены в результате построения асимптотики нулевого порядка точности по величине, обратной к значению большого параметра. Это наблюдение позволяет упростить процедуру исследования импульсных нейронных сетей, если в качестве их структурного элемента использовать не исходный импульсный нейрон с запаздыванием, а упрощенную модель, непосредственно воспроизводящую результат построения асимптотики нулевого порядка.

В работе [8] была введена автоматная модель (т.н. нейронный клеточный автомат, НКА) биологического нейрона-автогенератора. Позже в работе [9] была введена автоматная модель (т.н. W-нейрон) биологического нейрона-детектора, работающая в дискретном времени. В работе [10] детекторная динамика была воспроизведена в рамках автоматной модели с непрерывным временем, аналогичной НКА.

В работах [8, 11] рассмотрено распространение возбуждения в кольцевых и полносвязных сетях, состоящих из НКА. В работах [12, 13] для сетей, состоящих из W-нейронов, рассмотрены режимы пачечной активности и задача ассоциативной памяти. В работе [10] рассмотрено распространение волны возбуждения по нейронной сети, состоящей из нейронных автоматов, обладающих детекторной динамикой.

Таким образом, многие близкие задачи могут быть решены как на основе импульсных нейронных сетей, составленных из динамических импульсных нейронов с запаздыванием, так и на основе сетей, состоящих из автоматных нейронов. В данной работе исследуется задача об установлении формального соответствия между динамикой импульсного нейрона с запаздыванием и различными автоматными формальными моделями нейрона.

## 1. Модели импульсных нейронов

В данном разделе описаны модель импульсного нейрона-автогенератора и две различные модели импульсного нейрона-детектора. При этом в каждом случае формулируется утверждение относительно латентного периода для нейрона, находящегося

под внешним воздействием, а для нейронов-детекторов даны также доказательства этих утверждений (в работах [15, 16] они приведены без обоснования).

### 1.1. Импульсный нейрон-автогенератор

В работе [1] для моделирования динамики мембранного потенциала биологического нейрона-автогенератора  $u(t) > 0$  было предложено следующее уравнение с запаздыванием:

$$\dot{u}(t) = \lambda [f_K(u(t-1)) - f_{Na}(u(t)) - 1] u(t). \quad (1)$$

Здесь

$$\lambda - \text{большой параметр}, \quad (2)$$

функции  $f_{Na}(u)$  и  $f_K(u)$  отвечают за натриевую и калиевую проводимость и удовлетворяют условиям:

$$f_{Na}(u), f_K(u) - \text{гладкие положительные функции}, \quad (3)$$

$$f_{Na}(u), f_K(u) \rightarrow 0 \text{ монотонно при } u \rightarrow +\infty \text{ быстрее, чем } O(u^{-1}). \quad (4)$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_1 = f_K(0) - 1,$$

$$\alpha_2 = f_{Na}(0) + 1,$$

$$\alpha = f_K(0) - f_{Na}(0) - 1.$$

Будем считать выполненным условие

$$\alpha > 0, \quad (5)$$

гарантирующее неустойчивость нулевого состояния равновесия исходного уравнения.

Начальная задача для уравнения (1) определяется заданием функции  $u(t)$  на произвольном отрезке единичной длины, в качестве которого обычно выбирается отрезок  $[-1, 0]$ . При записи асимптотики для решения  $u(t)$  уравнения (1) символом  $o(1)$  будем обозначать слагаемые, стремящиеся при  $\lambda \rightarrow +\infty$  к нулю равномерно относительно выбора начальной функции  $u(t)|_{t \in [-1, 0]}$ .

Поведение функции  $u(t)$  на начальном отрезке  $t \in [-1, 0]$  задается условием:

$$u(t)|_{t \in [-1, 0]} \in S, \text{ где} \quad (6)$$

$$S = \left\{ \varphi \in C[-1, 0] : \lambda^{-1} \exp[2\alpha \cdot \lambda s] \leq \varphi(s) \leq \lambda^{-1} \exp\left[\frac{\alpha}{2} \cdot \lambda s\right], \varphi(0) = \lambda^{-1} \right\}.$$

В [2] сформулировано и доказано следующее утверждение:

**Утверждение 1.** Пусть для уравнения (1) выполнены ограничения (2)–(5). Тогда для решения  $u(t)$  уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию (6), при  $\lambda \rightarrow +\infty$  имеют место следующие асимптотические равенства:

$$u(t) = \begin{cases} \exp[\lambda \alpha_1(t - t_1 + o(1))], & t \in [t_1, t_2], \\ \exp[-\lambda(t - t_3 - \alpha_1 + o(1))], & t \in [t_3, t_4], \\ \exp[-\lambda \alpha_2(t - t_5 + o(1))], & t \in [t_5, t_6], \\ \exp[\lambda \alpha(t - t_7 - \alpha_2/\alpha + o(1))], & t \in [t_7, t_8], \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} t_1 &= o(1), & t_2 &= 1, \\ t_3 &= t_2 + o(1), & t_4 &= t_3 + \alpha_1, \\ t_5 &= t_4 + o(1), & t_6 &= t_5 + 1, \\ t_7 &= t_6 + o(1), & t_8 &= t_7 + \alpha_2/\alpha. \end{aligned}$$

Опишем кратко структуру приведенного выше асимптотического решения. Длительность восходящего участка спайка (интервал  $[t_1, t_2]$ ) равна единице, а длительность нисходящего участка спайка (интервал  $[t_3, t_4]$ ) определяется параметром  $\alpha_1$ . Длительность процесса перехода нейрона в состояние гиперполяризации (интервал  $[t_5, t_6]$ ) также оказывается единичной, а после этого происходит медленный рост мембранного потенциала (интервал  $[t_7, t_8]$ ). Начало и окончание спайка естественно связать с моментами пересечения решением  $u(t)$  уровня  $u = 1$  (с положительной и отрицательной скоростью соответственно), т.е. спайк начинается в момент времени  $t = o(1)$  и заканчивается в момент времени  $t = t_4 + o(1)$ , а величина

$$T_1 = 1 + \alpha_1$$

определяет продолжительность спайка. Таким образом, спайк нейрона будем связывать с интервалом времени, на котором выполнено неравенство  $u(t) > 1$ . Поскольку  $u(t)|_{[t_8-1, t_8]} \in S$ , то появляется возможность продолжить построение асимптотики для моментов времени  $t > t_8$ , а построенная асимптотика оказывается периодической функцией с периодом, равным  $t_8 = T_2 + o(1)$ , где

$$T_2 = 2 + \alpha_1 + \alpha_2/\alpha.$$

Уравнение (1) описывает изолированный нейрон. Введем модель синаптического взаимодействия нейронов в соответствии с работой [16]. Для этого добавим в уравнение (1) слагаемое  $Q(u)$ , которое будет определять взаимодействие с  $m$  другими нейронами. Будем считать, что медиатор (вещество-посредник в передаче возбуждения) мгновенно появляется в начале спайка нейрона-передатчика, а в момент окончания спайка мгновенно разрушается. Известно, что непосредственно после спайка биологический нейрон не готов к новой генерации импульса (состояние рефрактерности). В модели импульсного нейрона естественно считать, что нейрон находится в состоянии рефрактерности от момента начала спайка и до момента  $T_R$ , когда мембранный потенциал после гиперполяризации впервые достигает заданного значения  $u_R$ .

