Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **3** (2014) 81–90

УДК 517.5

Счётная аддитивность распространения оператора дифференцирования

Морозов А. Н.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: moroz@uniyar.ac.ru

получена 5 ноября 2013

Ключевые слова: оператор дифференцирования, квазинорма

Статья продолжает работы по изучению свойств, обретаемых оператором дифференцирования Λ при распространении за границы пространства W_1^1. Исследование проводится с помощью введения семейства пространств $Y_p^1,\ 0 < p < 1$, имеющего аналогию с семейством $W_p^1,\ 1 \le p < \infty$. Пространства Y_p^1 снабжены квазинормами, построенными на основе квазинорм пространств L_p; $\Lambda : Y_p^1 \mapsto L_p$. Дано достаточное условие того, чтобы функция, кусочно принадлежащая пространству Y_p^1, принадлежала этому пространству (если $f \in Y_p^1[x_{i-1}; x_i],\ i \in N,\ 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots <\ 1$, то $f \in Y_p[0; 1]$). Другими словами, признак, когда выполняется равенство: $\Lambda(\bigcup f_i) = \bigcup \Lambda(f_i)$. Из классических характеристик функций ближе других к достаточному условию находится ограниченность вариации по Жордану. Как следствие, получается, что если функция f кусочно принадлежит пространству W_1^1 и имеет ограниченную вариацию, то f принадлежит каждому пространству $Y_p^1,\ 0 < p < 1$.

1. Введение и основные обозначения

При изучении кусочно-полиномиальных и локальных приближений в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$, автором было рассмотрено распространение k-й производной (оператора) с пространств W_1^k на пространства, являющиеся в определённом смысле их преемниками и имеющие нижний индекс меньше единицы (см., например, [1]). Одним из мотивов послужили асимптотические формулы для величин наилучших кусочно-полиномиальных приближений, единые при всех $p > 0$. Данные асимптотические формулы неразрывно связаны с гладкостью приближаемых функций: если $p \ge 1$ – со стандартными производными соответствующего порядка и суммируемости, если $0 < p < 1$ – с некоторым обобщением (распространением) стандартных производных в пространствах L_p.

Позже (см. [2]) свойства введённых производных были подробнее рассмотрены при $k = 1$. Данная статья является продолжением этих исследований.

Как обычно, $L_p[I]$ обозначает пространство действительных функций, интегрируемых в степени p $(0 < p < \infty)$ по Лебегу на отрезке $I = [a;b]$, с величиной элементов

$$\|f\|_{L_p[I]} = \Big(\int\limits_I |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}};$$

$C[I]$ – пространство непрерывных на I функций,

$$\|f\|_{C[I]} = \max_{x\in I} |f(x)|.$$

Когда неясность исключена, сокращаем обозначения до L_p и $\|f\|_p$ или соответственно до C и $\|f\|_\infty$.

Основой для дальнейших построений являются пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке I функций $C^1 = C^1[I]$ и

$$W_p^1 = W_p^1[I] = \Big\{f : f \text{ абсолютно непрерывна на отрезке } I, f^{\,\prime} \in L_p\Big\}$$

с нормами $\|\cdot\|_p + \|(\cdot)^{\,\prime}\|_p,\ 1 \le p \le \infty$.

Этап перехода в область $0 < p < 1$ удобно прокомментировать следующим рассуждением. Рассмотрим оператор дифференцирования

$$\Lambda : C^1 \mapsto C,\ \ \big(\Lambda f\big)(x) = f^{\,\prime}(x).$$

Пусть на пространстве C введена норма $\|\cdot\|_1$, а на пространстве C^1 — норма $\|\cdot\|_1 + \|(\cdot)^{\,\prime}\|_1$. Очевидно,

$$\|\Lambda f\|_C \le \|f\|_{C^1}.$$

Из этого неравенства следует, что оператор Λ может быть однозначно распространён с C^1 на его замыкание в метрике, порождаемой нормой $\|\cdot\|_1 + \|(\cdot)^{\,\prime}\|_1$, т.е. на W_1^1. При этом областью значений Λ будет пространство, являющееся замыканием C в определённой на нём метрике, т.е. L_1. Относящиеся к этому рассуждению теоремы см., например, в [3] на с. 240.

