

УДК 519.6

О релаксационном многограннике задачи «3-выполнимость»

Урываев Б.В.

Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14,
e-mail: boreas@rambler.ru,

получена 18 мая 2007

Аннотация

Исследуются свойства многогранника, ассоциированного с задачей «3-выполнимость». Устанавливается, в частности, что значениями координат его вершин могут быть дроби с как угодно большими знаменателями.

В пространстве R^m при $m = 8n^3$ обозначим координаты точек $x_{ijk}^{000}, x_{ijk}^{001}, x_{ijk}^{010}, x_{ijk}^{011}, x_{ijk}^{100}, x_{ijk}^{101}, x_{ijk}^{110}, x_{ijk}^{111}$, ($i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\} = N_n$). Определим многогранник M_n системой ограничений:

$$x_{ijk}^{000} + x_{ijk}^{001} + x_{ijk}^{010} + x_{ijk}^{011} + x_{ijk}^{100} + x_{ijk}^{101} + x_{ijk}^{110} + x_{ijk}^{111} = 1, \quad (1)$$

$$x_{ijk}^{000} + x_{ijk}^{001} + x_{ijk}^{010} + x_{ijk}^{011} = x_{ljk}^{000} + x_{ljk}^{001} + x_{ljk}^{010} + x_{ljk}^{011}, \quad (2)$$

$$x_{ijk}^{000} + x_{ijk}^{001} + x_{ijk}^{100} + x_{ijk}^{101} = x_{ilk}^{000} + x_{ilk}^{001} + x_{ilk}^{100} + x_{ilk}^{101}, \quad (3)$$

$$x_{ijk}^{000} + x_{ijk}^{010} + x_{ijk}^{100} + x_{ijk}^{110} = x_{ijl}^{000} + x_{ijl}^{010} + x_{ijl}^{100} + x_{ijl}^{110}, \quad (4)$$

$$x_{ijk}^{000} = x_{jik}^{000} = x_{kji}^{000} = x_{ikj}^{000}, \quad (5)$$

$$x_{ijk}^{001} = x_{jik}^{001} = x_{kji}^{001} = x_{ikj}^{001}, \quad (6)$$

$$x_{ijk}^{011} = x_{jik}^{011} = x_{kji}^{011} = x_{ikj}^{011}, \quad (7)$$

$$x_{ijk}^{111} = x_{jik}^{111} = x_{kji}^{111} = x_{ikj}^{111}, \quad (8)$$

$$x_{ijj}^{100} = x_{iij}^{011} = 0, \quad (9)$$

$$x_{ijk}^{000} \geq 0, \quad x_{ijk}^{001} \geq 0, \quad x_{ijk}^{010} \geq 0, \quad x_{ijk}^{011} \geq 0, \quad (10)$$

$$x_{ijk}^{100} \geq 0, \quad x_{ijk}^{101} \geq 0, \quad x_{ijk}^{110} \geq 0, \quad x_{ijk}^{111} \geq 0, \quad (11)$$

где i, j, k независимо пробегает значения из N_n .

Система ограничений, определяющая многогранник M_n , сходна с системой, задающей *корневой полуметрический многогранник* [1], [2], являющийся релаксационным многогранником ряда важных комбинаторных задач («максимальная 2-выполнимость», «максимальный разрез» и др.). Ниже показано, что, используя многогранники M_n , можно сформулировать известную NP-полную задачу «3-выполнимость» как задачу целочисленного программирования.

Сформулируем ряд определений, которые потребуются и далее. Корневой полуметрический многогранник зададим в том виде, в котором он описан в [1].

Определение 1. В пространстве R^m при $m = 4n^2$ обозначим координаты точек $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, t_{ij}$ ($i, j \in N_n$). Корневой полуметрический многогранник P_n задается системой ограничений:

$$x_{ij} + y_{ij} + z_{ij} + t_{ij} = 1,$$

$$x_{ij} + y_{ij} = x_{kj} + y_{kj},$$

$$x_{ij} + z_{ij} = x_{ik} + z_{ik},$$

$$x_{ij} = x_{ji}, \quad t_{ij} = t_{ji}, \quad y_{ij} = z_{ji},$$

$$z_{ii} = y_{ii} = 0,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad y_{ij} \geq 0, \quad z_{ij} \geq 0, \quad t_{ij} \geq 0,$$

где i, j, k независимо пробегает значения из N_n .

