Модел. и анализ информ. систем. Т.**14**, №**1** (2007) 3–10

УДК 517.51+514.17

Минимальные проекторы и максимальные симплексы

Невский М.В.
Ярославский государственный университет
e-mail: mnevsk@univ.uniyar.ac.ru

получена 22 ноября 2006

Аннотация

Доказывается, что величина θ_n минимальной нормы проектора при линейной интерполяции на n-мерном кубе $Q_n = [0,1]^n$ удовлетворяет условию $\theta_n = O(n^{1/2})$, $n \in \mathrm{N}$. Отсюда и из неравенств, установленных автором ранее, следует, что $\theta_n \asymp n^{1/2}$. Нужные верхние оценки получаются из рассмотрения проектора, узлы которого находятся в вершинах симплекса максимального объёма в Q_n.

1. Введение

Пусть $Q_n := [0,1]^n$, $n \in \mathrm{N}$; $C(Q_n)$ — пространство непрерывных на Q_n функций с нормой $\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|$.

При интерполяции функций из $C(Q_n)$ с помощью пространства $\Pi_1(\mathrm{R}^n)$ многочленов от n переменных общей степени ≤ 1 возникает вопрос о минимизации нормы интерполяционного проектора P за счёт выбора узлов A_i. Разные неравенства для величины минимальной нормы проектора были получены в статьях автора [2, 3]. В [2] вводились дополнительные ограничения $A_i \in \mathrm{ver}(Q_n)$; здесь и ниже $\mathrm{ver}(Q_n)$ есть совокупность вершин куба Q_n. В этих же работах содержатся используемые ниже сведения об интерполяции такого рода, в частности различные формулы для нормы проектора $\|P\| := \|P\|_{C(Q_n) \to C(Q_n)}$.

Пусть $A_1, \ldots A_{n+1} \in Q_n$ — узлы интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathrm{R}^n)$, $A_i = (x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$. Введём в рассмотрение матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Если S — симплекс с вершинами A_i, то $\mathrm{vol}(S) = |\det(\mathbf{A})|/n!$. В важном для нас частном случае, когда $A_{n+1} = (0, \ldots, 0)$, очевидно, $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{M})$.

Положим
$$k = k(S) := \min\{\alpha \ge 1 : Q_n \subset \alpha S\}.$$

Через αS обозначается результат гомотетии S относительно центра тяжести с коэффициентом α. Определим величины
$$\theta_n := \min_{A_i \in Q_n} \|P\|, \quad \xi_n := \min_{S \subset Q_n} k(S). \tag{1.1}$$

Как доказано в [3], при всех n
$$\xi_n = \frac{n+1}{2}\,(\theta_n - 1) + 1, \tag{1.2}$$

поэтому задачи изучения аппроксимационных характеристик θ_n и геометрических характеристик ξ_n оказываются эквивалентными.

В [2, 3] отмечалось, что для $n \in \mathrm{N}$
$$\theta_n = O(n), \quad \xi_n = O(n^2). \tag{1.3}$$

Натуральное m будем называть *адамаровым,* если существует матрица Адамара порядка m. Для совокупности тех n, при каждом из которых число $n+1$ является адамаровым, (1.3) допускает уточнение:
$$\theta_n = O(n^{1/2}), \quad \xi_n = O(n^{3/2}). \tag{1.4}$$

Как было доказано в [3], для указанных размерностей порядки роста в (1.4) уже являются неулучшаемыми, то есть имеют место соотношения

$$\theta_n \asymp n^{1/2}, \quad \xi_n \asymp n^{3/2}. \tag{1.5}$$

Здесь и ниже запись $L(n) \asymp M(n)$ означает, что для некоторых констант C_1, $C_2 > 0$, не зависящих от n, выполняется $C_1 M(n) \leq L(n) \leq C_2 M(n)$. Если L и N зависят также от других аргументов, то C_1 и C_2 предполагаются универсальными константами.

Целью настоящей работы является распространение неулучшаемых (то есть точных по порядку n) верхних оценок величин (1.1) на самую общую ситуацию. Именно, мы докажем, что *соотношения (1.4), а значит, и (1.5) верны для всех* $n \in \mathrm{N}$. Это даёт окончательное решение задачи об асимптотике величин θ_n и ξ_n при $n \to \infty$. Отмечаются также некоторые следствия, имеющие геометрический характер.

