Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **3** (2014) 91–105

УДК 517.5

Об одной оптимальной кубатурной формуле для классов функций, задаваемых модулями непрерывности

Шабозов М. Ш.

Институт математики АН Республики Таджикистан им. А. Джураева
734063, Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4

e-mail: shabozov@mail.ru

получена 11 марта 2014

Ключевые слова: оптимальные формулы, экстремальная задача, формула типа Маркова, модуль непрерывности, узлы и коэффициенты, оценка остатка.

Рассматривается задача минимизации погрешности кубатурной формулы на классах функций, задаваемых модулями непрерывности. Для кубатурных формул с фиксированными узлами на границе прямоугольной области и решётчатым расположением узлов даётся точное решение задачи на широких классах функций двух переменных.

Ранее Н.П. Корнейчуком было доказано, что если граничные узлы прямоугольной решётки $Q_{ki} = \{x_{k-1} \le x \le x_k,\ y_{i-1} \le y \le y_i\}$ не включать в число узлов кубатурной формулы

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ki} f(x_k, y_i) + R_{mn}(f), \tag{1}$$

то среди всех кубатурных формул вида (1) наилучшей для классов функций $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, $H^{\omega}_{\rho_1}(Q)$ и $H^{\omega}_{\rho_2}(Q)$ является формула средних прямоугольников.

В работе доказано, что если в число узлов формулы (1) добавить все граничные узлы (такие формулы называются формулами типа Маркова), то для указанных классов функций наилучшей является формула трапеций. Вычислены точные оценки погрешности для всех классов функций.

1. Введение

Решение экстремальной задачи отыскания наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы и получение точной оценки её остатка является одной из наиболее важных задач численного анализа. Основные результаты, полученные по экстремальным задачам теории квадратур до конца восьмидесятых годов прошлого столетия, подытожены Н.П. Корнейчуком в дополнении к монографии [1]. В этом направлении получен ряд существенных результатов, тем не менее до настоящего времени для многомерных случаев ещё немало задач такого рода не решено.

В работе рассматривается задача минимизации погрешности кубатурных формул на некоторых классах функций двух переменных, задаваемых модулями непрерывности. Для кубатурных формул типа Маркова с фиксированными узлами на границе прямоугольной области и решётчатым расположением узлов даётся решение экстремальной задачи на указанных классах функций.

2. Постановка задачи. Предварительные факты

Напомним постановку общей экстремальной задачи для функций двух переменных. Рассмотрим для функций $f(x,y)$, заданных и интегрируемых в смысле Римана на прямоугольнике $Q=\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$, кубатурную формулу

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}p_{ki}f(x_k,y_i)+R_{mn}(f), \tag{2.1}$$

определяемую вектором $(X,Y;P)$ узлов

$$X=\{x_k:\ a\le x_1<\dots<x_{m-1}<x_m\le b\},$$

$$Y=\{y_i:\ c\le y_1<\dots<y_{n-1}<y_n\le d\}$$

и коэффициентов $P=\{p_{k,i}\}_{k,i=1}^{m,n}$, $R_{mn}(f):=R_{mn}(f;X,Y;P)$ – погрешность формулы на функции $f(x,y)$. Для краткости иногда точки прямоугольника Q будем обозначить через $M:=M(x,y)$, а узлы $M_{ki}=M(x_k,y_i)$. Множество всех векторов узлов и коэффициентов, для которых формула (2.1) имеет смысл, обозначим через $\mathcal{A}$. Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $\{f(x,y)\}$, заданных и определённых в прямоугольнике Q, то положим

$$R_{mn}=(\mathfrak{M};X,Y;P)=\sup\Big\{|R_{mn}(f;X,Y;P)|:\ f\in\mathfrak{M}\Big\}.$$

Требуется найти величину [1]

$$\mathcal{E}_{mn}(\mathfrak{M})=\inf\Big\{R_{mn}(\mathfrak{M};X,Y;P):\ (X,Y;P)\in\mathcal{A}\Big\} \tag{2.2}$$

и указать вектор $(X^*,Y^*;P^*)$ $(X^*=\{x_k^*\},Y^*=\{y_i^*\};P^*=\{p_{ki}^*\})$ из множества $\mathcal{A}$, на котором достигается точная нижняя грань, то есть выполняется равенство

$$\mathcal{E}_{mn}(\mathfrak{M})=R_{mn}(\mathfrak{M};X^*,Y^*;P^*).$$

Кубатурная формула (2.1) с узлами (x_k^*,y_i^*) и коэффициентами p_{ki}^* даёт наименьшую на всём классе $\mathfrak{M}$ погрешность среди формул, задаваемых множеством

$\mathcal{A}$ векторов $(X, Y; P)$, и в этом смысле является *наилучшей* или *оптимальной* для класса $\mathfrak{M}$.

