Модел. и анализ информ. систем Т.**14**, №**1** (2007) 19–26

УДК 517.9

Динамика простейшей модели системы реакция-диффузия

Колесов Ю.С., Харьков А.Е.
Ярославский государственный университет
150 000, Ярославль, Советская, 14

получена 8 февраля 2007

Аннотация

Дается исчерпывающее описание динамических свойств простейшей разностной аппроксимации квазинормальной формы сингулярно возмущенной системы реакция-диффузия на отрезке при граничных условиях Неймана.

1. Итак, объект исследования – это уравнение

$$\dot{\xi} = de^{-i\alpha}D\xi + \xi - (1 + i\omega^2)|\xi|^2\xi, \tag{1}$$

где постоянная $d > 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\omega^2 \neq 0$, ξ – комплексный вектор с координатами ξ_1, ξ_2, наконец,

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad |\xi|^2 = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 \\ |\xi_2|^2 \end{pmatrix},$$

а умножение векторов в (1) покоординатное. Отметим, что

$$Dg_0 = 0, \quad Dg_1 = -2g_1, \quad g_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Естественно, что (1) дополняется уравнением для $\bar{\xi}$, получающимся путем использования операции комплексного сопряжения.

В дальнейшем используется стандартная терминология. Каждый цикл уравнения (1) вида $\xi e^{i\nu\tau}$, где ξ – постоянный вектор, ν – вещественное число, называется автомодельным. Если же ξ периодически зависит от τ, то говорят об автомодельном цикле с периодически меняющейся амплитудой. В дальнейшем нам удобнее говорить о таком цикле как об автомодельном торе.

Из первого равенства (2) и из (1) следует, что рассматриваемое уравнение имеет синхронный цикл $g_0e^{-i\omega^2\tau}$, который при

$$\omega^2 \sin\alpha - \cos\alpha < 0 \tag{3}$$

сохраняет устойчивость при всех d. Если же

$$\omega^2 \sin\alpha - \cos\alpha > 0, \tag{4}$$

то он теряет устойчивость дивергентным образом при $d < d_{\text{кр}}$, где $d_{\text{кр}}$ – левая часть неравенства (4).

Из второго же равенства (2) и из (1) следует, что при

$$2d\cos\alpha < 1 \tag{5}$$

интересующее нас уравнение имеет асинхронный цикл $\rho g_1 e^{i\nu\tau}$, где

$$\rho^2 = 1 - 2d\cos\alpha, \quad \nu = 2d(\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha) - \omega^2. \tag{6}$$

Без труда показывается, что вопрос об устойчивости асинхронного цикла сводится к анализу поведения решений уравнения

$$\dot{p} = 2de^{-i\alpha}p - \rho^2(1 + i\omega^2)(p + \bar{p}), \tag{7}$$

дополненного уравнением для $\bar{p}$. Матрицу этой системы дифференциальных уравнений обозначим через A. Практически очевидно, что

$$spA = -2(1 - 4\cos\alpha), \tag{8}$$

$$\det A = 4d[d(1 - 2\cos\alpha(\omega^2\sin\alpha - \cos\alpha)) + \omega^2\sin\alpha - \cos\alpha]. \tag{9}$$

Из (9) следует, что при ограничении (4) $\det A > 0$. Тем самым в этом случае асинхронный цикл устойчив, если $spA < 0$, т.е. согласно (8) справедливо неравенство

$$4d\cos\alpha < 1. \tag{10}$$

Лемма 1. *При ограничениях (3), (10) и*

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha + 2\omega^2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1 < 0$$

асинхронный цикл является седловым.