2. Максимальные симплексы в Q_n

Под *максимальным симплексом в кубе* Q_n будем понимать симплекс, принадлежащий Q_n, объём которого является максимальным, то есть такой симплекс $T \subset Q_n$, что для любого симплекса $S \subset Q_n$ имеет место неравенство $v_n := \mathrm{vol}(T) \geq \mathrm{vol}(S)$.

Как отмечено в [5], для любого n в Q_n существует максимальный симплекс, некоторая вершина которого является вершиной куба. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие максимальные симплексы; это обстоятельство ниже специально не оговаривается. При доказательстве основных утверждений в силу симметрии можно считать, что вершиной максимального симплекса T является точка $A_{n+1} = (0, \ldots, 0)$. Ненулевые вершины T обозначаются $A_1, \ldots, A_n$; их компоненты составляют построчно матрицу $\mathbf{M} = (x_j^{(i)})$ порядка n, см. пункт 1.

Величина v_n объёма максимального симплекса весьма важна для получения оценок для чисел θ_n и ξ_n. Верхние границы v_n позволяют установить оценки этих чисел снизу, см. статью автора [3]. Для получения точных по порядку верхних оценок θ_n и ξ_n нам понадобятся подходящие двусторонние неравенства для v_n. Перед формулировкой основной леммы отметим, что имеет место равенство $n! v_n = h_n$, см. [5], теорема 2.1. Здесь и ниже h_n есть максимальная величина определителя, состоящего из 0 и 1.

Лемма 2.1. *Для всех* $n \in \mathrm{N}$ *имеют место соотношения:*

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\log(4/3)}{\log n}\right) < \log(2^{n-1} h_{n-1}) \leq \frac{1}{2} \cdot n \log n, \tag{2.1}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n} < h_n \leq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n}, \tag{2.2}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!} < v_n \leq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!}. \tag{2.3}$$

Равенство справа в каждом из соотношений имеет место тогда и только тогда, когда число $n+1$ *— адамарово.*

Нетрудно видеть, что соотношения (2.1) – (2.3) попарно эквивалентны. Двойное неравенство (2.3) объединяет результаты Адамара 1893 г. (правая оценка), а также Клементса и Линдстрёма 1965 г. (левая оценка). В форме неравенства (2.1) утверждение леммы приведено в обзорной части статьи [5], см. там теорему 2.8.

Другая полезная информация о величинах v_n по данным на 1996 г. также приведена в [5]; она была частично использована автором в работе [3].

3. Основные оценки

В утверждениях этого пункта T — максимальный симплекс в Q_n; P — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами T.

Теорема 3.1. *Для* $n \in \mathrm{N}$

$$\|P\| \leq \min\left(n+1, \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2} + 1\right). \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть A_i — вершины T, причём $A_{n+1}=0$. Воспользуемся следующей формулой для нормы P, приведённой в [2]:

$$\|P\| = \frac{1}{|\Delta|} \max_{y\in \mathrm{ver}(Q_n)} \sum_{i=1}^{n+1} |\Delta_i(y)|. \tag{3.2}$$

Здесь $\Delta := \det(\mathbf{A})$; $\Delta_i(y)$ получается из Δ заменой i-й строки на строку $(y_1 \quad \dots \quad y_n \quad 1)$. Числа $\lambda_i := \Delta_i(y)/\Delta$ являются барицентрическими координатами y относительно симплекса T, поэтому $\sum \lambda_i = 1$. (Последний факт следует и из того, что это равенство выполняется во всех узлах $y = A_i$; затем достаточно учесть единственность решения задачи интерполяции.)

Так как S — максимальный симплекс, то $|\Delta| = h_n$, и для любого $y \in \mathrm{ver}(Q_n)$ и любого i справедливо $|\Delta_i(y)| \le |\Delta|$. Достаточно использовать связь между определителями и объёмами. Иными словами, $|\lambda_i| \le 1$, $i = 1, \dots, n+1$. Поэтому из (3.2) сразу получаем оценку $\|P\| \le n+1$. Это означает, что $\|P\| = O(n)$.