Все пространства W_p^1 можно рассматривать как замыкания пространства C^1 в метриках, порождаемых нормами $\|\cdot\|_p + \|(\cdot)^{\,\prime}\|_p,\ 1 \le p < \infty$, а построение производной в этих пространствах — как распространение непрерывного линейного оператора Λ с пространства C^1, т.е. построение $\Lambda : W_p^1 \mapsto L_p$.

Хорошо известно, что при всех $1 \le p < \infty$ для $f \in W_p^1$ и $f \in C^1$ при $p = \infty$ выполняется

$$\big\|f^{\,\prime}\big\|_p = \lim_{t\to 0}\ t^{-1}\omega_1(f,t)_p = \sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(f,t)_p,$$

где

$$\omega_1(f,t)_p = \sup_{0<\delta<t} \big\|\Delta_\delta f\big\|_{L_p[a,b-\delta]}$$

– модуль непрерывности в L_p (в C при $p = \infty$),

$$\Delta_\delta f(x) = \ f(x+\delta) - f(x).$$

Иначе говоря, нормы на пространствах W_p^1 и C^1 могут быть преобразованы к виду

$$\|\cdot\|_p + \sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(\cdot,t)_p,$$

и распространение оператора дифференцирования связано с данными величинами.

Чтобы избежать постоянных оговорок, для значений индекса, меньших единицы, далее будет использоваться буква r, т.е. всюду ниже $0 < r < 1$.

Рассмотрим на пространстве C^1 семейство квазинорм (определение и основные свойства квазинорм см., например, [4], с. 79):

$$\|\cdot\|_{H^1_r} = \|\cdot\|_r + |\cdot|_r, \text{ где } |\cdot|_r = \sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(\cdot,t)_r.$$

Определим ([1]) для каждого r ($0 < r < 1$) пространство Y^1_r как пополнение C^1 в метрике, порождаемой квазинормой пространства H^1_r.

О существовании метрики, ассоциированной с квазинормой, см. [4], с. 80. Так, метрику на H^1_r определяет функционал

$$\|\cdot\|^r_r + |\cdot|^r_r.$$

Отметим, что

$$|f|^r_r = \sup_{t>0}\Big(t^{-r}\int\limits_a^{b-t} \big|\Delta^1_t f(x)\big|^r dx\Big).$$

2. Предварительные результаты

Выделим приоритетные утверждения из предшествующих работ.

Из неравенств между метриками сразу следует, что $W^1_1 \subset Y^1_r$.

Теорема 1. На пространствах Y^1_r определён линейный оператор $\Lambda : Y^1_r \mapsto L_r$ и выполняется

$$1)\ \lim_{t\to 0}\ t^{-1}\omega_1(f,t)_r = \|\Lambda f\|_r,$$

$$2) \text{ если } \ f \in W^1_1[c;d],\ [c;d]\subset[a;b], \text{ тогда } \ \Lambda f\Big|_{[c;d]} = f\,'.$$

Яркими примерами функций из Y^1_p, не входящих в W^1_1, являются функции с монотонной неинтегрируемой производной.

Теорема 2. Пусть $f \in L_r[a;b] \cap W^1_1[a;b-\epsilon]$ для любого $\epsilon > 0$, $f\,'$ неотрицательна на $[a;b)$ и не убывает, тогда если конечна величина $\|f\,'\|_r$, то $f \in Y^1_r[a;b]$. При этом

$$\sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(f,t)_r = \lim_{t\to 0}\ t^{-1}\omega_1(f,t)_r = \|f\,'\|_r.$$

Это утверждение даёт также определённые границы для конкретных Y^1_r и H^1_r и метод к разграничению внутри семейств таких пространств.

Теорема 3. Если функция f кусочно принадлежит пространству Y^1_r, тогда она принадлежит этому пространству.