Лемма 2. *При ограничении (3) неравенство*

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha + 2\omega^2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1 > 0 \tag{11}$$

эквивалентно неравенству

$$\frac{\cos\alpha - \omega^2\sin\alpha}{1 + 2\cos\alpha(\cos\alpha - \omega^2\sin\alpha)} < \frac{1}{4\cos\alpha}.$$

Из леммы 2 и формулы (8), (9) вытекает, что при ограничении (3) асинхронный цикл устойчив только при

$$\frac{\cos\alpha - \omega^2\sin\alpha}{1 + 2\cos\alpha(\cos\alpha - \omega^2\sin\alpha)} < d < \frac{1}{4\cos\alpha}. \tag{12}$$

Из изложенного и дальнейшего будет следовать, что при ограничении (3) и уменьшении d возможны два сценария. В каждом из них при достаточно больших d единственным аттрактором является синхронный цикл. При уменьшении d из уплотнения траекторий могут рождаться устойчивый и неустойчивый двухобходные торы – такие специальные варианты автомодельного цикла с T-периодически меняющейся амплитудой, когда $\xi_1(t + \frac{T}{2}) = -\xi_2(t)$. При пересечении d правой границы в неравенстве (12) устойчивый двухобходный тор влипает в асинхронный цикл, делая его устойчивым. При пересечении d левой границы в неравенствах (12) в асинхронный цикл влипают два неустойчивых несимметричных автомодельных цикла. При промежуточных значениях d из уплотнения траекторий рождаются два устойчивых и два неустойчивых несимметричных цикла (данный термин означает, что они не являются синхронными или асинхронными, т.е. $|\xi_1| \neq |\xi_2|$).

При нарушении неравенства (5) асинхронный цикл влипает в нулевые состояния равновесия. Однако при этом сохраняются устойчивые несимметричные автомодельные циклы и неустойчивый двухобходный тор, устойчивое многообразие которого разделяют области притяжения синхронного цикла и несимметричных циклов, которые в совокупности при ограничении (3) выполняют роль режима самоорганизации.

Во втором варианте при пересечении d правой части в неравенствах (12) от асинхронного цикла ответвляется неустойчивый двухобходный цикл. При последующем уменьшении d происходит уже описанное.

2. Стало ясно, что динамика (1) тесно связана, в частности, со знаком действительной части ляпуновской величины d_0 при ограничении (11) и

$$d = \frac{1}{4\cos\alpha} \tag{13}$$

негрубого цикла (6). С помощью численного анализа некоторые значения $Re\,d_0$ построены в [1]. Однако явная формула всегда предпочтительнее численных экспериментов.

При условии (13) удобно выполнить нормировку времени $\tau \to 2\tau$, что в силу (6) позволяет перейти от (1) к уравнению

$$\xi = 2de^{-i\alpha}(D + 2I)\xi - (1 + i\omega^2)(\xi|\xi|^2 - \xi). \tag{14}$$

Обозначим через z его критическую переменную. Тогда на трехмерном инвариантном многообразии уравнения (14) динамика связана с системой

$$\dot z = d_0 z|z|^2, \quad \dot\psi = \psi_0|z|^2, \tag{15}$$

где d_0– комплексная постоянная, ψ_0 – вещественная, причем выписаны только главные слагаемые (опущенные слагаемые имеют пятый и четвертый порядки малости соответственно).

Теорема 1. *При*

$$\omega^2 > \sqrt{\frac{2\sqrt{13} - 5}{3}} \tag{16}$$

справедлива формула

$$Re\, d_0 = \frac{6\,\mathrm{tg}\,\alpha(2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + 2\omega^2\,\mathrm{tg}\,\alpha + 1 - 3\omega^4)}{\mathrm{tg}\,\alpha + 2\omega^2}. \tag{17}$$

Доказательство. Начнем с замечания: при условии (13) из (9) вытекает, что $\det A = \frac{1}{4}\mu^2$, где μ^2 – левая часть неравенства (11). Тем самым согласно выполненной нормировке времени линеаризованное на асинхронном цикле уравнение (14) имеет колебания с частотой μ. Данные свойства проясняют смысл неравенства (16): формула (17) содержательна только в области (α, ω^2), где $\mu^2 > 0$.