Однако более тонкие рассуждения показывают, что $\|P\| = O(n^{1/2})$. Именно, теперь мы докажем, что

$$\|P\| < \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2} + 1. \tag{3.3}$$

Пусть $y \in \mathrm{ver}(Q_n)$. Воспользуемся тем, что $A_{n+1} = 0$, и разложим определители $\Delta_i(y)$, $i = 1, \dots, n$, по последней строке. Это даст возможность представить сумму их абсолютных величин как определитель порядка $n+1$, получающийся некоторым окаймлением определителя матрицы $\mathbf{M}$. Мы получим следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta_i(y)| = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(y)\cdot \mathrm{sign}\,(\Delta_i(y)) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n & 0 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & \sigma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & \sigma_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n & 0 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & \mu_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n & 0 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & -\nu_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & -\nu_n \end{vmatrix}.$$

Присутствующие здесь векторы $\sigma, \mu, \nu \in \mathrm{R}^n$ определяются следующим образом. Компоненты σ равны $0, 1$ или -1 и подбираются так, чтобы было выполнено второе равенство в предыдущей цепочке. Далее, если $\sigma_i = 1$, то полагаем $\mu_1 := 1$, $\nu_i := 0$. Если $\sigma_i = -1$, то $\mu_i := 0$, $\nu_i := -1$. Наконец, если $\sigma_i = 0$, то $\mu_i = \nu_i := 0$. Строки последних двух определителей есть элементы Q_{n+1}. Используя связь между определителями и объёмами, получаем, что каждый из этих двух определителей не превосходит h_{n+1}. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta_i(y)| \le 2h_{n+1}.$$

Так как $|\Delta| = h_n$, то, применяя оба неравенства из соотношения (2.2) леммы 2.1, запишем оценку:

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta_i(y)}{\Delta}\right| \le \frac{2h_{n+1}}{h_n} < \frac{4\,(n+2)^{(n+2)/2}}{3\,(n+1)^{(n+1)/2}} =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)/2} < \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2}.$$

Как отмечалось, $|\lambda_{n+1}| \le 1$. Итак,

$$\sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| + |\lambda_{n+1}| < \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2} + 1. \tag{3.4}$$

Правая часть (3.4) не зависит от $y \in \mathrm{ver}(Q_n)$. Используя (3.2) и взяв в (3.4) максимум по y, приходим к (3.3). В объединении с тем, что $\|P\| \le n+1$, неравенство (3.3) даёт оценку (3.1). $\square$

Теорема 3.1 допускает уточнение для $n \le 7$ и тех $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, при которых число $n+1$ является адамаровым.

Определим последовательность $\{r_n\}$ следующим образом. Первые семь значений r_n равны

$$r_1 := 1, \quad r_2 := 3, \quad r_3 := 2, \quad r_4 := \frac{7}{3}, \quad r_5 := \frac{13}{5}, \quad r_6 := 3, \quad r_7 := \frac{5}{2}.$$

Пусть $n \geq 8$. Если $n+1$ является адамаровым, положим $r_n := \sqrt{n+1}$; в противном случае положим

$$r_n := \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2} + 1.$$

Теорема 3.2. *Для всех $n \in \mathrm{N}$ выполняется неравенство*

$$\|P\| \leq r_n. \tag{3.5}$$

При $n \leq 7$, $n \neq 2$ в (3.5) имеет место равенство. Если $n \geq 8$ и $n+1$ не является адамаровым, то в (3.5) выполняется строгое неравенство.

Доказательство. Минимум в правой части (3.1) достигается на втором выражении при $n \geq 7$, причём в этом случае в (3.1) имеет место строгое неравенство (см. доказательство теоремы 3.1). Оценка $\|P\| \leq \sqrt{n+1}$ в случае, когда $n+1$ — адамарово и $n \geq 3$, получена в [2], теорема 2. Поэтому достаточно уточнить оценки теоремы 3.1 для $n \leq 7$.

Если $n = 1$, то $S = Q_1 = [0, 1]$, поэтому $\|P\| = \theta_1 = 1$.

Пусть $n = 2$. Тогда T с точностью до подобия задаётся вершинами $(1, 0)$, $(\alpha, 0)$, $(0, 0)$; $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Как следует из результатов, приведённых в [1, с. 63], $\|P\| = 3 - 2\alpha$. Справедливы неравенства $2 \leq \|P\| \leq 3$, причём границы соответствуют $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 0$.