Пусть  $v_k(t)$  — мембранные потенциалы нейронов-передатчиков. Тогда  $Q(u)$  можно записать в виде:

$$Q(u) = \lambda\alpha H(u) \left( \sum_{k=1}^m q_k \Theta(v_k(t) - 1) \right) u. \quad (7)$$

Здесь  $1 \leq k \leq m$  — номер входа нейрона; параметры  $q_k$  определяют синаптические веса;  $\Theta(\cdot)$  — функция Хевисайда, т.е. величина  $\Theta(v_k(t) - 1)$  — это индикатор, указывающий на присутствие медиатора на входе  $k$ ;  $H(u)$  — функционал, который

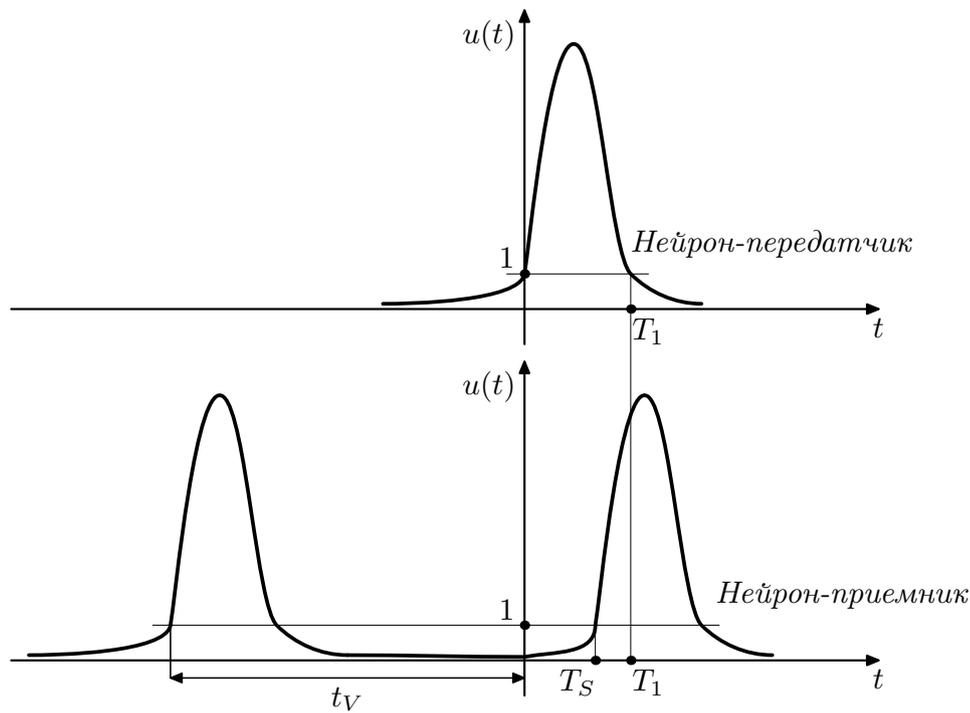


Рис. 1. Взаимодействие двух нейронов-автогенераторов

обеспечивает наличие рефрактерного периода. Например, достаточно следить за интегралом от  $u(t)$  на промежутке времени  $[t - T_R, t]$ :

$$I(u(t)) = \int_{t-T_R}^t u(\tau) d\tau$$

$$H(u) = \begin{cases} 0, & \text{при } I(u) \geq \lambda \\ 1, & \text{при } I(u) < \lambda \end{cases}$$

Тогда уравнение (1) с моделью взаимодействия (7) будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{u} = \lambda \left[ -1 - f_{Na}(u(t)) + f_K(u(t-1)) + \alpha H(u) \left( \sum_{k=1}^m q_k \Theta(v_k(t) - 1) \right) \right] u. \quad (8)$$

Рассмотрим случай взаимодействия двух одинаковых нейронов, описываемых уравнением (8), при котором нейрон-передатчик воздействует на нейрон-приемник с синаптическим весом  $q$  (см. рис. 1).

Поскольку на нейрон-передатчик не оказывают воздействие другие нейроны, для него  $Q(u) \equiv 0$ , т.е. его поведение полностью описывается уравнением (1). Поведение нейрона-приемника описано уравнением (8) при  $m = 1$ :

$$\dot{u} = \lambda [-1 - f_{Na}(u(t)) + f_K(u(t-1)) + \alpha H(u) q \Theta(v(t) - 1)] u.$$

Пусть нейрон-приемник начал генерацию спайка при  $t = -t_V$  и к моменту  $t = 0$  уже вышел из состояния рефрактерности, т.е.  $t_V > T_R$ . Пусть также нейрон-передатчик начал генерацию спайка при  $t = 0$ , она продлится при  $t \in [0, T_1]$ . На

этом промежутке нейрон-приемник испытывает воздействие с синаптическим весом  $q > 0$ . Момент начала генерации нового спайка нейроном-приемником обозначим через  $T_S$ . Дополнительно наложим условие  $T_S < T_1$ , т.е. спайк нейрона-приемника должен начаться раньше, чем закончится спайк нейрона-передатчика.