В уравнении (14) выполним замену $\xi = (g_1 + \eta)e^{i\psi}$, приводящую его к виду

$$\dot\eta = L\eta - i\dot\psi(g_1 + \eta) - (1 + i\omega^2)(g_1\eta^2 + 2g_1|\eta|^2 + \eta|\eta|^2), \tag{18}$$

где

$$L\eta = 2de^{-i\alpha}(D + 2I)\eta - (1 + i\omega^2)(\eta + \bar\eta). \tag{19}$$

В (18) в соответствии с равенством $\eta = pg_0 + qg_1$ перейдем к комплексным переменным p, q. Учитывая (2) и (19), получаем

$$\dot p = 4de^{-i\alpha}p - (1 + i\omega^2)(p + \bar p + 2pq + 2(p\bar q + \bar p q) + p|p|^2) - i\dot\psi p, \tag{20}$$

$$\dot q = -(1 + i\omega^2)(q + \bar q + p^2 + 2|p|^2) - i\dot\psi, \tag{21}$$

где сразу учтено, что переменная q по порядку равна $|z|^2$, а это позволяет опустить все слагаемые, порядок которых больше трех.

В (20), (21) при помощи равенств $p = x + iy$, $q = u + iv$ перейдем к вещественным переменным, что приводит к следующей системе:

$$\dot x = -x + y\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2(3xu + yv) + 2\omega^2(xv + yu) + (-x + \omega^2 y)(x^2 + y^2) + \dot\psi y, \tag{22}$$

$$\dot y = -(2\omega^2 + \mathrm{tg}\,\alpha)x + y - 2(xv + yu) - 2\omega^2(3xu + yv) - (\omega^2 x + y)(x^2 + y^2) - \dot\psi x, \tag{23}$$

$$\dot u = -2u + 2\omega^2 xy - (3x^2 + y^2), \tag{24}$$

$$\dot v = -2\omega^2 u - 2xy - \omega^2(3x^2 + y^2) - \dot\psi. \tag{25}$$

Обозначим через

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \mathrm{tg}\,\alpha \\ -2\omega^2 - \mathrm{tg}\,\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

матрицу, связанную с линейной частью системы (22), (23). Положим

$$a = colon(a_1, a_2), \quad b = colon(b_1, b_2),$$

где

$$a_1 = \mathrm{tg}\,\alpha, \quad a_2 = 1 + i\mu, \quad b_1 = -\frac{i(1 + i\mu)}{2\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}, \quad b_2 = \frac{i}{2\mu}. \tag{26}$$

Непосредственно проверяем, что

$$Aa = i\mu a, \quad A^*b = -i\mu b, \quad (a, b) = 1, \tag{27}$$

где звездочка – транспонирование, а скалярное произведение берется в смысле унитарного пространства.

В дальнейших построениях существенную роль играют функции

$$x_1 = za_1e^{i\mu\tau} + \text{к.с.}, \quad y_1 = za_2e^{i\mu\tau} + \text{к.с.}, \tag{28}$$

где $z = z(\tau)$ – такая комплекснозначная функция, что ее производная связана с z первым равенством (15). В (28) и ниже к.с. – краткое обозначение комплексно сопряженной добавки.

Согласно (28)

$$x_1^2 = 2|z|^2|a_1|^2 + z^2a_1^2e^{2i\mu\tau} + \text{к.с.}, \quad y_1^2 = 2|z|^2|a_2|^2 + z^2a_2^2e^{2i\mu\tau} + \text{к.с.},$$

$$2\omega^2 x_1y_1 = 2\omega^2|z|^2(a_1\bar a_2 + \bar a_1a_2) + 2\omega^2z^2a_1a_2e^{2i\mu\tau} + \text{к.с.}, \tag{29}$$

$$3x_1^2 + y_2^2 = 2|z|^2(3|a_1|^2 + |a_2|^2) + z^2(3a_1^2 + a_2^2)e^{2i\mu\tau} + \text{к.с.}. \tag{30}$$

Из (29),(30) и уравнения (24) выводим, что

$$u_1 = \gamma_0|z|^2 + \gamma_1 z^2 e^{2i\mu\tau} + \text{к.с.}, \tag{31}$$

где в силу формулы для μ^2

$$\gamma_0 = -4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha, \quad \gamma_1 = c_1 + i\mu c_2, \tag{32}$$

$$c_1 = \frac{\omega^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + 2(\omega^4-1)\,\mathrm{tg}\,\alpha - \omega^2}{\mathrm{tg}\,\alpha + 2\omega^2}, \quad c_2 = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \omega^2}{\mathrm{tg}\,\alpha + 2\omega^2}. \tag{33}$$

Подчеркнем, что в рамках использованной точности при вычислении u_1 считаем z постоянной величиной.