Если $n = 3$, то число $n + 1$ является адамаровым. Максимальный симплекс T представляет собой правильный тетраэдр с длиной ребра $\sqrt{2}$, вершины которого принадлежат $\mathrm{ver}(Q_3)$. Каждая грань куба содержит ровно две вершины тетраэдра. Как показано в [3], $\|P\| = \theta_3 = 2$.

Максимальные симплексы $T \subset Q_n$ при $n = 4, 5, 6$ описаны в [5]. При $n = 4$ симплекс T с точностью до подобия задаётся вершинами $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 0)$. Как следует из доказательства теоремы 1 работы [2], в этом случае $\|P\| = 7/3$. Значения $\|P\|$ при $n = 5$ и $n = 6$ приводятся в [3], они равны соответственно 13/5 и 3.

Наконец, при $n = 7$ число $n + 1$ вновь является адамаровым. В этом случае симплекс T является правильным с длиной ребра, равной 2. Вершины T принадлежат $\mathrm{ver}(Q_7)$. Прямое вычисление даёт $\|P\| = 5/2$; это значение приводится в [2, 3]. □

4. Соотношение $\theta_n \asymp n^{1/2}$ и другие следствия

Отметим ряд следствий из теорем предыдущего пункта. Первые три утверждения имеют геометрический характер. В них $n \in \mathrm{N}$, T — максимальный симплекс в Q_n; "транслят" означает "результат параллельного переноса". Числа r_n определяются в предыдущем пункте.

Следствие 4.1. *Справедливо неравенство*

$$k(T) \leq \frac{r_n(n+1) - n + 1}{2}. \tag{4.1}$$

Иными словами, имеют место включения

$$T \subset Q_n \subset \left(\frac{r_n(n+1) - n + 1}{2}\right) T. \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть $S \subset Q_n$ — произвольный симплекс с ненулевым объёмом, P — проектор, узлы которого совпадают с вершинами S. Как доказано в [3],

$$k(S) = \frac{n+1}{2}\left(\|P\| - 1\right) + 1 = \frac{\|P\|(n+1) - n + 1}{2}.$$

Если $S = T$ — максимальный симплекс, то теорема 3.2 даёт $\|P\| \leq r_n$. Поэтому имеет место (4.1). По определению $k(T)$ правое включение в (4.2) эквивалентно (4.1). □

Следствие 4.2. *T содержит некоторый транслят куба*

$$Q_n^* := \left(\frac{2}{r_n(n+1)-n+1}\right) Q_n.$$

Если центр тяжести T совпадает с центром тяжести Q_n, то T содержит Q_n^*.

Доказательство. Этот результат получается из (4.2) и соображений подобия. □

Следствие 4.3. *Справедливы включения*

$$T \subset Q_n \subset (-n)T \bigcap \left(\frac{r_n(n+1)-n+1}{2}\right) T. \tag{4.3}$$

Доказательство. В статье [6] отмечается, что максимальный симплекс T обладает свойством $T \subset Q_n \subset (-n)T$. Применяя также (4.2), получаем включения (4.3). □

Для $n = 1$ и $n = 2$ пересечение в (4.3) совпадает с $(-n)T$. В случае $n = 1$ это связано с равенствами $r_1 = 2$, $(-1)T = T = Q_1$. Если же $n = 2$, то надо взять $r_2 = 3$. Так как $(-2)T \subset 4T$, то $(-2)T \bigcap 4T = (-2)T$. Однако, как показано в [4], $(-n)T \not\subset \big((r_n(n+1)-n+1)/2\big)T$ уже при $n = 3$. Тем самым (4.3) является содержательным уже в трёхмерной ситуации.

