Модел. и анализ информ. систем. Т.**14**, №**1** (2007) 27–30

УДК 517.5

K-функционалы и наилучшие кусочно-полиномиальные приближения

Морозов А. Н.
Ярославский государственный университет
150000, Ярославль, Советская, 14

получена 10 февраля 2007

Аннотация

Доказаны точные соотношения между K-функционалами пар $\left(C, C^l\right)$ и наилучшими равномерными кусочно-полиномиальными приближениями функций из C.

1. Введение и основные обозначения

Как обычно, $L_p[I]$ обозначает пространство действительных функций, интегрируемых в степени p по Лебегу на замкнутом слева полуинтервале $I = [a; b)$ (равносильно интервале или отрезке), с $1 \leq p < \infty$.

$$\|f\|_{L_p[I]} = \left(\int\limits_I |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$C[I]$ - пространство непрерывных на отрезке I функций.

$$\|f\|_{C[I]} = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

Когда неясность возникнуть не может, сокращаем обозначения до L_p и $\|f\|_p$ или соответственно до C и $\|f\|_\infty$.

Также используются пространства ($l \in N$)

$$W_p^l[I] = \left\{f : f^{(l-1)} \text{ абсолютно непрерывна на отрезке } I, f^{(l)} \in L_p[I]\right\}$$

и $C^l[I]$ - пространство функций, имеющих непрерывную l-тую производную на отрезке I.

С применением функционала

$$K(f,t)_{l,p} = \inf_{g \in W_p^l} \left\{\|f-g\|_p + t\|g^{(l)}\|_p\right\}$$

получаются интерполяционные пространства между L_p и W_p^l (при $p = \infty$ - между C и C^l). Такие интерполяционные пространства $\left(L_p, W_p^l\right)_{\theta q}$ по определению состоят из функций, для которых конечна величина

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(f,t)_{l,p}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

(при $q = \infty$ интеграл заменяем на sup по $t > 0$).

Один из важнейших результатов о подобных K-функционалах заключается в том, что

$$\gamma_1\, \omega_l(f, t^{\frac{1}{l}})_p \leq K(f,t)_{l,p} \leq \gamma_2\, \omega_l(f, t^{\frac{1}{l}})_p \qquad (1)$$

с постоянными γ_1 и γ_2, зависящими только от l, p, $[a; b]$, см., например, [1]. Другими словами,

$$K(f,t)_{l,p} \asymp \omega_l(f, t^{\frac{1}{l}})_p.$$

Здесь

$$\omega_l(f,t)_p = \sup_{0<h<t} \|\Delta_h^l f(x)\|_{L_p[a;b-lh]}$$

- l-тый модуль непрерывности в $L_p[a;b]$, а

$$\Delta_h^l f(x) = \sum_{i=0}^{l} (-1)^{l-i} \binom{l}{i} \, f(x+ih)$$

- l-тая разность. Для $f \in C$ l-тый модуль определяется аналогично.

Поскольку поведение модуля непрерывности l-го порядка является ключевой характеристикой величин кусочно-полиномиальных l-го порядка приближений функции, то из его эквивалентности K-функционалу следует, что функции из интерполяционных пространств между L_p и W_p^l кусочно-полиномиально приближаются с соответствующей θ и q скоростью.

Цель настоящей статьи - провести непосредственное сопоставление функционала $K(f,t)_{l,p}$ с величинами кусочно-полиномиальных приближений на основе формул из работ [2], [3].

Определим для $f \in L_p$

$$E_l(f;I)_p = inf\{\, \|f-\pi_l\|_p: \ \pi_l \in P_l\}$$

- наилучшее приближение алгебраическими многочленами степени не выше $l-1$ (порядка l) в $L_p[I]$. Аналогично для $f \in C$ определяется $E_l(f;I)_\infty$.

Пусть $a = t_o < t_1 < \dots < t_n = b$, $n \in N$. Набор τ полуинтервалов $\{[t_{j-1},t_j)\}_{j=1}^n$ назовем разбиением полуинтервала $I = [a;b)$.Через u_n будем обозначать разбиение полуинтервала I на n равных по длине полуинтервалов.