Равенства

$$H(u) \equiv 1, \quad \Theta(v(t) - 1) \equiv 1,$$

выполнены на промежутке  $t \in [\delta, T_S]$  [14] для некоторого  $\delta > 0$ , и уравнение нейрона-приемника на этом промежутке можно переписать в виде:

$$\dot{u} = \lambda[-1 - f_{\text{Na}}(u(t)) + f_{\text{K}}(u(t-1)) + \alpha q]u.$$

Без внешних воздействий следующий спайк нейрона-приемника начался бы при  $t = T_2 - t_V$ . В работе [14] показано, что  $T_S = \frac{T_2 - t_V}{1+q} + o(1)$ . Таким образом, входящий импульс ускоряет время генерации спайка на величину  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \Delta t &= T_2 - t_V - T_S, \\ \Delta t &= q \frac{T_2 - t_V}{1+q} + o(1). \end{aligned} \quad (9)$$

## 1.2. Импульсный нейрон-детектор с константной добавкой

В статье [15] были приняты обозначения

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + f_{\text{Na}}(0) - f_{\text{K}}(0), \\ \alpha_1 &= f_{\text{K}}(0) - 1, \\ \alpha_2 &= f_{\text{Na}}(0) + 1 \end{aligned} \quad (10)$$

и с их помощью введена модель импульсного нейрона-детектора, задаваемого уравнением

$$\dot{u} = \lambda[-1 - f_{\text{Na}}(u(t)) + f_{\text{K}}(u(t-1))]u + \lambda\alpha \exp(-\lambda\sigma). \quad (11)$$

Для этой модели приняты ограничения (2)–(4), кроме этого:

$$\sigma > 0, \quad (12)$$

$$\alpha > 0, \quad (13)$$

$$0 < \alpha_2 < \sigma < \alpha_1, \quad (14)$$

$$f_{\text{K}}(0) - f_{\text{Na}}(1) - 1 > 0. \quad (15)$$

В статье [15] проведен асимптотический анализ уравнения (11) с ограничениями (2)–(4), (12)–(15) и начальным условием (6). Для произвольно малого фиксированного  $0 < \delta \ll 1$ , имеем:

$$\begin{aligned} u(t) &= \exp(\lambda\alpha_1 t) + o(1), & t \in [\delta, 1 - \delta], \\ u(t) &= \exp(\lambda(\alpha_1 - (t-1))) + o(1), & t \in [1 + \delta, T_1 - \delta], \\ u(t) &= \alpha/\alpha_2 \exp(-\lambda\sigma) + o(1), & t \in [T_1 + \delta, T_1 + 1 - \delta], \\ u(t) &= \exp(-\lambda\sigma) + o(1), & t > T_1 + 1 + \delta. \end{aligned} \quad (16)$$

Напомним, что нейрон находится в спайке, пока  $u(t) > 1$ . В статье [15] показано, что длительность спайка нейрона, заданного уравнением (11), составляет  $T_1 = 1 + \alpha_1 + o(1)$ .

Рассмотрим случай взаимодействия нейронов, описанных уравнением (11), и добавим к нему механизм взаимодействия (7):

$$\dot{u} = \lambda \left[ -1 - f_{\text{Na}}(u(t)) + f_{\text{K}}(u(t-1)) + \alpha H(u) \left( \sum_{k=1}^m q_k \Theta(v(t) - 1) \right) \right] u + \lambda \alpha \exp(-\lambda \sigma). \quad (17)$$

Рассмотрим случай взаимодействия двух одинаковых нейронов, описываемых уравнением (17), при котором между нейронами существует односторонняя связь: нейрон-передатчик воздействует на нейрон-приемник с синаптическим весом  $q$  (см. рис. 1).

Поскольку на нейрон-передатчик не оказывают воздействие другие нейроны, для него  $Q(u) \equiv 0$ , т.е. его поведение полностью описывается уравнением (11). Поведение нейрона-приемника описано уравнением (17) при  $m = 1$ :

$$\dot{u} = \lambda [-1 - f_{\text{Na}}(u(t)) + f_{\text{K}}(u(t-1)) + \alpha H(u) q \Theta(v(t) - 1)] u + \lambda \alpha \exp(-\lambda \sigma).$$

Пусть нейрон-приемник начал генерацию спайка при  $t = -t_V$  и к моменту  $t = 0$  уже вышел из состояния рефрактерности, т.е.  $t_V > T_R$ . Также наложим ограничение  $t_V > T_1 + 2$ . Тогда, согласно (16), при  $t \in [-1, 0]$  поведение нейрона-приемника задается функцией  $u(t) = \exp(-\lambda \sigma) + o(1)$ .

Пусть также нейрон-передатчик начал генерацию спайка при  $t = 0$ . На промежутке  $[0, T_1]$  генерации спайка нейрон-приемник испытывает воздействие с синаптическим весом  $q$ . Момент начала генерации нового спайка нейроном-приемником обозначим через  $T_S$ . Дополнительно наложим условие  $T_S < T_1$ , т.е. спайк нейрона-приемника должен начаться раньше, чем закончится спайк нейрона-передатчика.

Равенства

$$H(u) \equiv 1, \quad \Theta(v(t) - 1) \equiv 1$$

выполнены на промежутке  $t \in [\delta, T_S]$  [15] для некоторого  $\delta > 0$ , и уравнение нейрона-приемника на этом промежутке можно переписать в виде

$$\dot{u} = \lambda [-1 - f_{\text{Na}}(u(t)) + f_{\text{K}}(u(t-1)) + \alpha q] u + \lambda \alpha \exp(-\lambda \sigma). \quad (18)$$

**Определение 1.** Латентным периодом нейрона будем называть время между приходом импульса и началом генерации нового спайка.

Для нейрона-приемника в описанной схеме взаимодействия латентный период совпадает с промежутком  $[0, T_S]$ .

Для описанной конфигурации нейронов докажем утверждение:

**Теорема 1.** В предположениях данного раздела относительно модели взаимодействия и ее параметров продолжительность латентного периода нейрона-приемника составляет

$$T_S = \frac{\sigma}{\alpha(q-1)} + o(1).$$

**Доказательство.** Построим асимптотику для уравнения (18) на отрезке  $t \in [\delta, T_S]$ .

Введем оператор

$$L[u](t) = -1 - f_{Na}(u(t)) + f_K(u(t-1))$$

и перепишем уравнение (18) следующим образом:

$$\dot{u} = \lambda(L[u](t) + \alpha q)u + \lambda\alpha \exp(-\lambda\sigma). \quad (19)$$

Начальная задача для уравнения (19) определяется заданием функции  $u(t)$  на произвольном отрезке единичной длины, в качестве которого будем использовать отрезок  $[-1, 0]$ . Для нейрона-приемника выполнено равенство:

$$u(t) = \exp(-\lambda\sigma) + o(1), \quad t \in [-1, 0].$$

Для отрезка  $0 \leq t \leq 1$  имеем  $-1 \leq t-1 \leq 0$ , и выполнено неравенство  $u(t-1) \leq \lambda^{-1}$ , следовательно,  $f_K(u(t-1)) = f_K(0) + o(1)$ . С другой стороны, если выполнено условие  $u(t) > 0$ , то  $f_{Na}(u(t)) = f_{Na}(0) + o(1) < f_{Na}(0)$ . Получаем неравенство

$$L[u](t) = f_K(0) - f_{Na}(0) - 1 + o(1) > f_K(0) - f_{Na}(0) - 1 = -\alpha.$$

Поэтому решение уравнения

$$\dot{u}_1 = \lambda\alpha(-1 + q)u_1 + \lambda\alpha \exp(-\lambda\sigma)$$

при начальном условии

$$u_1(0) = \exp(-\lambda\sigma)$$

ограничивает решение уравнения (19) снизу, т.е.  $u_1(t) < u(t) = u_1(t) + o(1)$ . Это решение имеет следующий вид:

$$u_1(t) = \frac{\exp(-\lambda\sigma)}{q-1} [q \exp(\lambda\alpha(q-1)t) - 1].$$

Оно принимает единичное значение в точке

$$T_S^{u_1} = \frac{1}{\lambda\alpha(q-1)} \ln \frac{q-1 + \exp(-\lambda\sigma)}{q \exp(-\lambda\sigma)}.$$