Следствие 4.4. *Для $n \in \mathrm{N}$, $n \neq 2$, справедливы неравенства*

$$\theta_n \le p_n := \min\left(\frac{n+1}{2}, \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2}+1\right), \tag{4.4}$$

$$\xi_n \le \frac{p_n(n+1)-n+1}{2}. \tag{4.5}$$

Если $n+1$ — адамарово, то

$$\theta_n \le \sqrt{n+1}, \quad \xi_n \le \frac{(n+1)^{3/2}-n+1}{2}. \tag{4.6}$$

Кроме того, имеют место соотношения

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \frac{2\sqrt{5}+5}{5}, \quad \theta_3 = 2, \quad \theta_4 \le \frac{7}{3}, \quad \theta_5 \le \frac{13}{5}, \quad \theta_6 \le 3, \quad \theta_7 \le \frac{5}{2};$$

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = \frac{3\sqrt{5}+5}{5}, \quad \xi_3 = 3, \quad \xi_4 \le \frac{13}{3}, \quad \xi_5 \le \frac{29}{5}, \quad \xi_6 \le 8, \quad \xi_7 \le 7.$$

Доказательство. В статье автора [3] доказано, что для всех $n \neq 2$ имеет место неравенство $\theta_n \le (n+1)/2$. Из теоремы 3.1 следует, что $\theta_n < (4\sqrt{e}\sqrt{n+2})/3 + 1$. Поэтому выполняется (4.4). Оценка (4.5) следует из соотношений (1.2) и (4.4). Неравенства (4.6) вытекают из теоремы 3.2 и (1.2). Далее, точные значения θ_n и ξ_n при $n = 1, 2, 3$ получены в [3]. Неравенства для θ_n при $n = 4, 5, 6, 7$ следуют из теоремы 3.2. Оценки для ξ_n получаются затем с использованием (1.2). □

Минимум в определении p_n достигается на втором выражении лишь начиная с $n = 23$. Поэтому при $n < 23$ оценки (4.4) – (4.5) совпадают с неравенствами $\theta_n \le (n+1)/2$, $\xi_n \le (n^2+3)/4$, которые отмечались в [3]. Однако неравенства (4.4) – (4.5) позволяют сделать важный для нас вывод о точных порядках роста этих величин в зависимости от размерности n. Эти порядки оказываются ровно теми же, что и в адамаровой ситуации (то есть для бесконечной совокупности тех значений n, при каждом из которых число $n+1$ адамарово). Случай, когда $n+1$ есть число Адамара, был рассмотрен в [2, 3].

Следствие 4.5. *Для $n \in \mathrm{N}$ имеют место эквивалентности*

$$\theta_n \asymp n^{1/2}, \quad \xi_n \asymp n^{3/2}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Как доказано в [3], с не зависящими от n константами выполняются неравенства $\theta_n \ge c_1\sqrt{n}$, $\xi_n \ge c_2 n^{3/2}$, $n \in \mathrm{N}$. Неравенства (4.4) и (4.5) означают соответственно, что $\theta_n = O(n^{1/2})$ и $\xi_n = O(n^{3/2})$. Поэтому справедливы эквивалентности (4.7).

Приведём в явном виде простую подходящую оценку для θ_n. По нашим результатам, для всех n

$$\frac{1}{e}\sqrt{n-1} < \theta_n < \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2}+1.$$

Левое неравенство получено в [3], правое содержится в (4.4). При $n \geq 2$ нижняя граница превосходит $1/4\sqrt{n}$; верхняя граница строго меньше, чем $3\sqrt{n}$ при $n \geq 6$. Последнее объясняется тем, что функция

$$g(n) := \frac{4\sqrt{e}}{3}\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

убывает; значит, $g(n) \leq g(6) = 2.94\ldots < 3$, если $n \geq 6$. Таким образом, для $n \geq 6$

$$\frac{1}{4}\sqrt{n} < \theta_n < 3\sqrt{n}. \tag{4.8}$$

Применяя оценки следствия 4.4 для первых пяти значений θ_n, нетрудно убедиться, что (4.8) верно при всех n. $\square$

Наши результаты означают, что проектор, соответствующий максимальному симплексу, при всех n является почти-минимальным (в смысле определения θ_n), а сам этот симплекс является почти-экстремальным (в смысле определения ξ_n).

Следствие 4.6. *Пусть P — интерполяционный проектор, узлы которого находятся в вершинах максимального симплекса T. Для $n \in \mathrm{N}$ с универсальными константами имеют место соотношения*

$$\|P\| \approx \theta_n, \quad k(T) \approx \xi_n. \tag{4.9}$$

Доказательство. Ясно, что $\|P\| \geq \theta_n$, $k(T) \geq \xi_n$. Из теоремы 3.1 следует, что $\|P\| = O(n^{1/2})$, а из неравенства (4.1) — что $k(T) = O(n^{3/2})$. Для установления (4.9) теперь достаточно привлечь (4.7). $\square$

Следующее утверждение устанавливает связь между величинами θ_n, ξ_n, h_n и v_n.