Введём в рассмотрение следующие классы функций:

$H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ – класс определённых на Q функций $f(x, y)$, которые для любых двух точек $(x', y'), (x'', y'') \in Q$ удовлетворяют условию

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \le \omega_1(|x' - x''|) + \omega_2(|y' - y''|),$$

где $\omega_1(t), \omega_2(\tau)$ – заданные модули непрерывности, то есть неубывающие полуаддитивные на отрезках $0 \le t \le b - a$ и $0 \le \tau \le d - c$ функции, в нуле равные нулю;

$H^{\omega}_{\rho}(Q)$ – класс функций $f(x, y)$, определённых на Q, и таких, которые для любых точек $M'(x', y'), M''(x'', y'')$ из Q удовлетворяют условию

$$|f(M') - f(M'')| \le \omega(\rho(M', M'')),$$

где $\omega(\delta)$ – заданный на отрезке $0 \le \delta \le \rho(M'(a, c), M''(b, d))$, а под $\rho(M', M'')$ будем понимать одну из следующих метрик между точками $M'(x', y')$ и $M''(x'', y'')$ из Q:

$\rho_1(M', M'') = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$ – евклидово расстояние,

$\rho_2(M', M'') = |x' - x''| + |y' - y''|$ – хэммингово расстояние.

Из результата Н.П. Корнейчука [2], доказанного для функций многих переменных, в частности для функций двух переменных, вытекает

Теорема A [1, с. 177]. *Среди кубатурных формул вида (2.1) наилучшей для классов функций $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $H^{\omega}_{\rho_1}(Q)$ является формула средних прямоугольников*

$$\iint\limits_{(Q)} f(x, y)dxdy = 4hq \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(a + (2k - 1)h_1; c + (2i - 1)q_1) + R_{mn}(f),$$

где $h_1 = (b - a)/(2m)$, $q_1 = (d - c)/(2n)$. *При этом*

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega_1,\omega_2}(Q)) = 4mn \left(q_1 \int\limits_0^{h_1} \omega_1(t)dt + h_1 \int\limits_0^{q_1} \omega_2(\tau)d\tau \right),$$

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}_{\rho_1}(Q)) = 4mn \int\limits_0^{q_1} \int\limits_0^{h_1} \omega(\sqrt{t^2 + \tau^2})dtd\tau.$$

В этой работе дано точное решение сформулированной выше задачи (2.2) для кубатурной формулы типа Маркова следующего вида:

$$\iint\limits_{(Q)} f(x, y)dxdy = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} p_{ki} f(x_k, y_i) + R_{mn}(f), \tag{2.3}$$

определяемой вектором $(X, Y; P)$ узлов

$$X = \{x_k : \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b\},$$

$$Y = \{y_i : \ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d\}$$

и коэффициентов $P = \{p_{k,i}\}_{k,i=0}^{m,n}$ на классах функций $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, $H^{\omega}_{\rho_1}(Q)$ и $H^{\omega}_{\rho_2}(Q)$. Заметим, что кубатурная формула (2.3), в отличие от формулы (2.1), в качестве узлов, помимо внутренних точек решётки $M_{k,i} := M(x_k, y_i)$, $k = \overline{1, m-1}$; $i = \overline{1, n-1}$, содержит как угловые точки $M_{0,0} = M(a, c)$, $M_{0,n} = M(a, d)$, $M_{m,0} = M(b, c)$, $M_{m,n} = M(b, d)$, так и все граничные точки

$$\begin{gathered} M_{k,0} := M(x_k, c), \ M_{k,n} := M(x_k, d), \quad k = \overline{1, m-1}, \\ M_{0,i} := M(a, y_i), \ M_{m,i} := M(b, y_i), \quad i = \overline{1, n-1}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Таким образом, мы изучаем задачу отыскания наилучшей кубатурной формулы вида (2.3), когда заранее зафиксированы в качестве узлов координаты углов прямоугольника Q, а граничные узлы (2.4), внутренние узлы решётки и коэффициенты p_{ki} ($k = \overline{0, m}$, $i = \overline{0, n}$) следует выбрать оптимальным образом.

3. Основной результат

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 [1]. *Пусть в области Q фиксирована произвольная система точек $M_1, M_2, ..., M_\nu$ и функция $q(M)$ определена равенством*

$$q(M) = \min_{1\le j\le \nu} \varphi[\rho(M, M_j)], \ M \in Q,$$

где $\varphi(t)$ — неубывающая и полуаддитивная, то есть удовлетворяющая соотношениям

$$0 \le \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \le \varphi(t_2 - t_1), \ 0 \le t_1 \le t_2 \le \theta,$$