Определение 2. Многогранник $M \in R^n$, задаваемый формулами

$$Ax = e, \quad x \geq 0,$$

где A – булева $(m \times n)$ матрица, называется релаксационным многогранником разбиений.

Обозначим через M^z множество целых точек многогранника M .

Определение 3. Многогранник M называется квазицелочисленным, если каждое ребро многогранника $\text{conv } M^z$ является ребром многогранника M .

Напомним постановку задачи «3-выполнимость» (см. [3]). Заданы конечный набор D дизъюнкций вида $d = u \vee v \vee w$, где $u, v, w \in \{\alpha_i, \bar{\alpha}_i; i \in N_n\}$. Требуется определить, существуют ли такие значения логических переменных α_i , для которых выполняются все дизъюнкции набора D .

Отметим ряд важных свойств многогранника M_n .

Свойство 1. Общее число ограничений в (1)-(11) полиномиально по n .

Свойство 2. Размерность многогранника M_n равна $n(2n^2 - 3n + 4)/3$.

Доказательство. Заметим, что, используя равенства (1)-(4) и (9), значения одних координат в ячейках (i, j, k) можно выразить через другие:

$$\begin{aligned} x_{ijk}^{011} &= x_{iii}^{000} - x_{ijk}^{000} - x_{ijk}^{001} - x_{ijk}^{010}, \\ x_{ijk}^{101} &= x_{jjj}^{000} - x_{ijk}^{000} - x_{ijk}^{001} - x_{ijk}^{100}, \\ x_{ijk}^{110} &= x_{kkk}^{000} - x_{ijk}^{000} - x_{ijk}^{010} - x_{ijk}^{100}, \\ x_{ijk}^{111} &= 1 - x_{iii}^{000} - x_{jjj}^{000} - x_{kkk}^{000} + 2x_{ijk}^{000} + x_{ijk}^{001} + x_{ijk}^{010} + x_{ijk}^{100}. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенств (5)-(8) значения координат точек многогранника M_n определяются как функции лишь координат $x_{iii}^{000}, x_{ijj}^{000}, x_{jjj}^{000}, x_{ijk}^{000}, x_{ijk}^{001}, x_{ijk}^{010}, x_{ijk}^{100}$, где $1 \leq i < j < k \leq n$. Также отметим, что точка с координатами

$$x_{iii}^{000} = 1/2, \quad x_{ijj}^{000} = x_{jjj}^{000} = 1/4, \quad x_{ijk}^{000} = x_{ijk}^{001} = x_{ijk}^{010} = x_{ijk}^{100} = 1/8,$$

$1 \leq i < j < k \leq n$, обращает неравенства (10)-(11) в строгие. Поэтому размерность многогранника равна сумме чисел сочетаний

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 4C_n^3 = \frac{n(2n^2 - 3n + 4)}{3}.$$

Свойство 3. Множество целочисленных вершин многогранника M_n состоит из 2^n точек, каждая из которых имеет координаты:

$$\begin{aligned} x_{ijk}^{000} &= x_{iii}^{000} x_{jjj}^{000} x_{kkk}^{000}, & x_{ijk}^{001} &= x_{iii}^{000} x_{jjj}^{000} (1 - x_{kkk}^{000}), \\ x_{ijk}^{010} &= x_{iii}^{000} (1 - x_{jjj}^{000}) x_{kkk}^{000}, & x_{ijk}^{011} &= x_{iii}^{000} (1 - x_{jjj}^{000}) (1 - x_{kkk}^{000}), \\ x_{ijk}^{100} &= (1 - x_{iii}^{000}) x_{jjj}^{000} x_{kkk}^{000}, & x_{ijk}^{101} &= (1 - x_{iii}^{000}) x_{jjj}^{000} (1 - x_{kkk}^{000}), \\ x_{ijk}^{110} &= (1 - x_{iii}^{000}) (1 - x_{jjj}^{000}) x_{kkk}^{000}, & x_{ijk}^{111} &= (1 - x_{iii}^{000}) (1 - x_{jjj}^{000}) (1 - x_{kkk}^{000}), \end{aligned} \quad (12)$$