Положим ($1 \le p < \infty$)

$$U_n^l(f;I)_p = \Big(\sum_{J \in u_n} E_l(f;J)_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

- наилучшее приближение функции f кусочно-полиномиальными функциями степени не выше $l-1$, подчиненными равномерному разбиению u_n полуинтервала I , т.е. на каждом полуинтервале J из u_n приближающая функция - многочлен порядка l.

$$U_n^l(f;I)_\infty = \max_{J \in u_n} E_l(f;J)_\infty .$$

Пусть $|I|$ далее обозначает длину полуинтервала I.

Как уже упоминалось, величина кусочно-полиномиального приближения на равномерных разбиениях теснейшим образом связана с поведением модуля непрерывности. С одной стороны, как показано в [4],

$$U_n^l(f;I)_p \le \alpha_1 \, \omega_l(f, \frac{|I|}{n})_p$$

с постоянной α_1, зависящей только от $l,\ p,\ [a,b]$.

С другой стороны, в [5] доказано, что если
$U_n^l(f;I)_p \le \varphi(\frac{1}{n})$, где $\varphi(t)$ - степенная (и даже более общего вида) функция, то
$\omega_l(f,t)_p \le \alpha_2 \, \varphi(t)$ с постоянной α_2, описываемой аналогично α_1.

По результатам статей [2]-[3], для $f \in W_p^l[I]$ выполняется:

$$\lim_{n\to\infty} n^l \, U_n^l(f,I)_p = c_{l,p} \, |I|^l \, \|f^{(l)}\|_{L_p[I]}, \tag{2}$$

где $c_{l,p} = E_l(\frac{t^l}{l!},[0;1])_p$, т.е. полунорма в этом пространстве определяется предельным поведением кусочно-полиномиальных приближений.

Отметим, что если $f \in C^l[I]$, то (см. [6]) для всех $1 \le p \le \infty$ выполняется:

$$E_l(f;I)_p = c_{l,p}|I|^{l+\frac{1}{p}} \, |f^{(l)}(\xi)|, \tag{3}$$

где ξ - некоторая точка отрезка I.

Будем рассматривать своеобразную модификацию обсуждаемого K-функционала

$$K(f,t)_{l,p} = \inf_{g \in W_p^l} \left\{ \|f-g\|_p + c_{l,p} \, [t|I|]^l \, \|g^{(l)}\|_p \right\}.$$

В ней уравниваются степени аргументов модуля непрерывности и K-функционала (см. формулу эквивалентности). Множители $c_{l,p}$ и $|I|^l$ инспирированы формулами $(2)-(3)$; как оказывается (см. теорему ниже), их появление делает областью изменения переменной t отрезок $[0;1]$, а также позволяет получить точные соотношения.

2. Сопоставление K-функционала пары (C, C^l) с наилучшими равномерными кусочно-полиномиальными приближениями

Пусть для $f \in C$ обозначено

$$\|f\| = \|f\|_\infty, \quad U_n^l(f) = U_n^l(f; I)_\infty \text{ и}$$

$$K_l(f,t) = \inf_{g \in C^l} \left\{ \|f-g\| + c_{l,\infty} \left[t|I|\right]^l \|g^{(l)}\| \right\}.$$

Теорема. Справедливы соотношения:

1) $U_n^l(f) \le K_l(f, \frac{1}{n})$;
2) $E_l(f) \Leftrightarrow U_1^l(f) = K_l(f,1) = \max\limits_{t>0} K_l(f,t)$;
3) если $f \in C^l$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_n^l(f)}{K_l(f,\frac{1}{n})} = 1$.

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение.