(θ – диаметр области Q) функция, а $\rho(M, M_j)$ – какое-нибудь расстояние между точками M и M_j из Q. Тогда для любых точек $M', M'' \in Q$ выполняется неравенство

$$|q(M') - q(M'')| \le \varphi[\rho(M', M'')].$$

Лемма 2 [3, с. 370]. *Пусть $\varphi(u)$ – неубывающая для $0 \le u \le b-a$ функция. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ каждому вектору*

$$X = \{x_k : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

сопоставим функцию

$$g(X; x) = \min_{0\le k\le n} \varphi(|x - x_k|), \ a \le x \le b.$$

Тогда если

$$X^* = \{x_k^* : x_k^* = a + kh, k = 0, 1, ..., n; h = (b-a)/n\},$$

то для любого вектора X

$$\int\limits_a^b g(X;x)dx \geq \int\limits_a^b g(X^*;x)dx = 2n\int\limits_0^{h/2}\varphi(t)dt.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Среди всех кубатурных формул вида (2.3) наилучшей для классов* $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, $H^{\omega}_{\rho_1}(Q)$ *и* $H^{\omega}_{\rho_2}(Q)$ *является формула трапеций*

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy = \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} p^*_{ki} f(a+kh, c+iq) + R_{mn}(f), \tag{3.1}$$

где $h=(b-a)/m,\ q=(d-c)/n$, *и наилучшие коэффициенты* p^*_{ki} *имеют вид:*

$$\begin{cases} p^*_{00} = p^*_{m0} = p^*_{0n} = p^*_{mn} = hq/4; \\ p^*_{0i} = p^*_{mi} = hq/2, i = 1,2...,n-1; \\ p^*_{k0} = p^*_{kn} = hq/2, k = 1,2...,m-1; \\ p^*_{ki} = hq, k = 1,2...,m-1; i = 1,2...,n-1. \end{cases} \tag{3.2}$$

При этом точная оценка погрешности наилучшей формулы (3.1) на указанных классах функций равна

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega_1,\omega_2}(Q)) = 2mn\left(q\int\limits_0^{h/2}\omega_1(t)dt + h\int\limits_0^{q/2}\omega_2(\tau)d\tau\right), \tag{3.3}$$

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}_{\rho_1}(Q)) = 4mn\int\limits_0^{h/2}\int\limits_0^{q/2}\omega(\sqrt{t^2+\tau^2})dtd\tau, \tag{3.4}$$

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}_{\rho_2}(Q)) = 4mn\int\limits_0^{h/2}\int\limits_0^{q/2}\omega(t+\tau)dtd\tau :=$$

$$:= 4mn\begin{cases} \int\limits_0^{q/2} t\omega(t)dt + \frac{q}{2}\int\limits_{q/2}^{h/2}\omega(t)dt + \int\limits_{h/2}^{q/2+h/2}\left(\frac{q}{2}+\frac{h}{2}-t\right)\omega(t)dt,\ h>q; \\ \int\limits_0^{h/2} t\omega(t)dt + \frac{h}{2}\int\limits_{h/2}^{q/2}\omega(t)dt + \int\limits_{q/2}^{q/2+h/2}\left(\frac{q}{2}+\frac{h}{2}-t\right)\omega(t)dt,\ h<q; \\ \int\limits_0^{h/2} t\omega(t)dt + \int\limits_{h/2}^{h}(h-t)\omega(t)dt,\ h=q. \end{cases} \tag{3.5}$$

Доказательство. Докажем сначала утверждение теоремы для класса $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$. Оценку снизу получим хорошо известным методом Н.П. Корнейчука [2] с учётом вышеприведённых лемм 1 и 2. Каждому вектору (X,Y), задающему решётку узлов $M_{ki}=M(x_k,y_i)$, сопоставим множество $H^{\omega_1,\omega_2}_{X,Y}(Q)$ функций $f(x,y)\in H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ таких, что $f(M_{ki})=0$ $(k=0,1,...,m;\ i=0,1,...,n)$. Фиксируем произвольный вектор (X,Y). Если $f\in H^{\omega_1,\omega_2}_{X,Y}(Q)$, то для любой точки $M(x,y)\in Q$ и любого узла $M_{ki}\in Q$ будем иметь

$$|f(M)|=|f(M)-f(M_{ki})|\le\omega_1(|x-x_k|)+\omega_2(|y-y_i|)$$

и, следовательно,

$$|f(M)|\le\min_{(x_k,y_i)}\{\omega_1(|x-x_k|)+\omega_2(|y-y_i|)\}:=\Psi(M). \tag{3.6}$$

Функцию $\Psi(M)=\Psi_{X,Y}(M)$, определённую правой частью (3.6), в силу решётчатого расположения узлов, а также монотонности $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)$, можно записать

$$\Psi(M):=\Psi_{X,Y}(x,y)=\omega_1(\min_k|x-x_k|)+\omega_2(\min_i|y-y_i|).$$

При любом $y\in[c,d]$ и любых $x',x''\in[a,b]$, применяя лемму 1 в одномерном варианте, получаем

$$|\Psi_{X,Y}(x',y)-\Psi_{X,Y}(x'',y)|=|\omega_1(\min_k|x'-x_k|)-\omega_1(\min_k|x''-x_k|)|\le\omega_1(|x'-x''|),$$