В силу равенства  $u(t) = u_1(t) + o(1)$  получаем следующее решение уравнения (19):

$$u(t) = \frac{\exp(-\lambda\sigma)}{q-1} [q \exp(\lambda\alpha(q-1)t) - 1] + o(1),$$

которое принимает единичное значение в точке

$$T_S = \frac{1}{\lambda\alpha(q-1)} \ln \frac{(q-1)(1 + o(1)) + \exp(-\lambda\sigma)}{q \exp(-\lambda\sigma)}.$$

Мы видим, что при  $q > 1$  на отрезке  $[\delta, T_S]$  для мембранного потенциала выполнено неравенство  $u(t) > u_1(t) > 0$ , что обеспечивает выполнение условия  $f_{Na}(u(t)) <$

$f_{\text{Na}}(0)$ , которое мы использовали выше в ходе доказательства. Упростим значение выражения для  $T_S$ , при котором начинается генерация спайка:

$$\begin{aligned} T_S &= \frac{1}{\lambda\alpha(q-1)} \ln \frac{(q-1)(1+o(1)) + \exp(-\lambda\sigma)}{q \exp(-\lambda\sigma)} = \\ &= \frac{1}{\lambda\alpha(q-1)} \left[ \ln \frac{(q-1)(1+o(1)) + \exp(-\lambda\sigma)}{q} + \lambda\sigma \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha(q-1)} \left[ \frac{1}{\lambda} \ln \frac{(q-1)(1+o(1)) + \exp(-\lambda\sigma)}{q} + \sigma \right]. \end{aligned}$$

Поскольку мы считаем выполненными ограничения  $q > 1$ ,  $\sigma > 0$  и  $\lambda \rightarrow +\infty$ , слагаемое  $\frac{1}{\lambda} \ln \frac{(q-1)(1+o(1)) + \exp(-\lambda\sigma)}{q}$  стремится к нулю, поэтому

$$T_S = \frac{\sigma}{\alpha(q-1)} + o(1).$$

### 1.3. Импульсный нейрон-детектор с током утечки

Обратимся к уравнению еще одной модели импульсного нейрона-детектора, введенной в статье [16]:

$$\dot{u} = \lambda[-1 - f_{\text{Na}}(u(t)) + f_{\text{K}}(u(t-1))]u + \lambda\alpha f_{\text{L}}(u(t-1)) \exp(-\lambda\sigma). \quad (20)$$

Ее параметры аналогичны параметрам модели нейрона-детектора с константной добавкой, рассмотренной в предыдущем разделе. Будем использовать обозначения (10) и предполагать выполненными ограничения (2)–(4), (12)–(15). Кроме этого, примем ограничение

$$\begin{aligned} f_{\text{L}}(u) &\text{ — гладкая положительная функция,} \\ &\text{монотонно убывает к 0 при } u \rightarrow +\infty \text{ быстрее, чем } O(u^{-1}). \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения (11) и (20) отличаются друг от друга слагаемым в правой части. В уравнении (11) это — константное значение, а в уравнении (20) величина слагаемого зависит от функции  $f_{\text{L}}(u(t-1))$ . Такой вид неоднородности в уравнении (20) учитывает наличие токов утечки, величина которых зависит от поляризации мембраны.

В статье [16] проведен асимптотический анализ уравнения (20) с ограничениями (2)–(4), (12)–(15), (21) и начальным условием (6). Для произвольно малого фиксированного  $0 < \delta \ll 1$  имеем:

$$\begin{aligned} u(t) &= \exp(\lambda\alpha_1 t) + o(1), & t \in [\delta, 1 - \delta], \\ u(t) &= \exp(\lambda(\alpha_1 - (t-1))) + o(1), & t \in [1 + \delta, T_1 - \delta], \\ u(t) &= \exp[-\lambda\alpha_2(t - T_1)] + o(1), & t \in [T_1 + \delta, T_1 + 1 - \delta], \\ u(t) &= \exp(-\lambda\sigma) + o(1), & t > T_1 + 1 + \delta. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим случай взаимодействия нейронов, описанных уравнением (11). Добавим к модели механизм взаимодействия (7):

$$\begin{aligned} \dot{u} = \lambda \left[ -1 - f_{\text{Na}}(u(t)) + f_{\text{K}}(u(t-1)) + \alpha H(u) \left( \sum_{k=1}^m q_k \Theta(v(t) - 1) \right) \right] u + \\ + \lambda\alpha f_{\text{L}}(u(t-1)) \exp(-\lambda\sigma). \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим случай взаимодействия двух одинаковых нейронов, описываемых уравнением (23), при котором между нейронами существует односторонняя связь: нейрон-передатчик воздействует на нейрон-приемник с синаптическим весом  $q$  (см. рис. 1).

Поскольку на нейрон-передатчик не оказывают воздействие другие нейроны, для него  $Q(u) \equiv 0$ , т.е. его поведение полностью описывается уравнением (20). Поведение нейрона-приемника описано уравнением (23) при  $m = 1$ :

$$\dot{u} = \lambda[-1 - f_{\text{Na}}(u(t)) + f_{\text{K}}(u(t-1)) + \alpha H(u)q\Theta(v(t) - 1)]u + \lambda\alpha f_{\text{L}}(u(t-1)) \exp(-\lambda\sigma).$$

Пусть нейрон-приемник начал генерацию спайка при  $t = -t_V$  и к моменту  $t = 0$  уже вышел из состояния рефрактерности, т.е.  $t_V > T_R$ . Также наложим ограничение  $t_V > T_1 + 2$ . Тогда, согласно (22), при  $t \in [-1, 0]$  поведение нейрона-приемника задается функцией  $u(t) = \exp(-\lambda\sigma) + o(1)$ .