Следствие 4.7. *Для $n \in \mathrm{N}$ выполняются эквивалентности*

$$\theta_n \approx h_n^{1/n}, \quad \xi_n \approx h_n^{3/n}; \tag{4.10}$$

$$\theta_n \approx (n!v_n)^{1/n}, \quad \xi_n \approx (n!v_n)^{3/n}. \tag{4.11}$$

Доказательство. Так как $h_n = n!v_n$, то соотношения (4.10) попарно равносильны соотношениям (4.11). Достаточно доказать (4.10).

Из (2.2) следует, что $(1/2)\sqrt{n} < h_n{}^{1/(n+1)} \leq \sqrt{n}$, $n \in \mathrm{N}$. При $n \geq 2$ правое неравенство является строгим. Итак, мы имеем оценки

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)/n} n^{(n+1)/(2n)} < h_n^{1/n} \leq n^{(n+1)/(2n)}.$$

Нижняя оценка даёт

$$h_n^{1/n} > \frac{1}{2}\sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n} n^{1/(2n)} \geq \frac{1}{4}\sqrt{n}.$$

Так как $n^{1/(2n)} \leq 3^{1/6} = 1.20\ldots$, то $h_n^{1/n} < 1.21\sqrt{n}$. Поэтому

$$\frac{1}{4}\sqrt{n} < h_n^{1/n} < 1.21\sqrt{n}. \tag{4.12}$$

Таким образом, $h_n^{1/n} \approx n^{1/2}$ и $h_n^{3/n} \approx n^{3/2}$. Для получения (4.10) осталось применить (4.7). $\square$

Отметим теперь соотношение для объёма симплекса, соответствующего минимальному проектору. Пусть P — произвольный проектор, удовлетворяющий условию $\|P\| = \theta_n$, и S — симплекс с вершинами в узлах этого проектора.

Следствие 4.8. *Существует универсальная константа $c > 0$ такая, что для $n \in \mathrm{N}$*

$$cv_n^{1/n} < \mathrm{vol}(S)^{1/n} \leq v_n^{1/n}. \tag{4.13}$$

Таким образом, $\mathrm{vol}(S)^{1/n} \approx v_n^{1/n}$. *Кроме того,* $\mathrm{vol}(S)^{1/n} \approx n^{-1/2}$.

Доказательство. Правое неравенство в (4.13) очевидно. Докажем, что если взять $c = 1/20$, то будет выполнено и левое неравенство. Константа 1/20 не является наилучшей.

Пусть $\mathbf{A}$ — матрица узлов проектора P, определённая в пункте 1. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ вычтем из i-й строки матрицы $\mathbf{A}$ её $(n+1)$-ю строку. Обозначим через $\mathbf{M}^*$ подматрицу, которая будет располагаться в первых n строках и первых n столбцах преобразованной матрицы. Если последний узел A_{n+1} является нулевым, то $\mathbf{M}^*$ совпадает с матрицей $\mathbf{M}$ из пункта 1. Ясно, что $|\det(\mathbf{M}^*)| = n!\,\mathrm{vol}(S)$. Воспользуемся следующей оценкой для нормы P :

$$\|P\| > \frac{1}{2e} \cdot \left(\frac{n^{n+1}}{|\det(\mathbf{M}^*)|} \right)^{1/n}. \tag{4.14}$$

Неравенство (4.14) для случая $A_{n+1} = 0$ доказано в [2], см. там замечание 6. В общем случае его доказательство использует те же идеи. Учтём далее соотношение $\|P\| = \theta_n < 3\sqrt{n}$, а также оценку $h_n^{1/n} < 1.21\sqrt{n}$, см. (4.8) и (4.12). Из (4.14) и этих неравенств следует:

$$|\det(\mathbf{M}^*)|^{1/n} > \frac{n}{2e\|P\|} = \frac{n}{2e\theta_n} > \frac{1}{6e}\sqrt{n} > \frac{1}{6e \cdot 1.21} h_n^{1/n} =$$

$$= \frac{1}{19.73\ldots} h_n^{1/n} > \frac{1}{20} h_n^{1/n}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{vol}(S)^{1/n} = \left(\frac{|\det(\mathbf{M}^*)|}{n!} \right)^{1/n} > \frac{1}{20} \left(\frac{h_n}{n!} \right)^{1/n} = \frac{1}{20} v_n^{1/n}.$$