и аналогично для всех $x\in[a,b]$ и любых $y',y''\in[c,d]$ будем иметь

$$|\Psi_{X,Y}(x,y')-\Psi_{X,Y}(x,y'')|\le\omega_2(|y'-y''|).$$

С учётом последних двух неравенств для произвольных точек M' и M'' из прямоугольника Q, имеем

$$|\Psi(M')-\Psi(M'')|=|\Psi(x',y')-\Psi(x'',y'')|\le|\Psi(x',y')-\Psi(x'',y')|+|\Psi(x'',y')-\Psi(x'',y'')|\le$$

$$\le\omega_1(|x'-x''|)+\omega_2(|y'-y''|),$$

где $x',x''\in[a,b]$, $y',y''\in[c,d]$. Поскольку, кроме того, $\Psi(M_{ki})=0$, то функция $\Psi\in H^{\omega_1,\omega_2}_{X,Y}(Q)$. Это с учётом (3.6) приводит к соотношению

$$R_{mn}(H^{\omega_1,\omega_2}_{X,Y};X,Y)=\sup\left\{\left|\iint\limits_{(Q)}f(x,y)dxdy\right|:\ f\in H^{\omega_1,\omega_2}_{X,Y}(Q)\right\}=$$

$$=\iint\limits_{(Q)}\Psi_{X,Y}(x,y)dxdy=R_{mn}(\Psi_{X,Y}). \tag{3.7}$$

Докажем, что $R_{mn}(\Psi_{X,Y}) \geq R_{mn}(\Psi_{X^*,Y^*})$, где (X^*,Y^*) — вектор, задаваемый узлами

$$x_k^* = a + kh, k = 0,1,\ldots,m;\ h = (b-a)/m;$$

$$y_i^* = c + iq, i = 0,1,\ldots,n;\ q = (d-c)/n.$$

Фиксируем произвольный вектор узлов (X,Y). Тогда, применяя лемму 2 к функции

$$\Psi_{X,Y}(x,y) = \min_k \omega_1(|x-x_k|) + \min_i \omega_2(|y-y_i|) := q_1(X,x) + g_2(Y,y)$$

сначала относительно вектора X, а затем относительно вектора Y, будем иметь

$$R_{mn}(\Psi_{X,Y}) = \iint\limits_{(Q)} \Psi_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint\limits_{(Q)} \{g_1(X,x) + g_2(Y,y)\}\, dxdy =$$

$$= (d-c)\int\limits_a^b g_1(X,x)dx + (b-a)\int\limits_c^d g_2(Y,y)dy \geq$$

$$\geq (d-c)\int\limits_a^b g_1(X^*,x)dx + (b-a)\int\limits_c^d g_2(Y^*,y)dy =$$

$$= 2m(d-c)\int\limits_0^{(b-a)/(2m)} \omega_1(t)dt + 2n(b-a)\int\limits_0^{(d-c)/(2n)} \omega_2(\tau)d\tau =$$

$$= 2mn\left(q\int\limits_0^{h/2}\omega_1(t)dt + h\int\limits_0^{q/2}\omega_2(\tau)d\tau\right) := R_{mn}(\Psi_{X^*,Y^*}). \tag{3.8}$$

Таким образом, учитывая равенство (3.7) и неравенство (3.8), получаем оценку снизу для класса $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$:

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega_1,\omega_2}(Q)) \geq \inf_{(X,Y)}\Big\{R_{mn}(\Psi_{X,Y}):\ (X,Y)\in\mathcal{A}\Big\} =$$

$$= R_{mn}(\Psi_{X^*,Y^*}) = 2mn\left(q\int\limits_0^{h/2}\omega_1(t)dt + h\int\limits_0^{q/2}\omega_2(\tau)d\tau\right). \tag{3.9}$$

Для получения оценки сверху рассмотрим кубатурную формулу (2.4), заданную вектором $(X^*,Y^*;P^*)$ узлов

$$X^* = \{x_k^*:\ x_k^* = a + kh,\ k = 0,1,\ldots,m\},$$

$$Y^* = \{y_i^*:\ y_i^* = c + iq,\ i = 0,1,\ldots,n\}$$

и коэффициентов $P^* = \{p_{ki}^*\}_{k,i=0}^{m,n}$, определённых равенством (3.1). Положим

$$t_0^* = a,\ t_k^* = (x_{k-1}^* + x_k^*)/2 = x_{k-1}^* + h/2,\ k = 0,1,\ldots,m;\ t_{m+1}^* = x_m^* = b,$$

$$\tau_0^* = c,\ \tau_i^* = (y_{i-1}^* + y_i^*)/2 = y_{i-1}^* + q/2,\ i = 0,1,\ldots,n;\ \tau_{n+1}^* = y_n^* = d.$$

Очевидно, что $Q = \bigcup\limits_{k,i=0}^{m,n} Q_{k,i}$, где $Q_{k,i} = \Big\{ t_k^* \le x \le t_{k+1}^*,\ \tau_i^* \le x \le \tau_{i+1}^* \Big\}$.