Перейдем к уравнению (25), считая, что $\dot\psi$ связано с $|z|^2$ посредством второго равенства (15). Фигурирующую в нем постоянную ψ_0, явный вид которой не требуется, выбираем так, чтобы правая часть в (25) содержала только вторые гармоники. В том же виде строим и v_1:

$$v_1 = \frac{z^2}{2i\mu}\delta_1 e^{2i\mu\tau} + \text{к.с.}, \quad \delta_1 = -d_1 + \frac{i}{\mu}d_2, \tag{34}$$

$$d_1 = \frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha + 4\omega^2\,\mathrm{tg}\,\alpha + \omega^4}{\mathrm{tg}\,\alpha + 2\omega^2}, \quad d_2 = \frac{\omega^2\,\mathrm{tg}^3\,\alpha + (2\omega^4+1)\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + \omega^2\,\mathrm{tg}\,\alpha + \omega^4}{\mathrm{tg}\,\alpha + 2\omega^2}. \tag{35}$$

Введем обозначения

$$A_1 = -2(3x_1u_1 + y_1v_1), \quad A_2 = 2\omega^2(x_1v_1 + y_1u_1), \quad A_3 = (-x_1 + \omega^2 y_1(x_1^2 + y_1^2),$$

$$B_1 = -2(x_1v_1 + y_1u_1), \quad B_2 = -2\omega^2(3x_1u_1 + y_1v_1), \quad B_3 = -(\omega^2x_1 + y_1)(x_1^2 + y_1^2).$$

Пусть $\alpha_0 + i\mu\beta_0 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2 + A_3)$, $\alpha_1 + i\mu\beta_1 = \frac{1}{2}(B_1 + B_2 + B_3)$. Из формул (28),(31), (34) вытекает, что

$$\alpha_0 = 10\,\mathrm{tg}^3\,\alpha - 2\omega^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + (3\omega^4 - 1 - 3c_1 - \omega^2 d_1)\,\mathrm{tg}\,\alpha + d_1 - d_2 + \omega^2(c_1 + \mu^2 c_2),$$

$$\beta_0 = -2\omega^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + (3\omega^4 - 1 - 3c_2 + \omega^2\frac{d_2}{\mu^2})\,\mathrm{tg}\,\alpha - d_1 - \frac{d_2}{\mu^2} - \omega^2(c_1 - c_2),$$

$$\beta_1 = 2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - (4\omega^2 + 3\omega^2 c_2 + \frac{d_2}{\mu^2})\,\mathrm{tg}\,\alpha + c_1 - c_2 - \omega^2(d_1 + \frac{d_2}{\mu^2}).$$

Из (15), (26), (28) и структуры уравнений (22),(23) вытекает, что

$$Re\,d_0 = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \beta_1. \tag{36}$$

Учитывая в (36) предыдущие равенства, получаем

$$Re\,d = 12\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - (4\omega^2 + 3\omega^2 c_2 + \frac{d_2}{\mu^2})\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2(c_1 - c_2) -$$

$$-2\omega^2(d_1 + \frac{d_2}{\mu^2}) + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}[2d_1 - d_2 + \omega^2(\mu^2 c_2 + c_1) + \omega^2(c_1 - c_2) + \frac{d_2}{\mu^2}]. \tag{37}$$

Собирая в правой части коэффициенты при $\frac{1}{\mu^2}$ и учитывая формулу для μ^2, из (37) выводим

$$Re\,d = 12\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - \omega^2(4 + 3c_2)\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2(c_1 - c_2) - 2\omega^2 d_1 + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}[2(d_1 - d_2) + \omega^2(\mu^2 c_2 + c_1) + \omega^2(c_1 - c_2)]. \tag{38}$$

Для завершения доказательства останется в (38) учесть формулы (33) и (35).