Подразумевается, что если для некоторого набора точек $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ выполняется $f \in Y^1_r[x_{i-1};x_i]$, $1 \le i \le m$, то $f \in Y^1_r[a;b]$.

Следствие. Если $f \in Y^1_{r_i}[x_{i-1};x_i]$, $1 \le i \le m$, то $f \in Y^1_{r_*}[a;b]$, где $r_* = min\{r_1,...,r_m\}$.

3. Счётная аддитивность распространения оператора дифференцирования

На протяжении этого параграфа для упрощения работы со второстепенными деталями будем рассматривать $[a;b]=[0;1]$.

Свойство аддитивности распространения оператора дифференцирования относительно интервала, сформулированное в теореме 3 и её следствии, очевидно, не может быть превращено в свойство счётной аддитивности без дополнительных ограничений. Используя идеи теоремы 3, дадим одно достаточное условие.

Лемма. Если $f \in Y_r^1[c;d]$, $[c;d] \subset [0;1]$, тогда функция

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [c;d], \\ 0, & x \notin [c;d] \end{cases}$$

принадлежит пространству $Y_r^1[0;1]$, и выполняется

$$\|\tilde{f}\|^r_{L_r[0;1]} + |\tilde{f}|^r_{L_r[0;1]} \le \gamma \cdot \Big((d-c)^{-r} \cdot \|f\|^r_{L_r[c;d]} + |f|^r_{L_r[c;d]} \Big),$$

где $\gamma < 5$.

Доказательство. То, что $\tilde{f} \in Y_r^1[0;1]$, сразу следует из теоремы 3. Ясно,

$$\|\tilde{f}\|^r_{L_r[0;1]} = \|f\|^r_{L_r[c;d]} \le (d-c)^{-r} \cdot \|f\|^r_{L_r[c;d]}.$$

Оценим величину $|\tilde{f}|^r_{L_r[0;1]}$.
Если $d-c < t < 1$, то

$$t^{-r} \int\limits_0^{1-t} \big|\Delta_t \tilde{f}(x)\big|^r dx \le t^{-r} \int\limits_{c-t}^{d-t} \big|f(x+t)\big|^r dx + t^{-r} \int\limits_c^d \big|f(x)\big|^r dx < 2 \cdot (d-c)^{-r} \cdot \|f\|^r_{L_r[c;d]}.$$

Если $0 < t \le d-c$, то

$$t^{-r} \int\limits_0^{1-t} \big|\Delta_t \tilde{f}(x)\big|^r dx \le t^{-r} \int\limits_{c-t}^{c} \big|f(x+t)\big|^r dx + t^{-r} \int\limits_c^{d-t} \big|\Delta_t f(x)\big|^r dx + t^{-r} \int\limits_{d-t}^{d} \big|f(x)\big|^r dx \le$$

$$\le t^{-r} \int\limits_c^{c+t} \big|f(x)\big|^r dx + |f|^r_{L_r[c;d]} + t^{-r} \int\limits_{d-t}^{d} \big|f(x)\big|^r dx.$$

Рассуждение сводится к оценке первого и третьего слагаемых в правой части.

Покажем, что величина $t^{-r} \int\limits_y^{y+t} \big|f(x)\big|^r dx, \quad c \le y < y+t \le d,$ равномерно ограничена.

Пусть

$$\int\limits_c^d \big|f(x)\big|^r dx = S, \tag{1}$$

$$\sup_{t>0}\Bigl(t^{-r}\int\limits_{c}^{d-t}\bigl|f(x+t)-f(x)\bigr|^r dx\Bigr)=M. \tag{2}$$

Используя неравенство треугольника и условие (2), для $0<t<d-c$ и каждого $[u;v]\subset[c;d-t]$ получаем

$$\Bigl|\int\limits_{u}^{v}\bigl|f(x+t)\bigr|^r dx-\int\limits_{u}^{v}\bigl|f(x)\bigr|^r dx\Bigr|\le\int\limits_{u}^{v}\bigl|f(x+t)-f(x)\bigr|^r dx\le\int\limits_{c}^{d-t}\bigl|f(x+t)-f(x)\bigr|^r dx\le M\cdot t^r.$$