Теперь укажем неравенства, означающие, что $\mathrm{vol}(S)^{1/n} \approx n^{-1/2}$. Из формулы Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n \cdot e^{\zeta_n/(12n)}$, $0 < \zeta_n < 1$, следует, что при всех n

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{1/12}. \tag{4.15}$$

Применим (4.15) к двусторонней оценке (2.3) для v_n. С одной стороны,

$$v_n^{1/n} \le \left(\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!} \right)^{1/n} < \frac{(n+1)^{(n+1)/(2n)}}{2\left(\sqrt{2\pi n}(n/e)^n\right)^{1/n}} =$$

$$= \frac{e\sqrt{n+1}}{2n} \left(\sqrt{\frac{n+1}{2\pi n}} \right)^{1/n} < \frac{e\sqrt{n+1}}{2n} < 2n^{-1/2}.$$

С другой стороны,

$$v_n^{1/n} > \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!} \right)^{1/n} > \frac{e\sqrt{n+1}}{2n} \left(\frac{3}{4} \right)^{1/n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{1/2n} \left(\frac{\sqrt{1/(2\pi)}}{e^{1/12}} \right)^{1/n}.$$

Каждый из трёх последних сомножителей принимает своё минимальное значение при $n = 1$. Значит,

$$v_n^{1/n} > \frac{e\sqrt{n+1}}{2n} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{1/(2\pi)}}{e^{1/12}} = \frac{3e^{11/12}}{8\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n+1}}{n} =$$

$$= 0.52\ldots \frac{\sqrt{n+1}}{n} > 0.52\ldots n^{-1/2} > \frac{1}{2} n^{-1/2}.$$

Итак, при всех n

$$\frac{1}{2} n^{-1/2} < v_n^{1/n} < 2n^{-1/2}. \tag{4.16}$$

Как мы показали выше, $\mathrm{vol}(S)^{1/n} > (1/20) v_n^{1/n}$. Поэтому

$$\frac{1}{40} n^{-1/2} < \mathrm{vol}(S)^{1/n} < 2n^{-1/2}. \tag{4.17}$$

Константы в неравенствах (4.16) – (4.17) не являются точными. □

Список литературы

1. Невский, М. В. Некоторые вопросы теории приближения функций: учебное пособие / М. В. Невский, И. П. Иродова; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 1999. – 92 с.

2. Невский, М. В. Оценки для минимальной нормы проектора при линейной интерполяции по вершинам n-мерного куба / М. В. Невский // Моделирование и анализ информационных систем. – 2003. – Т. 10, № 1. – С. 9 – 19.

3. Невский, М. В. Геометрические методы в задаче о минимальном проекторе / М. В. Невский // Моделирование и анализ информационных систем. – 2006. – Т. 13, № 2. – С. 16 – 29.

4. Невский, М. В. Геометрические конструкции в задаче об оптимальной линейной интерполяции на n-мерном кубе / М. В. Невский; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль, 2006. – 21 с. – Деп. в ВИНИТИ 13.06.2006, № 785–В2006.

5. Hudelson, M. Largest j-simplices in d-cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem / M. Hudelson, V. Klee, D. Larman // Linear Algebra Appl. – 1996. – V. 241 – 243. – P. 519 – 598.

6. Lassak M. Parallelotopes of maximum volume in a simplex / M. Lassak // Discrete Comput. Geom. – 1999. – V. 21. – P. 449 – 462.

Minimal projections and largest simplices

Nevskij M.V.

It is proved that the minimal norm θ_n of a projection in linear interpolation on the n-dimensional cube $Q_n = [0,1]^n$ satisfies the condition $\theta_n = O(n^{1/2})$, $n \in$ N. With the previous results of the author it means that $\theta_n \asymp n^{1/2}$. The upper estimates are provided by the projection with knots of interpolation in vertices of a largest simplex in Q_n.