В плоскости (α, ω^2) на рис. 1 цифрой 1 помечена кривая $\mu = 0$ (выше ее $\mu > 0$, оканчивается она в точке $(\frac{\pi}{4}, 0)$). Цифрой 2 отмечена кривая $Re\,d_0 = 0$ (выше ее $Re\,d_0 < 0$, ниже $Re\,d_0 > 0$). Наконец цифрой 3 указана кривая, ниже которой выполняется неравенство (3), выше неравенство (4). Следует подчеркнуть, что при ограничении (4) численно данные кривые построены в [1].

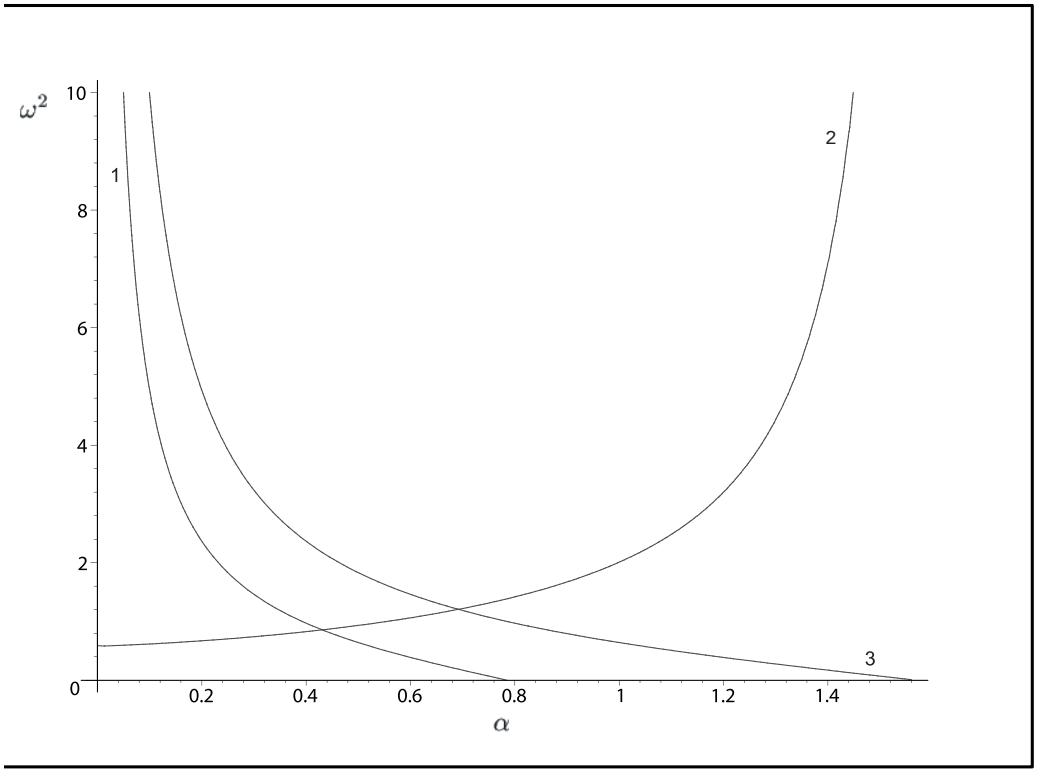

Рис. 1.

3. Перейдем к выводу формулы для ляпуновской величины дивергентным образом теряющего устойчивость асинхронного цикла при ограничении (3), т.е. когда

$$d = \frac{\cos\alpha - \omega^2 \sin\alpha}{1 + 2\cos\alpha(\cos\alpha - \omega^2 \sin\alpha)}. \tag{39}$$

В этом случае уравнения (15) заменяются вещественными уравнениями

$$\dot{z} = bz^3, \quad \dot{\psi} = \beta z^2. \tag{40}$$

В (1) выполним замену $\xi = (\rho g_1 + \eta)e^{i(\mu\tau+\psi)}$, где ρ - амплитуда асинхронного цикла, μ – частота. Отметим, что

$$\rho^2 = \frac{1}{1 + 2\cos\alpha(\cos\alpha - \omega^2 \sin\alpha)}, \quad \frac{d}{\rho^2} = \cos\alpha - \omega^2 \sin\alpha. \tag{41}$$