Откуда

$$\Bigl|\int\limits_{v}^{v+t}\bigl|f(x)\bigr|^r dx-\int\limits_{u}^{u+t}\bigl|f(x)\bigr|^r dx\Bigr|=\Bigl|\int\limits_{u+t}^{v+t}\bigl|f(x)\bigr|^r dx-\int\limits_{u}^{v}\bigl|f(x)\bigr|^r dx\Bigr|=$$

$$=\Bigl|\int\limits_{u}^{v}\bigl|f(x+t)\bigr|^r dx-\int\limits_{u}^{v}\bigl|f(x)\bigr|^r dx\Bigr|\le M\cdot t^r.$$

Следовательно, $\int\limits_{y}^{y+t}\bigl|f(x)\bigr|^r dx$ можно сопоставить с интегралом от той же функции по любому отрезку длины t из $[c;d]$. Возьмём $t=\frac{1}{n}\cdot(d-c)$, $n\in\mathbf{N}$. Тогда отрезок $[c;d]$ составлен ровно из n отрезков длины t. Значит, по условию (1) наименьший интеграл от $\bigl|f(x)\bigr|^r$ по отрезку длины t не превосходит величины $\frac{1}{n}\cdot S$. Получается, что

$$\int\limits_{y}^{y+t}\bigl|f(x)\bigr|^r dx<\frac{1}{n}\cdot S+\Bigl(\frac{d-c}{n}\Bigr)^r\cdot M\le\Bigl(\frac{d-c}{n}\Bigr)^r\cdot\Bigl(\frac{S}{(d-c)^r}+M\Bigr)$$

или

$$t^{-r}\int\limits_{y}^{y+t}\bigl|f(x)\bigr|^r dx<\frac{S}{(d-c)^r}+M.$$

В общем случае, например, выбрав для заданного $0<t<d-c$ число

$n\in\mathbf{N}$ так, чтобы $\dfrac{d-c}{n+1}\le t<\dfrac{d-c}{n}$ (откуда, грубо, $\Bigl(\dfrac{n}{d-c}\Bigr)^r<t^{-r}<2^r\Bigl(\dfrac{n}{d-c}\Bigr)^r$),

получим для $t^{-r}\int\limits_{y}^{y+t}\bigl|f(x)\bigr|^r dx$ аналогичную оценку.

Лемма доказана.

Пусть всюду ниже $\{x_i\}$ – монотонная последовательность точек из $[0;1]$, для определённости возрастающая, сходящаяся к 1: $0=x_0<x_1<\dots<x_i<\dots\to 1$.

Теорема 4. Если

$$f \in Y_r^1[x_{i-1}; x_i],\ i = 1, 2, \cdots,\ \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\|\bar{f}\|^r_{L_r[x_{i-1};x_i]} + |f|^r_{L_r[x_{i-1};x_i]} \right) < \infty,$$

где $\|\bar{f}\|^r_{L_r[c;d]} = \left\| \frac{f}{d-c} \right\|^r_{L_r[c;d]}$, тогда $f \in Y_r^1[0;1]$.

Доказательство. Сходимость ряда из условия теоремы равносильна сходимости двух рядов:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\bar{f}\|^r_{L_r[x_{i-1};x_i]} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |f|^r_{L_r[x_{i-1};x_i]}.$$

Из сходимости первого ряда следует принадлежность функции f пространству $L_r[0;1]$.

Обозначим $(i = 1, 2, \cdots)$

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x),\ \text{если}\ \ x \in [x_{i-1}; x_i), \\ 0,\ \text{если}\ \ x \notin [x_{i-1}; x_i); \end{cases}$$

тогда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x).$$

По теореме 3 $f_i \in Y_r^1[0;1]$. Далее, по лемме

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\|f_i\|^r_{L_r[0;1]} + |f_i|^r_{L_r[0;1]} \right) \leq \gamma \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\|\bar{f}\|^r_{L_r[x_{i-1};x_i]} + |f|^r_{L_r[x_{i-1};x_i]} \right).$$

Поскольку пространство $Y_r^1[0;1]$ полное, то из условия теоремы следует принадлежность функции f этому пространству.