Пусть также нейрон-передатчик начал генерацию спайка при  $t = 0$ . На промежутке  $[0, T_1]$  генерации спайка нейрон-приемник испытывает воздействие с синаптическим весом  $q$ . Момент начала генерации нового спайка нейроном-приемником обозначим через  $T_S$ . Дополнительно наложим условие  $T_S < T_1$ , т.е. спайк нейрона-приемника должен начаться раньше, чем закончится спайк нейрона-передатчика.

Равенства

$$H(u) \equiv 1, \quad \Theta(v(t) - 1) \equiv 1,$$

выполнены на промежутке  $t \in [\delta, T_S]$  [16] для некоторого  $\delta > 0$ , и уравнение нейрона-приемника на этом промежутке можно переписать в виде:

$$\dot{u} = \lambda[-1 - f_{\text{Na}}(u(t)) + f_{\text{K}}(u(t-1)) + \alpha q]u + \lambda\alpha f_{\text{L}}(u(t-1)) \exp(-\lambda\sigma). \quad (24)$$

Для описанной конфигурации нейронов докажем утверждение:

**Теорема 2.** *В предположениях данного раздела относительно модели взаимодействия и ее параметров продолжительность латентного периода нейрона-приемника составляет*

$$T_S = \frac{\sigma}{\alpha(q-1)} + o(1).$$

**Доказательство.** Построим асимптотику для уравнения (24) на отрезке  $t \in [\delta, T_S]$ .

Введем оператор

$$L[u](t) = -1 - f_{\text{Na}}(u(t)) + f_{\text{K}}(u(t-1))$$

и перепишем уравнение (24) следующим образом:

$$\dot{u} = \lambda(L[u](t) + \alpha q)u + \lambda\alpha f_{\text{L}}(u(t-1)) \exp(-\lambda\sigma). \quad (25)$$

Начальная задача для уравнения (25) определяется заданием функции  $u(t)$  на произвольном отрезке единичной длины, в качестве которого будем использовать отрезок  $[-1, 0]$ . Для нейрона-приемника выполнено равенство:

$$u(t) = \exp(-\lambda\sigma) + o(1), \quad t \in [-1, 0].$$

Для отрезка  $0 \leq t \leq 1$  имеем  $-1 \leq t - 1 \leq 0$ , и выполнено неравенство  $u(t - 1) \leq \lambda^{-1}$ , следовательно,  $f_K(u(t - 1)) = f_K(0) + o(1)$  и  $f_L(u(t - 1)) < f_L(0) = 1$ . С другой стороны, если выполнено условие  $u(t) > 0$ , то  $f_{Na}(u(t)) < f_{Na}(0)$ . Получаем неравенство

$$L[u](t) > f_K(0) - f_{Na}(0) - 1 = -\alpha.$$

Поэтому решение уравнения

$$\dot{u}_1 = \lambda\alpha(-1 + q)u_1 + \lambda\alpha \exp(-\lambda\sigma)$$

при начальном условии

$$u_1(0) = \exp(-\lambda\sigma)$$

ограничивает решение уравнения (25) снизу:  $u_1(t) < u(t) = u_1(t) + o(1)$ . Это решение принимает вид

$$u_1(t) = \frac{\exp(-\lambda\sigma)}{q - 1} [q \exp(\lambda\alpha(q - 1)t) - 1].$$

Оно принимает единичное значение в точке

$$T_S = \frac{1}{\lambda\alpha(q - 1)} \ln \frac{q - 1 + \exp(-\lambda\sigma)}{q \exp(-\lambda\sigma)}.$$

В силу равенства  $u(t) = u_1(t) + o(1)$  получаем следующее решение уравнения (19):

$$u(t) = \frac{\exp(-\lambda\sigma)}{q - 1} [q \exp(\lambda\alpha(q - 1)t) - 1] + o(1),$$

которое принимает единичное значение в точке

$$T_S = \frac{1}{\lambda\alpha(q - 1)} \ln \frac{(q - 1)(1 + o(1)) + \exp(-\lambda\sigma)}{q \exp(-\lambda\sigma)}.$$

Мы видим, что при  $q > 1$  на отрезке  $[\delta, T_S]$  для мембранного потенциала выполнено неравенство  $u(t) > u_1(t) > 0$ , что обеспечивает выполнение условия  $f_{Na}(u(t)) < f_{Na}(0)$ , которое мы использовали выше в ходе доказательства. Упростим значение выражения для  $T_S$ , при котором начинается генерация спайка:

$$\begin{aligned} T_S &= \frac{1}{\lambda\alpha(q - 1)} \ln \frac{(q - 1)(1 + o(1)) + \exp(-\lambda\sigma)}{q \exp(-\lambda\sigma)} = \\ &= \frac{1}{\lambda\alpha(q - 1)} \left[ \ln \frac{(q - 1)(1 + o(1)) + \exp(-\lambda\sigma)}{q} + \lambda\sigma \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha(q - 1)} \left[ \frac{1}{\lambda} \ln \frac{(q - 1)(1 + o(1)) + \exp(-\lambda\sigma)}{q} + \sigma \right]. \end{aligned}$$

Поскольку были выбраны ограничения  $q > 1$ ,  $\sigma > 0$  и  $\lambda \rightarrow +\infty$ , слагаемое

$$\frac{1}{\lambda} \ln \frac{(q - 1)(1 + o(1)) + \exp(-\lambda\sigma)}{q}$$

стремится к нулю, поэтому

$$T_S = \frac{\sigma}{\alpha(q - 1)} + o(1).$$

Мы видим, что поведение нейронов, описываемых моделями с константной добавкой (18) и током утечки (24), совпадает с точностью  $o(1)$ . Также отметим, что для данных моделей получен одинаковый латентный период  $T_S$ .

## 2. Нейронные клеточные автоматы

В данном разделе описана модель нейронного клеточного автомата с автогенераторной динамикой и модификация этой модели, имеющая детекторную динамику. В обоих случаях приведено утверждение относительно латентного периода нейронного автомата, находящегося под внешним воздействием.

Отметим, что вводимая нами новая модель НКА-детектора формально отличается от предложенной в [10] модели обобщенного нейронного элемента, хотя и имеет сходную с ней динамику. Для предложенной нами модели удастся доказать утверждение о ее асимптотической эквивалентности модели импульсного нейрона (см. раздел 3.2.), причем соответствие между параметрами имеет наиболее естественный вид.

### 2.1. НКА-автогенератор

В работе [8] введена автоматная модель нейрона под именем «нейронного клеточного автомата» (НКА). Здесь мы приведем аксиоматику НКА, следуя работе [8].