Равенства (41) позволяют записать результат замен в виде

$$\dot{\eta} + i\beta(\rho g_1 + \eta) = L_0\eta - (1 + i\omega^2)(\rho g_1(\eta^2 + 2|\eta|^2) + \eta|\eta|^2), \tag{42}$$

где

$$L_0\eta = de^{-i\alpha}(D + 2I)\eta - \rho^2(1 + i\omega^2)(\eta + \bar{\eta}). \tag{43}$$

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$L_0 g_0 e^{i\varphi} = 0, \tag{44}$$

где

$$\sin\varphi = \frac{\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha}{\sqrt{\omega^4 + 1}}, \quad \cos\varphi = \frac{\cos\alpha - \omega^2\sin\alpha}{\sqrt{\omega^4 + 1}}. \tag{45}$$

Доказательство – непосредственная проверка.

Лемма 4. *Уравнение*

$$L_0\eta = \gamma g_0, \quad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, \tag{46}$$

разрешимо в том и только том случае, если

$$\gamma_1\cos\alpha - \gamma_2\sin\alpha = 0. \tag{47}$$

Доказательство. Пусть $\eta = c_1 + ic_2$. Из (43) и (46) имеем

$$\frac{d}{\rho^2}(c_1 + ic_2) - (1 + i\omega^2)c_1 e^{i\alpha} = \frac{\gamma}{2\rho^2} e^{i\alpha},$$

откуда следует требуемое.

Положим в (42)

$$\eta = ze^{i\varphi} g_0 + z^2\eta_1 + z^3\eta_2,$$

а затем приравняем коэффициенты при z^2. В итоге получим уравнение для η_1 и β. Считая, что $\eta = cg_1$, находим

$$2\rho c = -2 + \omega^2 \sin 2\varphi - \cos 2\varphi, \quad \beta = -(1 + \omega^4)\sin 2\varphi. \tag{48}$$

Результатом же приравнивания коэффициентов при z^3 явится равенство

$$be^{i\varphi} g_0 + i\beta e^{i\varphi} g_0 = L_0\eta_2 - (1 + i\omega^2)(2c\rho e^{i\varphi} + 4c\rho\cos\varphi + e^{i\varphi})g_0. \tag{49}$$

Из (49) следует, что вышло аналогичное (46) уравнение, в котором

$$\gamma_1 = b\cos\varphi + (\omega^4 + 1)\sin 2\varphi \sin\varphi + (6\cos^2\varphi - \omega^2 \sin 2\varphi)(\omega^2 \sin\varphi - \cos\varphi) - 2\cos\varphi,$$

$$\gamma_2 = b\sin\varphi - (\omega^4 + 1)\sin 2\varphi\cos\varphi + (\sin 2\varphi + 6\omega^2\cos^2\varphi)(\omega^2 \sin\varphi - \cos\varphi) - 2\omega^2\cos\varphi.$$

Отсюда и из леммы 4 вытекает, что

$$b(\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha) = -(\omega^4+1)\sin 2\varphi(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) + \sin 2\varphi(\omega^2\sin\varphi - \cos\varphi)(\omega^2\cos\alpha + \sin\alpha) -$$

$$-2\cos\varphi(\omega^2\sin\alpha - \cos\alpha) + 6\cos^2\varphi(\omega^2\sin\varphi - \cos\varphi)(\omega^2\sin\alpha - \cos\alpha). \tag{50}$$

Естественно, формула (50) нуждается в упрощении. На этом пути полезны будут вытекающие из (45) формулы

$$\omega^2\sin\varphi - \cos\varphi = \frac{2\omega^2\sin\alpha + (\omega^4 - 1)\cos\alpha}{\sqrt{\omega^4 + 1}}, \tag{51}$$

$$\cos\varphi\sin\alpha - \sin\varphi\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha + \omega^2\cos 2\alpha}{\sqrt{\omega^4 + 1}}. \tag{52}$$

Формулы (45) и (51), (52) позволяют объединить и упростить ряд слагаемых правой части равенства (50).