Пусть $g \in C^l[I]$, тогда из определения $U_n^l(g)$ и формулы (3) следует, что

$$U_n^l(g) \le c_{l,\infty} \left(\frac{|I|}{n}\right)^l \|g^{(l)}\|. \tag{4}$$

Для $f \in C$ получаем

$U_n^l(f) \le \inf\limits_{g\in C^l} \left\{ \|f-g\| + U_n^l(g) \right\} \le \inf\limits_{g\in C^l} \left\{ \|f-g\| + c_{l,\infty} \left(\frac{|I|}{n}\right)^l \|g^{(l)}\| \right\} = K_l(f, \frac{1}{n})$.

Докажем второе утверждение.

$K_l(f,t) \le \inf\limits_{\pi\in P_l} \left\{ \|f-\pi\| + c_{l,\infty} \left[t|I|\right]^l \|\pi^{(l)}\| \right\} = \inf\limits_{\pi\in P_l} \|f-\pi\| = E_l(f)$.

Вместе с первым утверждением это даёт

$U_1^l(f) = K_l(f,1) = \max\limits_{t>0} K_l(f,t)$

(хорошо известно, что $K_l(f,t)$ является возрастающей вогнутой вверх функцией, следовательно, непрерывной).

Перейдём к третьему утверждению.

Если $f \in C^l[I]$, то из определения $K_l(f,t)$ вытекает $K_l(f, \frac{1}{n}) \le c_{l,\infty} \left(\frac{|I|}{n}\right)^l \|f^{(l)}\|$.

Используя первое утверждение получаем

$$1 \ge \limsup_{n\to\infty} \frac{U_n^l(f)}{K_l(f,\frac{1}{n})} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n^l U_n^l(f)}{n^l K_l(f,\frac{1}{n})} \ge \liminf_{n\to\infty} \frac{n^l U_n^l(f)}{c_{l,\infty}|I|^l \|f^{(l)}\|} = 1.$$

Теорема доказана.

Замечания.

1. Даже для $f \in C^l[I]$, $U_n^l(f) \not\equiv K_l(f, \frac{1}{n})$, т.к. $\left(U_n^l(f)\right)$ - необязательно монотонная последовательность. Простейший пример для $l=1$, $[a;b] = [-3;3]$:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x \in [-3;-1], \\ \sin(\frac{\pi}{2}x) & , \quad x \in (-1;1), \\ 1 & , \quad x \in [1;3]. \end{cases}$$

Для этой функции получаем: $U_1^1(f) = 1$, $U_2^1(f) = \frac{1}{2}$, $U_3^1(f) = 1$.

2. Между последовательностями $\left(U_n^l(f)\right)$ и $\left(K_l(f, \frac{1}{n})\right)$ нет эквивалентности в общем случае. Так, уже в пространстве C^{l-2} содержатся сплайны (гладко склеенные кусочно-полиномиальные функции порядка l), на которых функционалы $U_n^l(\cdot)$ могут обращаться в ноль. Однако такая эквивалентность есть на пространстве C^{l-1}. Наиболее простой и точный результат получается при $l = 1$ (см. предложение ниже).

3. В теореме приведены только точные формулы о взаимоотношениях равномерных кусочно- полиномиальных приближений и модифицированных K-функционалов пар $\left(C, C^l\right)$. Доказательства всех соотношений оказались достаточно простыми; но следует подчеркнуть, что эти результаты, а также сопутствующие, могли быть получены лишь при удачных "настройках"K-функционала. Так, например, далеко не очевидно достижение функционалом $K_l(f,t) = \inf\limits_{g\in C^l} \left\{ \|f-g\| + t\|g^{(l)}\| \right\}$ своего наибольшего значения при $t = c_{l,\infty}|I|^l$.

Ввиду отсутствия на данный момент доказательства точного аналога формулы (4) для $1 \le p < \infty$, эти случаи остались за бортом рассмотрения. Никаких других проблем при установлении первых двух утверждений теоремы для них нет, третье утверждение, очевидно, справедливо.

4. Пополнением пространства A относительно B (пополнение по Гальярдо, см. [7], с. 49) называется множество всех $f \in B$, для которых существует последовательность (g_n), ограниченная в A и сходящаяся к f в B. Норма в таком пространстве определяется как $\|f\| = \inf\limits_{(g_n)} \sup\limits_{n} \|g_n\|_A$.