где $x = (x_{111}^{000}, \dots, x_{nnn}^{000})$ – произвольный вектор из нулей и единиц.

Доказательство. Принадлежность точек, значения координат которых определяются этими формулами, многограннику M_n доказывается непосредственной проверкой условий (1)-(11). Тот факт, что эти точки являются вершинами M_n , следует из вложения $M_n \subseteq Q_m$, где $m = 8n^3$ и Q_m – единичный куб в R^m . Указанные условия дают описание всех целочисленных вершин многогранника M_n , так как значения всех координат таких вершин вполне определяются выбором 0,1-вектора $x \in R^n$; другие вершины единичного куба Q_m не могут быть вершинами M_n .

Свойство 4. Все целочисленные вершины многогранника M_n являются попарно смежными.

Доказательство. Докажем сначала, что многогранник M_n является релаксационным многогранником разбиений. Покажем, что матрица системы уравнений (1)-(9) может быть приведена к виду, указанному в определении 2. Равенства (5)-(9) можно отбросить, сократив число переменных. Уравнения вида (2)-(4) можно заменить уравнениями, получающимися при вычитании их из уравнений (1). Матрица полученной системы уравнений, эквивалентной (1)-(9), будет булевой. Таким образом, многогранник M_n является релаксационным многогранником разбиений.

Обозначим через W_n множество всех целочисленных вершин многогранника M_n и положим

$$M_n^z = \text{conv } W_n.$$

По теореме В. А. Трубина, приведенной, например, в [4], релаксационный многогранник разбиений является квазицелочисленным. Учитывая квазицелочисленность многогранника M_n , достаточно доказать, что любые две точки $u, v \in W_n$ являются смежными для M_n^z . Рассуждение проведем от противного. Предположим, что u и v — несмежные вершины многогранника M_n^z . Тогда выполняется равенство

$$\alpha u + \beta v = \sum \lambda(w)w, \quad (13)$$

при некоторых $\alpha, \beta, \lambda(w) \geq 0$, где $\alpha + \beta = \sum \lambda(w) = 1$ и суммирование проводится по всем $w \in W_n$, отличным от u и v . Рассмотрим w , для которого $\lambda(w)$ в (13) положительно. Так как u, v и w являются 0,1-векторами, то из (13) следует неравенство

$$w \leq u + v. \quad (14)$$

Рассмотрим «диагональные» векторы $x(u)$, $x(v)$ и $x(w)$, соответствующие вершинам u, v и w (остальные координаты вычисляются по формулам (12)). Так как $u \neq w$ и $v \neq w$, то $x(u) \neq x(w)$ и $x(v) \neq x(w)$ и, следовательно, для некоторых i и j $x_{iii}^{000}(u) \neq x_{iii}^{000}(w)$ и $x_{jjj}^{000}(v) \neq x_{jjj}^{000}(w)$. То есть $x_{iii}^{000}(u) = 1 - x_{iii}^{000}(w)$ и $x_{jjj}^{000}(v) = 1 - x_{jjj}^{000}(w)$. Отсюда и из равенств (12) следует: если $x_{ijj}^{000}(w) = 1$, то $x_{ijj}^{000}(u) = x_{ijj}^{000}(v) = 0$; аналогичные импликации истинны для $x_{iij}^{001}, x_{iij}^{110}$ и x_{iij}^{111} . Учитывая, что одно из чисел $x_{ijj}^{000}(w)$, $x_{iij}^{001}(w)$, $x_{iij}^{110}(w)$, $x_{iij}^{111}(w)$ равно единице (по (5)-(9) $x_{iij}^{010} = x_{iij}^{011} = x_{iij}^{100} = x_{iij}^{101} = 0$), приходим к условию, противоречащему неравенству (14); полученное противоречие доказывает свойство 4.