Последовательно имеем

$$6\cos^2\varphi(\omega^2\sin\varphi - \cos\varphi) - 2\cos\varphi = \frac{2}{(\omega^4+1)^{3/2}}(\omega^2\sin\alpha - \cos\alpha)(6\omega^4\sin^2\alpha - 3(\omega^4 - 1)\cos^2\alpha +$$

$$+3\omega^2(\omega^4 - 3)\sin\alpha\cos\alpha + \omega^4 + 1), \tag{53}$$

$$-(\omega^4+1)\sin 2\varphi(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\omega^4+1}}(\omega^2\sin\alpha - \cos\alpha)(\omega^2\cos\alpha + \sin\alpha)(\sin 2\alpha + \omega^2\cos 2\alpha), \tag{54}$$

$$\frac{(\omega^2\cos\alpha + \sin\alpha)(\sin 2\alpha + \omega^2\cos 2\alpha)}{\sqrt{\omega^4+1}} - \frac{(\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha)^2(2\omega^2\sin\alpha + (\omega^4 - 1)\cos\alpha)}{(\omega^4+1)^{3/2}} =$$

$$= \frac{(\cos\alpha - \omega^2\sin\alpha)(\omega^2\cos\alpha + \sin\alpha)(2\omega^2\cos\alpha + (\omega^4 + 3)\sin\alpha)}{(\omega^4+1)^{3/2}}. \tag{55}$$

Теорема 2. *При ограничении (3) для ляпуновской величины дивергентным образом теряющего устойчивость асинхронного цикла справедлива формула*

$$b = \frac{2(1 - \omega^2\operatorname{tg}\alpha)^2}{(\omega^4+1)(\operatorname{tg}^2\alpha + 2\omega^2\operatorname{tg}\alpha - 1)} f(\alpha, \omega^2), \tag{56}$$

где

$$f(\alpha, \omega^2) = (5\omega^4 - 3)\cos 2\alpha - \omega^2(\omega^4 - 7)\sin 2\alpha - \omega^4 - 1. \tag{57}$$

Доказательство следует из равенств (53)-(55) и формулы (50).

Дополнительно отметим, что при интересующих нас значениях переменных функция (57) положительна.

Подчеркнем одно нетривиальное обстоятельство. При ограничении (4) знак ляпуновской величины дивергентным образом теряющего устойчивость синхронного цикла совпадает со знаком функции (57), рассматриваемой при других значениях переменных.

Этот несколько неожиданный результат имеет простое объяснение – в обоих случаях одинаковы алгоритмы вычисления ляпуновской величины, причем в случае синхронного цикла промежуточные формулы менее громоздки.

4. Итак, остается описать динамические свойства уравнения (1) при выполнении неравенства (4).

При достаточно больших значениях диффузионного параметра d единственным аттрактором является синхронный цикл, потеря устойчивости которого происходит мягко или жестко. В первом случае от него ответвляется два устойчивых несимметричных цикла, между собой связанных следующей симметрией: если $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ у одного из них, то $\xi = (\xi_2, \xi_1)$ у другого. Во втором случае из уплотнения траекторий рождаются четыре несимметричных цикла, разделенные на две пары с отмеченной выше симметрией, причем различны их свойства устойчивости. Неустойчивая пара движется к синхронному циклу, влипает в него, отбирая свойство устойчивости.

Таким образом, в каждом из вариантов в итоге имеем два несимметричных устойчивых цикла, обладающих упомянутой внутренней симметрией. При каждом $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и достаточно большом ω^2 при уменьшении d упомянутые циклы теряют устойчивость жестко. В этом случае в системе (1) появляются гомоклинические кривые, приводящие к описанной в [2] динамике: рождаются два неустойчивых двухобходных тора и устойчивый многообходный тор.

На рис. 2 при $\omega^2 = 30$ показана зависимость критического значения d от α. Следует подчеркнуть, что при изменении ω^2 данная функция $d = d(\alpha)$ меняется относительно мало.