НКА представляет собой динамический элемент, состояние которого описывается зависящими от времени величинами  $u(t) > 0$  (мембранный потенциал нейрона) и  $p(t) > 0$  (переменное пороговое значение). НКА имеет один выход, состояние которого характеризуется значением функции  $y(t)$ , и  $n$  входов, состояния которых характеризуются значениями функций  $x_k(t)$ . Каждый вход НКА является выходом другого НКА и дополнительно характеризуется синаптическим весом  $q_k$ . Динамика величин  $u(t)$ ,  $p(t)$  и  $y(t)$  определяется следующими правилами:

1. Если  $u(t) < p(t)$  для всех  $t \in [t_1, t_2]$ , то на этом отрезке

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_1) \exp[\Theta(t - t_1)], \\ p(t) &= p(t_1) \exp[-\gamma\Theta(t - t_1)], \end{aligned}$$

где  $\Theta > 0$  и  $\gamma > 0$ .

2. Если в момент времени  $t^*$  выполнено равенство  $u(t^*) = p(t^*)$ , то  $y(t^*) = 1$  (генерация спайка). Для всех остальных значений  $t$  величина  $y(t)$  принимает нулевое значение. В момент  $t^*$  генерации спайка значения величин  $u(t)$  и  $p(t)$  устанавливаются в значения  $u_0$  и  $p_0$  соответственно. На промежутке времени  $[t^*, t^* + T_R]$  (интервал рефрактерности) величины  $u(t)$  и  $p(t)$  изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0, \\ p(t) &= p_0 \exp[-\gamma\Theta(t - t^*)]. \end{aligned}$$

3. Если НКА не находится в рефрактерном состоянии и на один из входов поступает спайк, то считается, что на соответствующем синапсе в течение времени  $T_1 < T_R$  после момента поступления спайка присутствует медиатор. Если на промежутке времени  $[t_1, t_2]$  на некоторых синапсах присутствует медиатор, то

динамика мембранного потенциала на этом промежутке определяется следующей формулой:

$$u(t) = u(t_1) \exp[\Theta(1 + q)(t - t_1)], \quad (26)$$

где  $q$  равно сумме синаптических весов  $q_k$  тех синапсов, на которых присутствует медиатор.

НКА представляет собой модель нейрона-автогенератора. В [8] показано, что в изолированном состоянии НКА периодически генерирует спайки через время  $T_2$ , которое определяется из условия

$$u_0 \exp(\Theta(T_2 - T_R)) = p_0 \exp(-p\Theta T_2).$$

Рассмотрим систему из двух НКА, которая соответствует системе двух импульсных нейронов-автогенераторов, обсуждаемой в разделе 1.1. Пусть НКА-передатчик соединен с НКА-приемником связью с синаптическим весом  $q > 0$ . НКА-приемник начинает генерацию первого спайка при  $t = 0$ . Пусть при  $t = t_V < T_2$  начинается генерация спайка НКА-передатчиком. Дополнительно потребуем  $t_V > T_R$ , т.е. генерация спайка НКА-передатчика должна начаться после того, как НКА-приемник выйдет из состояния рефрактерности. Под воздействием импульса с НКА-передатчика НКА-приемник начнет генерацию нового спайка в момент времени  $T_S$ , причем  $T_S < T_2$ . В работе [8] для  $T_S$  было получено следующее выражение:

$$T_S = \frac{T_2(p_0 + 1) + q}{1 + p_0 + q}.$$

Это позволяет вычислить сокращение латентного периода НКА-приемника:

$$\Delta t = T_2 - T_S = q \frac{T_2 - t_V}{1 + p_0 + q}. \quad (27)$$

## 2.2. НКА-детектор

Модифицируем НКА таким образом, чтобы он соответствовал нейрону-детектору. Для этого переменное пороговое значение  $p(t)$  заменим на постоянное  $p(t) \equiv p_0$ . Кроме этого, переопределим функцию мембранного потенциала следующим образом:

1. Если  $u(t) < p_0$  для всех  $t \in [t_1, t_2]$ , то на этом отрезке

$$u(t) = \max \{u_0, u(t_1) \exp[-\Theta(t - t_1)]\},$$

где  $\Theta > 0$ ,  $0 < u_0 < p_0$ .

2. Если в момент времени  $t^*$  выполнено равенство  $u(t^*) = p_0$ , то  $y(t^*) = 1$  (генерация спайка). Для всех остальных значений  $t$  величина  $y(t)$  принимает нулевое значение. В момент  $t^*$  генерации спайка значение величины  $u(t)$  устанавливается в  $u_0$ . На промежутке времени  $[t^*, t^* + T_R]$  (интервал рефрактерности) величина  $u(t)$  не изменяется:

$$u(t) = u_0.$$

3. Если НКА не находится в рефрактерном состоянии и на один из входов поступает спайк, то считается, что на соответствующем синапсе в течение времени  $T_1 < T_R$  после момента поступления спайка присутствует медиатор. Если на промежутке времени  $[t_1, t_2]$  на некоторых синапсах присутствует медиатор, то динамика мембранного потенциала на этом промежутке определяется следующей формулой:

$$u(t) = \max \{u_0, u(t_1) \exp[\Theta(q-1)(t-t_1)]\},$$

где  $q$  равно сумме синаптических весов  $q_k$  тех синапсов, на которых присутствует медиатор.

НКА, работающий по этой схеме, генерирует спайк только в ответ на внешнее воздействие. Мембранный потенциал такого НКА-детектора, находящегося в изолированном состоянии, убывает к  $u_0$ .

Рассмотрим конфигурацию из двух НКА-детекторов, которая соответствует конфигурации двух импульсных нейронов-детекторов, обсуждаемой в разделе 1.2. Пусть НКА-передатчик соединен с НКА-приемником связью с синаптическим весом  $q > 1$ . НКА-приемник начинает генерацию первого спайка при  $t = -t_V$ . Затем при  $t = 0$  начинается генерация спайка НКА-передатчиком. Дополнительно потребуем  $t_V > T_R$ , т.е. генерация спайка НКА-передатчика должна начаться после того, как НКА-приемник выйдет из состояния рефрактерности. В силу этого ограничения, можно считать выполненным  $u(0) = u_0$ . Тогда для НКА-приемника, начиная с момента времени  $t = 0$ , выполнено

$$u(t) = u_0 \exp[\Theta(q-1)t].$$

Под воздействием импульса с НКА-передатчика НКА-приемник начнет генерацию спайка в момент времени  $T_S$ , который определяется соотношением  $u(T_S) = p_0$ , т.е. для  $T_S$  получаем следующее выражение:

$$T_S = \frac{\ln \frac{p_0}{u_0}}{\Theta(q-1)}. \quad (28)$$

Отдельно отметим, что найденное выше значение продолжительности латентного периода  $T_S$  имеет смысл только в предположении  $T_S < T_1$ , т.е. спайк НКА-приемника должен начаться раньше, чем закончится спайк НКА-передатчика.