Теорема доказана.

Представление о том, насколько «тонким» получился признак, может дать простейший случай. Пусть f – ступенчатая функция:

$$f(x) = h_i \ \text{ при } x \in [x_{i-1}; x_i),\ i = 1, 2, \cdots.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\|\bar{f}\|^r_{L_r[x_{i-1};x_i]} + |f|^r_{L_r[x_{i-1};x_i]} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \|\bar{f}\|^r_{L_r[x_{i-1};x_i]} = \sum_{i=1}^{\infty} |h_i|^r (x_i - x_{i-1})^{1-r} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |h_i| \right)^r \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_{i-1}) \right)^{1-r} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |h_i| \right)^r.$$

В преобразованиях использовано неравенство Гёльдера с показателями $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{1-r}$. Если последовательность $\{h_i\}$ является знакочередующейся или сходной с ней по поведению, имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} |h_i| \sim Var(f),$$

где

$$Var(f) = \sup_{0=x_0<x_1<\cdots<x_m=1} \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

– «полное изменение функции» или вариация по Жордану. Хорошо известно (см., например, [5], с.139),

$$Var(f) = \sup_{t>0} t^{-1}\omega_1(f,t)_1;$$

поэтому $\big(Var(f)\big)^r$ в общем случае является наилучшей из «классических» конструкций для оценки величины $|f|_r^r$.

Учитывая особенности структуры ступенчатых функций, для всех них в качестве признака принадлежности к Y_r^1 можно получить обсуждаемую характеристику.

Теорема 5. Если ступенчатая функция f имеет ограниченную вариацию, то она принадлежит пространствам $Y_r^1,\ 0<r<1$, и $\Lambda f = 0$.

Доказательство. Пусть $f(x) = h_i$ при $x \in [x_{i-1}; x_i),\ i = 1, 2, \cdots$.

Без потери общности можно считать, что $f(0)=0$. Функцию f удобно представить в виде:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \cdot \chi(x - x_i) \quad (0 \le x \le 1),$$

где

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \ge 0, \end{cases}$$

а $\eta_i = f(x_i) - f(x_i - 0)$ – величина скачка в точке x_i (следовательно, $h_i = \sum\limits_{j<i} \eta_j$, $Var(f) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\eta_i|$).

Сначала оценим в метрике H_r^1 разность между функцией, состоящей из одной «ступеньки», и её «склейкой», осуществлённой при помощи линейной функции. Для симметрии возьмём отрезок $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. По функции $\eta\cdot\chi$, где для удобства дальнейшей записи рассмотрим $\eta > 0$, и заданному числу $0 < s < \frac{1}{2}$ построим кусочно-линейную функцию

$$g_{\eta,s}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\eta}{s} \cdot x, & 0 \le x < s, \\ \eta, & x \ge s. \end{cases}$$

Обозначим для краткости $\rho_{\eta,s} = \eta \cdot \chi - g_{\eta,s}$. Имеем

$$\rho_{\eta,s}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \eta \cdot \left(1 - \frac{x}{s}\right), & 0 \le x < s, \\ 0, & x \ge s. \end{cases}$$

Схема оценки $\|\rho_{\eta,s}\|_r^r + |\rho_{\eta,s}|_r^r$ соответствует схеме рассуждения в лемме.
Очевидно,

$$\|\rho_{\eta,s}\|^r_{L_r[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]} < \eta^r \cdot s.$$