Отметим, что из свойств 3 и 4 вытекает, что плотность графа многогранника M_n экспоненциальна по n .

Свойство 5. Многогранник M_n является линейной релаксацией многогранника задачи «3-выполнимость».

Доказательство. Для доказательства сформулируем для многогранника M_n задачу «3-выполнимость». Используем обозначения из приведенной выше постановки задачи. Будем считать, что для каждой тройки логических переменных в наборе встречается не более 6 дизъюнкций, содержащих соответствующие литералы. В противном случае заменим «лишние» дизъюнкции, введя новые переменные (например, $\alpha_i \vee \bar{\alpha}_j \vee \alpha_k$ заменим на $\alpha_i \vee \bar{\alpha}_j \vee \beta_1, \bar{\beta}_1 \vee \alpha_k \vee \beta_2, \bar{\beta}_1 \vee \alpha_k \vee \beta_2$).

Для индивидуальной задачи с заданным набором D рассмотрим вектор

$$c = (x_{ijk}^{000}(c), x_{ijk}^{001}(c), x_{ijk}^{010}(c), x_{ijk}^{011}(c), x_{ijk}^{100}(c), x_{ijk}^{101}(c), x_{ijk}^{110}(c), x_{ijk}^{111}(c); i, j, k \in N_n),$$

определив значения его координат с помощью процедуры:

1. Обнулим все координаты вектора.
2. Просмотрим по очереди все дизъюнкции набора D . Для каждой дизъюнкции увеличим на 1 следующие координаты вектора c при $i < j < k$:

$$\begin{aligned} & x_{ijk}^{000}(c), x_{ijk}^{001}(c), x_{ijk}^{010}(c), x_{ijk}^{011}(c), x_{ijk}^{100}(c), x_{ijk}^{101}(c), x_{ijk}^{110}(c) \text{ для дизъюнкции } \alpha_i \vee \alpha_j \vee \alpha_k; \\ & x_{ijk}^{000}(c), x_{ijk}^{010}(c), x_{ijk}^{011}(c), x_{ijk}^{100}(c), x_{ijk}^{101}(c), x_{ijk}^{111}(c) \text{ для дизъюнкции } \alpha_i \vee \alpha_j \vee \bar{\alpha}_k; \\ & x_{ijk}^{000}(c), x_{ijk}^{001}(c), x_{ijk}^{010}(c), x_{ijk}^{011}(c), x_{ijk}^{100}(c), x_{ijk}^{110}(c), x_{ijk}^{111}(c) \text{ для дизъюнкции } \alpha_i \vee \bar{\alpha}_j \vee \alpha_k; \\ & x_{ijk}^{000}(c), x_{ijk}^{001}(c), x_{ijk}^{010}(c), x_{ijk}^{011}(c), x_{ijk}^{101}(c), x_{ijk}^{110}(c), x_{ijk}^{111}(c) \text{ для дизъюнкции } \alpha_i \vee \bar{\alpha}_j \vee \bar{\alpha}_k; \\ & x_{ijk}^{000}(c), x_{ijk}^{001}(c), x_{ijk}^{010}(c), x_{ijk}^{100}(c), x_{ijk}^{101}(c), x_{ijk}^{110}(c), x_{ijk}^{111}(c) \text{ для дизъюнкции } \bar{\alpha}_i \vee \alpha_j \vee \alpha_k; \\ & x_{ijk}^{000}(c), x_{ijk}^{001}(c), x_{ijk}^{011}(c), x_{ijk}^{100}(c), x_{ijk}^{101}(c), x_{ijk}^{110}(c), x_{ijk}^{111}(c) \text{ для дизъюнкции } \bar{\alpha}_i \vee \alpha_j \vee \bar{\alpha}_k; \\ & x_{ijk}^{000}(c), x_{ijk}^{010}(c), x_{ijk}^{011}(c), x_{ijk}^{100}(c), x_{ijk}^{101}(c), x_{ijk}^{110}(c), x_{ijk}^{111}(c) \text{ для дизъюнкции } \bar{\alpha}_i \vee \bar{\alpha}_j \vee \alpha_k; \\ & x_{ijk}^{001}(c), x_{ijk}^{010}(c), x_{ijk}^{011}(c), x_{ijk}^{100}(c), x_{ijk}^{101}(c), x_{ijk}^{110}(c), x_{ijk}^{111}(c) \text{ для дизъюнкции } \bar{\alpha}_i \vee \bar{\alpha}_j \vee \bar{\alpha}_k. \end{aligned}$$