Известно, что пополнением пространства C^l относительно C является W^l_∞, из этого следует
$\inf\limits_{g\in C^l} \left\{\|f-g\| + c_{l,\infty}\,[t|I|]^l\,\|g^{(l)}\|\right\} = \inf\limits_{g\in W^l_\infty} \left\{\|f-g\| + c_{l,\infty}\,[t|I|]^l\,\|g^{(l)}\|_{L_\infty}\right\},$
здесь
$L_\infty[I] = \left\{f : ess\sup\limits_{x\in I} |f(x)| < \infty\right\}.$

Также для $g \in W^l_\infty[I]$ получается
$U^l_n(g) \le c_{l,\infty}\left(\frac{|I|}{n}\right)^l \|g^{(l)}\|_{L_\infty}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n^l\,U^l_n(g,I)_\infty = c_{l,\infty}\,|I|^l\,\|g^{(l)}\|_{L_\infty}.$

Предложение.

$$U^1_n(f) \le K_1(f,\tfrac{1}{n}) \le 3U^1_n(f).$$

Доказательство. Левое неравенство доказано в теореме.

Из замечания 4 следует, что при вычислении $K_1(f,t)$ можно использовать функции из W^1_∞. Т.е. $K_1(f,t) = \inf\limits_{g\in W^1_\infty} \left\{\|f-g\| + \frac{1}{2}\,t\,|I|\,\|g'\|_{L_\infty}\right\}.$

Пусть $f \in C$ и разбиение u_n зафиксированы. Рассмотрим ломаную g_n, интерполирующую функцию f в узлах разбиения. Получаем

$$\|f-g_n\| \le \max_{1\le i\le n} \left\{\max_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) - \min_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)\right\} = \max_{1\le i\le n} 2E_1(f,[x_{i-1};x_i]) = 2U^1_n(f),$$

$$\|g'_n\|_{L_\infty} = \max_{1\le i\le n} \frac{|f(x_i)-f(x_{i-1})|}{x_i - x_{i-1}} \le \max_{1\le i\le n} \frac{2E_1(f,[x_{i-1};x_i])}{\frac{|I|}{n}} = \frac{2n}{|I|}U^1_n(f).$$

Итого:
$K_1(f,\frac{1}{n}) \le \left\{\|f-g_n\| + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n}\,|I|\,\|g'_n\|_{L_\infty}\right\} \le 3U^1_n(f).$

Список литературы

1. DeVore, R. Degree of approximation / R. DeVore // Approximation Theory 2. - New York: Acad. Press, 1976. - P. 117-161.
2. Морозов, А. Н. Аналог теоремы Бернштейна в пространстве L_1 / А. Н. Морозов // Матем. заметки. - 1995. - Т. 57, N5. - С. 699-703.
3. Морозов, А. Н. Об одном описании пространств дифференцируемых функций / А. Н. Морозов // Матем. заметки. - 2001.- Т. 70, N5. - С. 758-768.
4. Брудный, Ю. А. Пространства, определяемые с помощью локальных приближений / Ю. А. Брудный // Тр. ММО.- 1971.- Т. 24.- С. 69-132.
5. Иродова, И.П. Свойства функций, заданных скоростью убывания кусочно- полиномиальной аппроксимации / И.П.Иродова // Исследования по теории функций многих вещественных переменных: сб. науч. тр. / Яросл. гос. ун-т. - Ярославль: ЯрГУ, 1980.- 186 с.
6. Phillips, G. M. Error estimates for best approximation / G. M. Phillips // Approximation Theory. - London: Acad. Press, 1970. - P. 1-6.
7. Берг, Й., Лёфстрём, Й. Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрём; пер. с англ. В. С. Крючкова и П. И. Лизоркина.- М.: Мир, 1980.- 264 с.

K-functionals and best piecewice polynomial approximations

Morozov A. N.

We prove exact relations between K-functionals of pairs $\left(C, C^l\right)$ and best uniform piecewice polynomial approximations of functions from C.