В принятых обозначениях погрешность формулы (2.4) с векторами коэффициентов (3.1) представим в следующем виде:

$$R_{mn}(f; X^*, Y^*; P^*) = \iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy - \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} p_{ki}^* f(x_k^*, y_i^*) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} \iint\limits_{(Q_{k,i})} [f(x,y) - f(x_k^*, y_i^*)]dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(Q_{0,0})} [f(x,y) - f(a,c)]dxdy + \iint\limits_{(Q_{m,0})} [f(x,y) - f(b,c)]dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{(Q_{0,n})} [f(x,y) - f(a,d)]dxdy + \iint\limits_{(Q_{m,n})} [f(x,y) - f(b,d)]dxdy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \iint\limits_{(Q_{k,0})} [f(x,y) - f(x_k^*, c)]dxdy + \sum_{k=1}^{m-1} \iint\limits_{(Q_{k,n})} [f(x,y) - f(x_k^*, d)]dxdy +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \iint\limits_{(Q_{0,i})} [f(x,y) - f(a, y_i^*)]dxdy + \sum_{i=1}^{n-1} \iint\limits_{(Q_{n,i})} [f(x,y) - f(b, y_i^*)]dxdy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1} \iint\limits_{(Q_{k,i})} [f(x,y) - f(x_k^*,\ y_i^*)]dxdy. \tag{3.10}$$

Оценивая по абсолютной величине равенство (3.10), для произвольной функции $f \in H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ будем иметь

$$|R_{mn}(f; X^*, Y^*; P^*)| \le$$

$$\le \iint\limits_{(Q_{0,0})} [\omega_1(x-a) + \omega_2(y-c)]dxdy + \iint\limits_{(Q_{0,n})} [\omega_1(x-a) + \omega_2(d-y)]dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{(Q_{m,0})} [\omega_1(b-x) + \omega_2(y-c)]dxdy + \iint\limits_{(Q_{m,n})} [\omega_1(b-x) + \omega_2(d-y)]dxdy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \iint\limits_{(Q_{k,0})} [\omega_1(|x-x_k^*|) + \omega_2(y-c)]dxdy + \sum_{k=1}^{m-1} \iint\limits_{(Q_{k,n})} [\omega_1(|x-x_k^*|) + \omega_2(d-y)]dxdy +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \iint\limits_{(Q_{0,i})} [\omega_1(x-a) + \omega_2(|y-y_i^*|)]dxdy + \sum_{i=1}^{n-1} \iint\limits_{(Q_{n,i})} [\omega_1(b-x) + \omega_2(|y-y_i^*|)]dxdy +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\iint\limits_{(Q_{k,i})}[\omega_1(|x-x_k^*|)+\omega_2(|y-y_i^*|)]dxdy := \mathcal{J}_{0,0}+\mathcal{J}_{0,n}+\mathcal{J}_{m,0}+\mathcal{J}_{m,n}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}(\mathcal{J}_{k,0}+\mathcal{J}_{k,n})+\sum_{i=1}^{n-1}(\mathcal{J}_{0,i}+\mathcal{J}_{m,i})+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\mathcal{J}_{k,i}.$$

Заметим, что все интегралы $\mathcal{J}_{0,0},\mathcal{J}_{0,n},\mathcal{J}_{m,0}$ и $\mathcal{J}_{m,n}$ имеют одно и то же значение, равное

$$\frac{1}{2}q\int\limits_0^{h/2}\omega_1(t)dt+\frac{1}{2}h\int\limits_0^{q/2}\omega_2(\tau)d\tau.$$

Поэтому

$$\mathcal{J}_{0,0}+\mathcal{J}_{0,n}+\mathcal{J}_{m,0}+\mathcal{J}_{m,n}=2q\int\limits_0^{h/2}\omega_1(t)dt+2h\int\limits_0^{q/2}\omega_2(\tau)d\tau. \tag{3.11}$$

Вычислим интегралы $\mathcal{J}_{k,0}$ $(k=1,2,...,m-1)$. Имеем

$$\mathcal{J}_{k,0}=\iint\limits_{(Q_{k,0})}[\omega_1(|x-x_k^*|)+\omega_2(y-c)]dxdy=\int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*}\int\limits_c^{\tau_1^*}[\omega_1(|x-x_k^*|)+\omega_2(y-c)]dxdy=$$

$$=(\tau_1^*-c)\int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*}\omega_1(|x-x_k|)dx+(t_{k+1}^*-t_k^*)\int\limits_c^{\tau_1^*}\omega_2(y-c)dy=$$

$$=\frac{q}{2}\int\limits_{x_k^*-\frac{h}{2}}^{x_k^*+\frac{h}{2}}\omega_1(|x-x_k^*|)dx+h\int\limits_0^{q/2}\omega_2(\tau)d\tau=q\int\limits_0^{h/2}\omega_1(t)dt+h\int\limits_0^{q/2}\omega_2(\tau)d\tau. \tag{3.12}$$