### 3. Эквивалентность импульсных нейронов и НКА

**Определение 2.** Две модели нейрона будем называть *эквивалентными в смысле реакции на входящий спайк*, если можно подобрать параметры моделей таким образом, чтобы их латентные периоды были асимптотически равны с точностью  $o(1)$ .

#### 3.1. Эквивалентность импульсного нейрона-автогенератора и НКА-автогенератора

**Теорема 3.** Пусть импульсный нейрон-автогенератор, описанный уравнением (8) с ограничениями (2)–(5) и начальным условием (6), и НКА имеют коэффициенты,

удовлетворяющие равенству:

$$q_{\text{имп}} = \frac{q_{\text{нка}}}{1 + p_0}.$$

Тогда такой импульсный нейрон и НКА эквивалентны в смысле реакции на входящий спайк.

**Доказательство.** В разделе 1.1. показано, что сокращение латентного периода  $\Delta t$  для импульсного нейрона составляет

$$\Delta t_{\text{имп}} = q_{\text{имп}} \frac{T_2 - t_V}{1 + q_{\text{имп}}} + o(1).$$

Для НКА в разделе 2.1. найдено:

$$\Delta t_{\text{нка}} = q_{\text{нка}} \frac{T_2 - t_V}{1 + p_0 + q_{\text{нка}}}.$$

Для эквивалентности импульсного нейрона и НКА необходимо и достаточно соблюдения равенства

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{нка}} &= \Delta t_{\text{имп}} + o(1), \\ p_0 \frac{T_2 - t_V}{1 + p_0 + q_{\text{нка}}} &= q_{\text{имп}} \frac{T_2 - t_V}{1 + q_{\text{имп}}} + o(1). \end{aligned}$$

Таким образом, при

$$q_{\text{имп}} = \frac{q_{\text{нка}}}{1 + p_0}$$

импульсный нейрон-автогенератор и НКА имеют одинаковую (с точностью  $o(1)$ ) реакцию на единичное воздействие, т.е. эти две модели эквивалентны в смысле реакции на входящий спайк.

### 3.2. Эквивалентность импульсных нейронов-детекторов и НКА-детектора

**Теорема 4.** Модели импульсного нейрона-детектора с током утечки (уравнение (23) с ограничениями (2)–(4), (12)–(15), (21)) и импульсного нейрона-детектора с константной добавкой (уравнение (17) с ограничениями (2)–(4), (12)–(15)) с одинаковым начальным условием (6) эквивалентны в смысле реакции на входящий спайк.

**Доказательство.** Эквивалентность импульсных нейронов-детекторов с константной добавкой и с током утечки напрямую следует из утверждений 1 и 2. Продолжительность латентного периода для этих моделей составляет

$$T_S = \frac{\sigma}{\alpha(q - 1)} + o(1).$$

Теорема доказана.

**Теорема 5.** Пусть импульсный нейрон-детектор, описанный уравнением (17) с ограничениями (2)–(4), (12)–(15) и начальным условием (6), и НКА-детектор имеют коэффициенты, удовлетворяющие равенствам:

$$\begin{aligned} q_{\text{нка}} &= q_{\text{имп}}, \\ \Theta &= \alpha, \\ \frac{p_0}{u_0} &= \exp(\sigma). \end{aligned} \tag{29}$$

Тогда такой импульсный нейрон-детектор и НКА-детектор эквивалентны в смысле реакции на входящий спайк.

**Доказательство.** В утверждении 1 установлено, что продолжительность латентного периода для импульсного нейрона-детектора составляет

$$T_S^{\text{имп}} = \frac{\sigma}{\alpha(q_{\text{имп}} - 1)} + o(1).$$

Для НКА в разделе 2.2. найдено:

$$T_S^{\text{нка}} = \frac{\ln \frac{p_0}{u_0}}{\alpha(q_{\text{нка}} - 1)}.$$

Для эквивалентности импульсного нейрона и НКА необходимо и достаточно соблюдения равенства  $T_S^{\text{нка}} = T_S^{\text{имп}} + o(1)$ , т.е.

$$\frac{\ln \frac{p_0}{u_0}}{\Theta(q_{\text{нка}} - 1)} = \frac{\sigma}{\alpha(q_{\text{имп}} - 1)} + o(1).$$

Отсюда следует, что равенства (29) являются достаточным условием эквивалентности импульсного нейрона-детектора и НКА. Таким образом, импульсный нейрон-детектор и НКА-детектор имеют одинаковую (с точностью  $o(1)$ ) реакцию на единичное воздействие, т.е. эти модели эквивалентны в смысле реакции на входящий спайк.

## 4. Заключение

Основной результат данной статьи состоит в возможности замены произвольной нейронной системы, состоящей из импульсных нейронов (автогенераторов или детекторов) на аналогичную структуру, состоящую из нейронных автоматов соответствующего типа с сохранением поведения системы в смысле асимптотики нулевого порядка. При этом условием корректности такой замены является естественное условие неналожения входных воздействий, состоящее в том, что на каждом интервале чувствительности всех нейронов присутствует только одно внешнее воздействие. Таким образом, при выполнении условия неналожения входных воздействий все результаты, полученные для сетей импульсных нейронов на основе асимптотики нулевого порядка, могут быть формально перенесены на сети, состоящие из автоматных моделей нейронов.