Рассмотрим индивидуальную задачу оптимизации целевой функции $f(x) = (c, x)$ на многограннике M_n . Для каждого набора значений истинности α_i поставим в соответствие целочисленную вершину z , полагая $x_{iii}^{000}(z) = \alpha_i, i \in N_n$. Нетрудно заметить, что величина (c, z) совпадет с числом выполненных дизъюнкций из D .

Отметим, что максимум функции $f(x)$ на многограннике M_n будет равен общему количеству дизъюнкций в наборе D . Сконструируем точку, в которой он будет достигаться. Для каждой тройки $\{i, j, k\}$

зададим пару «противоположных» координат $(x_{ijk}^{000}$ и x_{ijk}^{111} , x_{ijk}^{001} и x_{ijk}^{110} , x_{ijk}^{010} и x_{ijk}^{101} , x_{ijk}^{011} и x_{ijk}^{100}) равными $1/2$ так, чтобы при перемножении с вектором с координаты, равные $1/2$, совпали с наибольшими значениями координат $x(c)$ с нижними индексами ijk . Это можно сделать, поскольку для каждой тройки логических переменных в наборе встречается не более 6 дизъюнкций. Таким образом, максимум функции $f(x)$ в целых вершинах будет равен максимуму на всем многограннике тогда и только тогда, когда существуют значения логических переменных, при которых выполняются все дизъюнкции набора D .

Упомянутые выше корневые полуметрические многогранники, которые, как нетрудно убедиться, изоморфны граням многогранников M_n , обладают свойством: координаты нецелых вершин принимают значения лишь из множества $\{0, 1, 1/2\}$. Для рассматриваемых многогранников M_n ситуация существенно отличается, о чем свидетельствует следующая

Теорема. Координаты нецелочисленных вершин многогранников M_n представляют собой дроби со сколь угодно большими знаменателями.

Доказательство. Докажем, что многогранники M_n могут иметь вершины с координатами со знаменателем, равным любой степени двойки. Для простоты изложения будем считать n четным.

Как известно, в вершине многогранника M_n должны обращаться в равенства по крайней мере $s = \dim M_n$ неравенств (10)-(11) (см., например, [4]). Сконструируем систему из s уравнений с s неизвестными x_{iii}^{000} , x_{ijj}^{000} , x_{ijj}^{001} , x_{ijk}^{000} , x_{ijk}^{001} , x_{ijk}^{010} , x_{ijk}^{100} (здесь и далее $1 \leq i < j < k \leq n$).

Представим, что координаты точки многогранника записаны в трехмерную «таблицу» размера $n \times n \times n$, и в ячейке (i, j, k) этой таблицы содержатся восемь координат с нижними индексами i, j, k : x_{ijk}^{000} , x_{ijk}^{001} , x_{ijk}^{010} , x_{ijk}^{011} , x_{ijk}^{100} , x_{ijk}^{101} , x_{ijk}^{110} , x_{ijk}^{111} .

Рассмотрим следующие варианты выбора равенств и получающиеся при этом уравнения.