Аналогичным образом для всех $k=1,2,...,m-1$ будем иметь

$$\mathcal{J}_{k,n}=\iint\limits_{(Q_{k,n})}[\omega_1(|x-x_k^*|)+\omega_2(d-y)]dxdy=q\int\limits_0^{h/2}\omega_1(t)dt+h\int\limits_0^{q/2}\omega_2(\tau)d\tau. \tag{3.13}$$

Из равенств (3.12) и (3.13) следует, что

$$\sum_{k=1}^{m-1}(\mathcal{J}_{k,0}+\mathcal{J}_{k,n})=2(m-1)\left(q\int\limits_0^{h/2}\omega_1(t)dt+h\int\limits_0^{q/2}\omega_2(\tau)d\tau\right). \tag{3.14}$$

Проделав аналогичные выкладки, получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1}(\mathcal{J}_{0,i}+\mathcal{J}_{m,i})=2(n-1)\left(q\int\limits_0^{h/2}\omega_1(t)dt+h\int\limits_0^{q/2}\omega_2(\tau)d\tau\right). \tag{3.15}$$

Вычислим теперь интеграл $\mathcal{J}_{k,i}$ ($k = 1, 2, ..., m-1;\ i = 1, 2, ..., n-1$). Имеем

$$\mathcal{J}_{k,i} = \iint\limits_{(Q_{k,i})} [\omega_1(|x - x_k^*|) + \omega_2(|y - y_i^*|)]dxdy =$$

$$= \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \int\limits_{\tau_i^*}^{\tau_{i+1}^*} \omega_1(|x - x_k^*|)dxdy + \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \int\limits_{\tau_i^*}^{\tau_{i+1}^*} \omega_2(|y - y_i^*|)dxdy =$$

$$= q \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} [\omega_1(|x - x_k^*|) + h \int\limits_{\tau_i^*}^{\tau_{i+1}^*} \omega_2(|y - y_i^*|)]dy = 2q \int\limits_0^{h/2} \omega_1(t)dt + 2h \int\limits_0^{q/2} \omega_2(\tau)d\tau. \quad (3.16)$$

Учитывая равенство (3.16), запишем

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{J}_{k,i} = 2(m-1)(n-1) \left(q \int\limits_0^{h/2} \omega_1(t)dt + h \int\limits_0^{q/2} \omega_2(\tau)d\tau \right). \quad (3.17)$$

Суммируя равенства (3.11), (3.14), (3.15) и (3.17), для погрешности кубатурной формулы (2.4) с заданным вектором узлов и коэффициентов $(X^*, Y^*; P^*)$ получим оценку сверху

$$|R_{mn}(f; X^*, Y^*; P^*)| \leq 2mn \left(q \int\limits_0^{h/2} \omega_1(t)dt + h \int\limits_0^{q/2} \omega_2(\tau)d\tau \right). \quad (3.18)$$

Требуемое равенство (3.3) следует из сопоставления оценки снизу (3.9) и оценки сверху (3.18).

Для класса $H_{\rho_1}^{\omega}(Q)$ доказательство проводится по приведённой выше схеме. Пусть $H_{\rho_1,X,Y}^{\omega}(Q)$ – множество функций $f \in H_{\rho_1}^{\omega}(Q)$, обращающихся в нуль в узлах $M_{ki} = M(x_k, y_i)$ решётки, задаваемой вектором (X, Y). Если $f \in H_{\rho_1,X,Y}^{\omega}(Q)$, то мы, как и выше, получим

$$f(M) \leq \min_{x_k, y_i} \omega \left(\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_i)^2} \right) := \eta_{X,Y}(x, y),$$

и по лемме 1 $\eta_{X,Y}(x, y) \in H_{\rho_1,X,Y}^{\omega}(Q)$. Легко заметить, что

$$\eta_{X,Y}(x, y) = \omega \left(\sqrt{\min_k (x - x_k)^2 + \min_i (y - y_i)^2} \right),$$

причём

$$R_{mn}(H_{\rho_1,X,Y}^{\omega}(Q); X, Y) = \iint\limits_{(Q)} \eta_{X,Y}(x, y)dxdy = R_{mn}(\eta_{X,Y}).$$

Если фиксировать произвольный вектор (X, Y), то, дважды применяя лемму 2 сначала относительно вектора X, а затем относительно вектора Y, приходим к неравенству

$$R_{mn}(\eta_{X,Y}) = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b \eta_{X,Y}(x,y)dx \geq \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b \eta_{X^*,Y}(x,y)dx \geq$$

$$\geq \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b \eta_{X^*,Y^*}(x,y)dx = R_{mn}(\eta_{X^*,Y^*}). \tag{3.19}$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}_{\rho_1}(Q)) \geq \inf_{X,Y} R_{mn}(\eta_{X,Y}) = R_{mn}(\eta_{X^*,Y^*}).$$