Обсудим величину $|\rho_{\eta,s}|^r_{L_r[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]}$.
Если $s<t<1$, то

$$t^{-r}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-t}\left|\Delta_t\rho_{\eta,s}(x)\right|^r dx < \; t^{-r}\Bigg(\int\limits_{-t}^{-t+s}\left|\rho_{\eta,s}(x+t)\right|^r dx+\int\limits_{0}^{s}\left|\rho_{\eta,s}(x)\right|^r dx\Bigg) <$$

$$< \; 2\cdot t^{-r}\cdot\eta^r\cdot s < \; 2\cdot\eta^r\cdot s^{1-r}.$$

Если $0<t\le s$, то

$$t^{-r}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-t}\left|\Delta_t\rho_{\eta,s}(x)\right|^r dx \le \; t^{-r}\Bigg(\int\limits_{-t}^{0}\left|\rho_{\eta,s}(x+t)\right|^r dx+\int\limits_{0}^{s-t}\left|\Delta_t\rho_{\eta,s}(x)\right|^r dx+\int\limits_{s-t}^{s}\left|\rho_{\eta,s}(x)\right|^r dx\Bigg) <$$

$$< t^{-r}\left(\eta^r\cdot t+\left(\frac{\eta}{s}\cdot t\right)^r\big(s-t\big)+\eta^r\cdot t\right) < \; 2\cdot\eta^r\cdot t^{1-r}+\eta^r\cdot s^{1-r} < \; 3\cdot\eta^r\cdot s^{1-r}.$$

Таким образом,

$$\|\rho_{\eta,s}\|_r^r+|\rho_{\eta,s}|_r^r < \; 4\cdot\eta^r\cdot s^{1-r}. \tag{3}$$

Для завершения доказательства принадлежности ступенчатой функции, имеющей ограниченную вариацию, пространствам Y_r^1 по заданной функции

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\cdot\chi(x-x_i)$$

и заданному числу $0<s<1-x_1$ построим кусочно-линейную функцию g_s, используя в точках скачков применённый выше метод «склейки» функции, состоящей из одной «ступеньки».

Каждой точке из последовательности $\{x_i\}$ (т.е. каждой функции $\eta_i\cdot\chi(x-x_i)$) сопоставим число $s_i>0$ так, чтобы $x_i+s_i<x_{i+1}$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}s_i=s$. Определим

$$g_{\eta_i,s_i}(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<x_i,\\ \frac{\eta_i}{s_i}\cdot(x-x_i), & x_i\le x<x_i+s_i,\\ \eta_i, & x_i+s_i\le x\le 1;\end{cases}$$

$$g_s(x)=\sum_{i=1}^{\infty}g_{\eta_i,s_i}(x).$$

Все члены функционального ряда принадлежат пространству W_1^1. Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\|g_{\eta_i,s_i}\right\|_1\le\sum_{i=1}^{\infty}\left\|g_{\eta_i,s_i}\right\|_\infty=\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\|g'_{\eta_i,s_i}\right\|_1=\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{x_i}^{x_i+s_i}\frac{|\eta_i|}{s_i}\,dx=\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|,$$

поэтому и функция g_s принадлежит пространству W_1^1, значит, всем пространствам $Y_r^1,\ 0<r<1$. Рассмотрим

$$f(x)-g_s(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\eta_i\cdot\chi(x-x_i)-g_{\eta_i,s_i}(x)\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}\rho_{\eta_i,s_i}.$$

Используя оценку (3), имеем:

$$\|f(x)-g_s(x)\|_r^r+|f(x)-g_s(x)|_r^r\le\sum_{i=1}^{\infty}\left(\|\rho_{\eta_i,s_i}\|_r^r+|\rho_{\eta_i,s_i}|_r^r\right)<\ 4\sum_{i=1}^{\infty}\cdot|\eta_i|^r\cdot s_i^{1-r}\le$$

$$\le 4\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|\Big)^r\Big(\sum_{i=1}^{\infty}s_i\Big)^{1-r}=4\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|\Big)^r\cdot s^{1-r}=4\Big(Var(f)\Big)^r\cdot s^{1-r}.$$

Снова было применено неравенство Гёльдера с показателями $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{1-r}$. Устремляя s к 0, получаем принадлежность функции f пространствам $Y_r^1[0;1]$.

Соотношение $\Lambda f=0$ сразу следует из п. 2) теоремы 1.