1. Выбирая для ячейки (i, j, k) равенства $x_{ijk}^{001} = x_{ijk}^{010} = x_{ijk}^{100} = x_{ijk}^{110} = x_{ijk}^{111} = 0$, из условий (1)-(4),(9) получаем уравнение

$$x_{iii}^{000} + x_{jjj}^{000} - x_{kkk}^{000} = 1. \quad (15)$$

2. Выбирая для ячейки (i, i, j) равенства $x_{ijj}^{001} = x_{ijj}^{110} = 0$, получаем уравнение

$$x_{iii}^{000} - x_{jjj}^{000} = 0. \quad (16)$$

3. Выбирая для ячейки (i, j, j) равенства $x_{ijj}^{000} = x_{ijj}^{111} = 0$, получаем уравнение

$$x_{iii}^{000} + x_{jjj}^{000} = 1. \quad (17)$$

Перейдем к конструированию системы уравнений, матрица которой будет легко приводиться к ступенчатому виду.

1. Для ячеек $(n-1, n-1, n)$ и $(2p-1, 2p-1, 2p)$, где $1 \leq p < n/2$, выберем 2 равенства, дающие уравнение вида (16).
2. Для ячейки $(n-1, n, n)$ выберем 2 равенства, дающие уравнение вида (17).
3. Для ячеек $(2p-1, 2p, 2p+2)$, где $1 \leq p < n/2$, выберем 5 равенств, дающих уравнение вида (15).
4. Для ячеек $(n-2, n-1, n)$ и $(n-3, n-1, n)$ приравняем к нулю иксы с верхними индексами 000, 011, 101, 110.
5. Для оставшихся ячеек (i, j, k) выберем равенства $x_{ijk}^{000} = x_{ijk}^{011} = x_{ijk}^{101} = x_{ijk}^{110} = 0$, а для ячеек (i, j, j) и (i, j, i) положим $x_{ijj}^{111} = x_{ijj}^{110} = 0$.

Уравнения, полученные после выполнения пунктов 1 – 3, позволяют вычислить значения координат на диагонали:

$$x_{2p, 2p, 2p}^{000} = x_{2p-1, 2p-1, 2p-1}^{000} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2-p+1},$$

где $1 \leq p \leq n/2$. Значения остальных переменных вычисляются при помощи оставшихся уравнений, они являются дробями с знаменателем от 2^2 до $2^{(n/2)}$.

Таким образом, знаменатели координат вершин многогранников M_n могут быть как угодно большими.

В заключение отметим, что утверждение, аналогичное доказанной теореме, для многогранника задачи «трехмерное сочетание» рассматривалось в [5] и [6].

Список литературы

1. *Бондаренко, В.А.* Полиэдральные графы и сложность в комбинаторной оптимизации / *В. А. Бондаренко*. — Ярослав. гос. ун-т. — Ярославль, 1995. — 126 с.
2. *Деза, М. М.* Геометрия разрезов и метрик / *М. М. Деза, М. Лоран*; пер. Е. Пантелеевой и П. Сергеева / под ред. В. Грипухина. — М.: МЦНМО, 2001. — 736 с.
3. *Гэри, М.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / *М. Гэри, Д. Джонсон*. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
4. *Емеличев, В.А.* Многогранники, графы, оптимизация / *В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов*. — М.: Наука, 1981. — 344 с.
5. *Ильичев, А.П.* О крайних точках многогранников многоиндексных транспортных задач / *А.П. Ильичев, В.Н. Шевченко* // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. — Горький: Изд-во ГГУ, 1981. — С. 66 – 72.
6. *Борисов, С.Е.* О нецелочисленных вершинах трехиндексных транспортных многогранников / *С. Е. Борисов, Р. В. Филипов* // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Ярослав. гос. ун-т. Ярославль, 1999. — Вып. 2. — С. 153 – 156.

On Relaxation Polytope of 3-satisfiability Problem

Uryvaev B.V.

The properties of a polytope associated with the 3-satisfiability problem are investigated. Particularly, we prove that values of its vertex coordinates can be represented by fractions with arbitrarily large denominators.