С другой стороны, так же, как и для класса $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, оценивая по абсолютной величине равенство (3.10), для произвольной $f \in H^{\omega}_{\rho_1}(Q)$ будем иметь

$$|R_{mn}(f; X^*, Y^*; P^*)| \leq \iint\limits_{(Q)} \eta_{X^*,Y^*}(x,y)dxdy = R_{mn}(\eta_{X^*,Y^*}). \tag{3.20}$$

Из оценок (3.19) и (3.20) сразу следует соотношение

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}_{\rho_1}(Q)) = R_{mn}(H^{\omega}_{\rho_1}(Q); X^*, Y^*; P^*) = \iint\limits_{(Q)} \eta_{X^*,Y^*}(x,y)dxdy. \tag{3.21}$$

Вычислим интеграл в правой части равенства (3.21). Имеем:

$$\iint\limits_{(Q)} \eta_{X^*,Y^*}(x,y)dxdy = \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} \iint\limits_{(Q_{k,i})} \sqrt{\omega_1^2(|x-x_k^*|) + \omega_2^2(|y-y_i^*|)}dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(Q_{0,0})} \sqrt{\omega_1^2(x-a) + \omega_2^2(y-c)}dxdy + \iint\limits_{(Q_{m,0})} \sqrt{\omega_1^2(b-x) + \omega_2^2(y-c)}dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{(Q_{0,n})} \sqrt{\omega_1^2(x-a) + \omega_2^2(d-y)}dxdy + \iint\limits_{(Q_{m,n})} \sqrt{\omega_1^2(b-a) + \omega_2^2(d-y)}dxdy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \iint\limits_{(Q_{k,0})} \sqrt{\omega_1^2(|x-x_k^*|) + \omega_2^2(y-c)}dxdy + \iint\limits_{(Q_{k,n})} \sqrt{\omega_1^2(|x-x_k^*|) + \omega_2^2(d-y)}dxdy \right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \iint\limits_{(Q_{0,i})} \sqrt{\omega_1^2(x-a) + \omega_2^2(|y-y_i^*|)}dxdy + \iint\limits_{(Q_{m,i})} \sqrt{\omega_1^2(b-x) + \omega_2^2(|y-y_i^*|)}dxdy \right\} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\iint\limits_{(Q_{k,i})}\sqrt{\omega_1^2(|x-x_k^*|)+\omega_2^2(|y-y_i^*|)}dxdy=$$

$$=4\int\limits_0^{h/2}\int\limits_0^{q/2}\sqrt{\omega_1^2(t)+\omega_2^2(\tau)}dtd\tau+4(m-1)\int\limits_0^{h/2}\int\limits_0^{q/2}\sqrt{\omega_1^2(t)+\omega_2^2(\tau)}dtd\tau+$$

$$+4(n-1)\int\limits_0^{h/2}\int\limits_0^{q/2}\sqrt{\omega_1^2(t)+\omega_2^2(\tau)}dtd\tau+4(m-1)(n-1)\int\limits_0^{h/2}\int\limits_0^{q/2}\sqrt{\omega_1^2(t)+\omega_2^2(\tau)}dtd\tau=$$

$$=4mn\int\limits_0^{h/2}\int\limits_0^{q/2}\sqrt{\omega_1^2(t)+\omega_2^2(\tau)}dtd\tau.$$

Этим мы доказали точную оценку (3.4) для класса $H^{\omega}_{\rho_1}(Q)$. Доказательство равенств (3.5) не представляет большого труда и проводится по изложенной выше схеме, чем и завершаем доказательство теоремы 3.1.

Пусть $H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ – класс функций $f(x,y)$, удовлетворяющих в прямоугольнике Q условию

$$|f(x+t,y+\tau)+f(x+t,y-\tau)+f(x-t,y+\tau)+f(x-t,y-\tau)-4f(x,y)|\le$$

$$\le 4\Big[\omega_1(|t|)+\omega_2(|t|)\Big], \tag{3.22}$$

а через $H^{\omega}_{2,\rho_1}(Q)$ и $H^{\omega}_{2,\rho_2}(Q)$ обозначим класс функций $f(x,y)$, для которых левая часть неравенства (3.22) соответственно не превосходит в области Q выражений

$$4\omega\Big(\sqrt{t^2+\tau^2}\Big)\quad \text{и}\quad 4\omega\Big(|t|+|\tau|\Big).$$