Теорема доказана.

Следствие. Если $f\in W_1^1[x_{i-1};x_i],\ i=1,2,\cdots$, и имеет ограниченную вариацию, тогда $f\in Y_r^1[0;1]$.

Подразумевается, что при каждом фиксированном i функция может быть доопределена в точках x_i и (или) x_{i-1} до условия $f\in W_1^1[x_{i-1};x_i]$.

Доказательство. Как функция ограниченной вариации f представима в виде суммы абсолютно непрерывной функции, функции скачков и сингулярной функции. По условию сингулярной составляющей нет, а функция скачков совпадает со ступенчатой функцией

$$H(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\cdot\chi(x-x_i),$$

где $\eta_i=f(x_i+0)-f(x_i-0)$ – величина скачка в точке x_i.

$$Var(f)=\sum_{i=1}^{\infty}\|f'\|_{L_1[x_{i-1};x_i]}+\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|,$$

значит, оба ряда сходятся. По теореме 5 функция H принадлежит пространствам $Y_r^1[0;1]$.

Следствие доказано.

Замечание. Из теорем 2 и 3 видно, что условие «ограниченная вариация» всё-таки находится далеко от свойств, присущих функциям из пространств Y_r^1. Например, имеем $\ln|x|\in Y_r^1[-1;1],\ 0<r<1$.

Список литературы

1. *Морозов А.Н.* Кусочно-полиномиальные приближения и дифференцируемость в пространствах L_p $(0 < p < 1)$ //Модел. и анализ информ. систем. 2005. Т. 12, № 1. С. 18—21. [*Morozov A.N.* Kusochno-polinomialnye priblizheniay i differentsiruemost v prostranstvakh L_p $(0 < p < 1)$ // Model. i analiz inform. system. 2005. T. 12, № 1. S. 18—21 (in Russian)].

2. *Морозов А.Н.* О гладкости в L_p, $0 < p < 1$ // Модел. и анализ информ. систем. 2012. Т. 19, № 3. С. 97—104. (*Morozov A.N.* On Smoothness in L_p, $0 < p < 1$ // Modeling and analysis of inform. systems. 2012. T. 19, № 3. S. 97—104 [in Russian]).

3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. (English transl.: *Kantorovich L.V., Akilov G.P.* Functional analysis /translated by Howard L. Silcock. Oxford, New York: Pergamon Press, 1982.)

4. *Berg J., Lofsrom J.* Interpolation Spaces. An Introduction. Springer-Verlag. 1976. (Russian transl.: *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение /пер. с англ. Крючкова В.С. и Лизоркина П.И. М.: Мир, 1980.)

5. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматлит, 1960. (English transl.: *Timan A.F.* Theory of Approximation of Functions of a Real Variable. Courier Dover Publications, 1994.)

Countable Additivity of Spreading the Differentiation Operator

Morozov A. N.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: differentiation operator, quasinorm

In this article, we continue the study of the properties acquired by the differentiation operator Λ with spreading beyond the space W_1^1. The study is conducted by introducing the family of spaces Y_p^1, $0 < p < 1$, having analogy with the family W_p^1, $1 \le p < \infty$. Spaces Y_p^1 are equiped with quasinorms constructed on quasinorms spaces L_p as the basis; $\Lambda : Y_p^1 \mapsto L_p$. We have given a sufficient condition for a function, piecewise belonging to the space Y_p^1 to be in this space (if $f \in Y_p^1[x_{i-1}; x_i]$, $i \in N$, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < 1$, then $f \in Y_p^1[0; 1]$). In other words, it is the sign when the equality: $\Lambda(\bigcup f_i) = \bigcup \Lambda(f_i)$ is true. The bounded variation in the Jordan sense is closest to the sufficient condition among the classic characteristics of functions. As a corollary, it comes out that, if a function f piecewise belongs to the space of W_1^1 and has a bounded variation, f belongs to each space Y_p^1, $0 < p < 1$.

Сведения об авторе:
Морозов Анатолий Николаевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
канд. физ.-мат. наук, доцент