## Список литературы

1. Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Математическое моделирование нейронной сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. 1990. Т. 2. № 11. С. 64–76. [Mayorov V.V., Myshkin I.Yu. Matematicheskoe modelirovanie neuronnoy seti na osnove uravneniy s zapazdyvaniem // Matematicheskoe modelirovanie. 1990. T. 2. № 11. S. 64–76 (in Russian).]
2. Кащенко С.А., Майоров В.В. Об одном дифференциально-разностном уравнении, моделирующем импульсную активность нейрона // Математическое моделирование. 1993. Т. 5. № 12. С. 13–25. [Kashchenko S.A., Mayorov V.V. Ob odnom differentsialno-raznostnom uravnenii, modeliruyushchem impulsnyuyu aktivnost neyrona // Matematicheskoe modelirovanie. 1993. T. 5. № 12. S. 13–25 (in Russian).]
3. Кащенко С.А., Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Исследование колебаний в кольцевых нейронных системах // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 5. С. 594–597. [Kashchenko S.A., Mayorov V.V., Myshkin I.Yu. Issledovanie kolebaniy v koltsevykh neyronnykh sistemakh // Dokl. RAN. 1993. T. 333. № 5. S. 594–597 (in Russian).]
4. Кащенко С.А., Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Распространение волн в простейших кольцевых нейронных структурах // Математическое моделирование. 1995. Т. 7. № 12. С. 3–18. [Kashchenko S.A., Mayorov V.V., Myshkin I.Yu. Rasprostranenie voln v prosteyshikh koltsevykh neyronnykh strukturakh // Matematicheskoe modelirovanie. 1995. T. 7. № 12. S. 3–18 (in Russian).]
5. Кащенко С.А., Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Волновые образования в кольцевых нейронных системах // Математическое моделирование. 1997. Т. 9. № 3. С. 29–39. [Kashchenko S.A., Mayorov V.V., Myshkin I.Yu. Volnovye obrazovaniya v koltsevykh neyronnykh sistemakh // Matematicheskoe modelirovanie. 1997. T. 9. № 3. S. 29–39 (in Russian).]
6. Кащенко С.А., Майоров В.В. Модель адаптации кольцевых нейронных ансамблей // Радиотехника и Электроника. 1998. Т. 43. № 11. С. 1–7. [Kashchenko S.A., Mayorov V.V. Model adaptatsii koltsevykh neyronnykh ansambley // Radiotekhnika i Elektronika. 1998. T. 43. № 11. S. 1–7 (in Russian).]
7. Кащенко С.А., Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Модель нейронной системы, синхронизирующей волновые пакеты // Докл. РАН. 1998. Т. 360. № 4. С. 463–466. [Kashchenko S.A., Mayorov V.V., Myshkin I.Yu. Model neuronnoy sistemy, sinkhroniziruyushchey volnovye pakety // Dokl. RAN. 1998. T. 360. № 4. S. 463–466 (in Russian).]
8. Шабаршина Г.В. Проведение возбуждения по кольцевой структуре нейронных клеточных автоматов // Моделирование и анализ информационных систем. 1994. № 2. С. 116–121. [Shabarshina G.V. Provedenie vozbuzhdeniya po koltsevoy strukture neyronnykh kletochnykh avtomatov // Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem. 1994. № 2. S. 116–121 (in Russian).]
9. Майоров В.В., Шабаршина Г.В. Сообщение о сетях W-нейронов // Моделирование и анализ информационных систем. 1997. № 4. С. 37–50. [Mayorov V.V., Shabarshina G.V. Soobshchenie o setyakh W-neuronov // Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem. 1997. № 4. S. 37–50 (in Russian).]

10. Майоров В.В., Коновалов Е.В. Обобщенный нейронный автомат в задаче распространения волны возбуждения по нейронной сети // Нейрокомпьютер. 2007. № 7. С. 3–8. [Mayorov V.V., Kononov E.V. Obobshchennuyu neyronnyu avtomat v zadache rasprostraneniya volny vozbuzhdeniya po neyronnoy seti // Neyrokompnyuter. 2007. № 7. S. 3–8 (in Russian).]
11. Шабаршина Г.В. Самоорганизация в полностью связанной однородной сети нейронных клеточных автоматов возбудительного типа // АиТ. 1999. Вып. 2. С. 112–119. [Shabarshina G.V. Samoorganizatsiya v polnosvyaznoy odnorodnoy seti neyronnykh kletochnykh avtomatov vozbuditelnogo tipa. // AiT. 1999. Vyp. 2. S. 112–119 (in Russian).]
12. Майоров В.В., Шабаршина Г.В. Простейшие режимы пачечной волновой активности в сетях W-нейронов // Моделирование и анализ информационных систем. 1999. Т. 6. № 1. С. 36–39. [Mayorov V.V., Shabarshina G.V. Prosteyshie rezhimy pachechnoy volnovoy aktivnosti v setyakh W-neuronov // Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem. 1999. T. 6. № 1. S. 36–39 (in Russian).]
13. Майоров В.В., Шабаршина Г.В. Сети W-нейронов в задаче ассоциативной памяти // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. Т. 41. № 8. 2001. С. 1289–1299. [Mayorov V.V., Shabarshina G.V. Seti W-neuronov v zadache assotsiativnoy pamyati // Zhurn. vychislit. matem. i matem. fiz. T. 41. № 8. 2001. S. 1289–1299 (in Russian).]
14. Кащенко С.А., Майоров В.В. Модели волновой памяти // М., 2009. [Kashchenko S.A., Mayorov V.V. Modeli volnovoy pamyati. Moskva, 2009 (in Russian).]
15. Майоров В.В., Ануфриенко С.Е. Исследование модифицированной модели сальтаторного проведения возбуждения // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. № 4. С. 3–6. [Mayorov V.V., Anufrienko S.E. Issledovanie modifitsirovannoy modeli saltatornogo provedeniya vozbuzhdeniya // Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem. 2007. № 4. S. 3–6 (in Russian).]
16. Майоров В.В., Мышкин И.Ю., Мячин М.Л., Куксов А.Г. Планирование волн в кольцевых структурах ассоциаций импульсных нейронов-детекторов // Моделирование и анализ информационных систем. 2003. № 2. С. 30–34. [Mayorov V.V., Myshkin I.Yu., Myachin M.L., Kuksov A.G. Planirovanie voln v koltsevykh strukturakh assotsiatsiy impulsnykh neyronov-detektorov // Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem. 2003. № 2. S. 30–34 (in Russian).]

## Impulse Neuron and Cellular Neural Automaton are Asymptotically Equivalent

Kopylov V. D., Dunaeva O. A., Myachin M. L.

*P.G. Demidov Yaroslavl State University,  
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia*

**Keywords:** biological neuron, impulse neuron with time delay, cellular neural automaton

In the article, it is established the asymptotic equivalence of dynamics of the neural networks consisting of the impulse neurons and the neural networks built of the neural cellular automata of different kinds (autogenerators and detectors). Such an equivalence takes place for appropriate parameters values and non-intersection of input impacts for each neuron. In the first chapter, we describe the model of impulse autogenerator neuron and two different models of impulse detector neuron. For these models, we prove statements about duration of the latent period for a neuron under impact. In the second chapter, we describe the model of a neural cellular automaton with autogenerator dynamics and a modification of this model with detector dynamics. For these models, we also prove statements about the latent period for a neural automaton under impact. In the third chapter, we prove some statements about asymptotic equivalence of the impulse neurons and neural cellular automata of different kinds.

### Сведения об авторах:

**Копылов Валерий Дмитриевич,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
аспирант

**Дунаева Ольга Александровна,**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
канд. физ-мат. наук, доцент

**Мячин Михаил Леонидович**,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
канд. физ-мат. наук, доцент