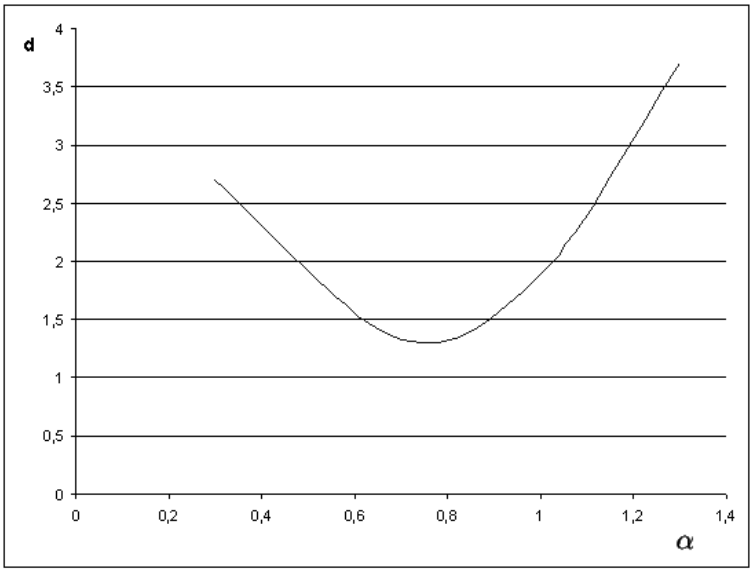

Рис. 2.

Итак, имеем два случая с принципиально различной динамикой: в первом из них устойчивые циклы с периодическим изменением амплитуды двигаются к устойчивым и неустойчивым многообразиям синхронного цикла, приводя к образованию гомоклинических траекторий. В результате упомянутые циклы объединяются в устойчивый двухобходный тор, который начинает двигаться к асинхронному циклу. При обретении устойчивости последний может порождать неустойчивый двухобходный тор. В результате их столкновения они оба растворяются "в воздухе", оставляя единственным аттрактором асинхронный цикл.

Возможен и более простой вариант: ответвляющийся от гомоклинической кривой устойчивый двухобходный тор при уменьшении d влипает в асинхронный цикл, передавая ему свою устойчивость. Данный вариант связан с точками (α, ω^2), расположенными выше кривой 2 и 3, но при ω^2 меньших некоторой функции $\omega^2(\alpha)$. В первом же случае – ниже кривой 2 и 3.

Второй вариант много сложнее. Еще при устойчивых несимметричных циклах устойчивые и неустойчивые многообразия синхронного цикла пересекаются, а возникающие гомоклинические кривые порождают пару неустойчивых циклов с периодическим изменением амплитуды, каждый из которых при уменьшении d влипает в один из несимметричных циклов, отбирая у них устойчивость. Попутно гомоклинические

траектории порождают чрезвычайно сложные образования типа торов $\xi(\tau)e^{i\nu(\tau)}$ с нетривиальной зависимостью ξ и ν от τ.

Изучению этого случая целиком посвящена статья [2], в которой описан, в частности, переход от (1) к эквивалентной вещественной трехмерной системе с одной амплитудной и двумя фазовыми переменными, что позволяет построить секущую Пуанкаре. Последнее обстоятельство позволяет исследовать проблему на достаточно строгом уровне.

Сформулируем некоторые выводы из этой статьи.

Во-первых, по тенденции сложный тор стремится превратиться в двухобходный, чтобы затем влипнуть в асинхронный цикл.

Во-вторых, динамика весьма негруба: в [2] введена числовая характеристика, отражающая данное обстоятельство.

В третьих, некорректно понятие "ведущего характеристического показателя странного аттрактора". Сформулированная в [2] теорема показывает, что при некотором отходе от критического значения d, при котором возникает гомоклиническая структура, отрицательны, исключая нулевой, характеристические показатели. При таких же параметрах в [1] найденный другим способом характеристический показатель выходит положительным.

Остается подчеркнуть, что в трехмерных системах вряд ли возможен "странный аттрактор" с принятым набором свойств.

Список литературы

1. Глызин, С.Д. Динамические свойства простейших конечномерных аппроксимаций краевой задачи "реакция-диффузия"/ С.Д. Глызин // Дифференц. уравн. - 1997. - Т.33. - №6. - С. 805-811.

2. Колесов, Ю.С. Динамика популяций при их простейшем миграционном взаимодействии / Ю.С. Колесов, А.Е. Харьков // ДАН. - 2006. - Т.409. - №5. - С. 594-597.