Для этих классов функций справедлива

Теорема 3.2. *Среди всех кубатурных формул вида (2.3) наилучшей для классов $H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, $H^{\omega}_{2,\rho_1}(Q)$, $H^{\omega}_{2,\rho_2}(Q)$ является формула (3.1) с наилучшими коэффициентами $P^*=\{p^*_{ki}\}_{k,i=0}^{m,n}$, определяемыми равенствами (3.2). При этом точная оценка погрешности формулы (3.1) на указанных классах функций равна*

$$\mathcal{E}_{mn}\Big(H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)\Big)=\mathcal{E}_{mn}\Big(H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\Big), \tag{3.23}$$

$$\mathcal{E}_{mn}\Big(H^{\omega}_{2,\rho_1}(Q)\Big)=\mathcal{E}_{mn}\Big(H^{\omega}_{\rho_1}(Q)\Big), \tag{3.24}$$

$$\mathcal{E}_{mn}\Big(H^{\omega}_{2,\rho_2}(Q)\Big)=\mathcal{E}_{mn}\Big(H^{\omega}_{\rho_2}(Q)\Big), \tag{3.25}$$

где значения правых частей (3.23)–(3.25) определены соответственно равенствами (3.3)–(3.5).

Доказательство. Равенства (3.23)–(3.25) доказываются по одной и той же схеме, поэтому, не умаляя общности, докажем равенство (3.23). Непосредственная проверка показывает, что для кубатурной формулы, заданной коэффициентами (3.2) и узлами

$$x_k^* = a + kh \;\; (k = 0, 1, \ldots, m), \quad h = (b-a)/m,$$

$$y_i^* = c + iq \;\; (i = 0, 1, \ldots, \; n), \quad q = (d-c)/n,$$

погрешность формулы представима в виде

$$R_{mn}(f; X^*, Y^*, P^*) =$$

$$= \frac{1}{4} \iint\limits_{(Q^*)} \Big[f(a \pm x, c \pm y) - f(a,c) \Big] dxdy + \frac{1}{4} \iint\limits_{(Q^*)} \Big[f(a \pm x, d \pm y) - f(a,d) \Big] dxdy +$$

$$+ \frac{1}{4} \iint\limits_{(Q^*)} \Big[f(b \pm x, c \pm y) - f(b,c) \Big] dxdy + \frac{1}{4} \iint\limits_{(Q^*)} \Big[f(b \pm x, d \pm y) - f(b,d) \Big] dxdy +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \iint\limits_{(Q^*)} \Big[f(x_k^* \pm x, c \pm y) - f(x_k^*, c) \Big] dxdy + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \iint\limits_{(Q^*)} \Big[f(x_k^* \pm x, d \pm y) - f(x_k^*, d) \Big] dxdy +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \iint\limits_{(Q^*)} \Big[f(a \pm x, y_i^* \pm y) - f(a, y_i^*) \Big] dxdy + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \iint\limits_{(Q^*)} \Big[f(b \pm x, y_i^* \pm y) - f(b, y_i^*) \Big] dxdy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} \iint\limits_{(Q^*)} \Big[f(x_k^* \pm x, y_i^* \pm y) - f(x_k^*, y_i^*) \Big] dxdy, \tag{3.26}$$

где $Q^* = [-h/2, h/2] \times [-q/2, q, 2]$.

Оценивая по абсолютной величине равенство (3.26) и учитывая определения класса $H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, после выполнении простых вычислений приходим к неравенству

$$|R_{mn}(f; X^*, Y^*, P^*)| \leq$$

$$\leq 2 \left(q \int\limits_0^{h/2} \omega_1(t)dt + h \int\limits_0^{q/2} \omega_2(\tau)d\tau \right) + 2(m-1) \left(q \int\limits_0^{h/2} \omega_1(t)dt + h \int\limits_0^{q/2} \omega_2(\tau)d\tau \right) +$$

$$+2(n-1) \left(q \int\limits_0^{h/2} \omega_1(t)dt + h \int\limits_0^{q/2} \omega_2(\tau)d\tau \right) + 2(m-1)(n-1) \left(q \int\limits_0^{h/2} \omega_1(t)dt + h \int\limits_0^{q/2} \omega_2(\tau)d\tau \right) =$$

$$= 2mn \left(q \int\limits_0^{h/2} \omega_1(t)dt + h \int\limits_0^{q/2} \omega_2(\tau)d\tau \right) := \mathcal{E}_{mn}\Big(H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\Big). \tag{3.27}$$

Из (3.27) сразу следует оценка сверху

$$\mathcal{E}_{mn}\Big(H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)\Big) \leq \mathcal{E}_{mn}\Big(H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\Big). \tag{3.28}$$

Противоположное неравенство

$$\mathcal{E}_{mn}\Big(H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q)\Big) \geq \mathcal{E}_{mn}\Big(H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\Big) \tag{3.29}$$

получаем из включения $H_2^{\omega_1,\omega_2}(Q) \supset H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$. Сопоставляя неравенств (3.28) и (3.29) получаем требуемое равенство (3.23). С помощью аналогичных рассуждений легко убедиться в справедливости равенств (3.24) и (3.25).

Замечание. Утверждение теоремы 3.1 тривиальным образом переносится на случай функций любого числа переменных. В одномерном случае это означает, что если заранее зафиксировать в качестве узлов концы отрезка $x_0 = a$, $x_n = b$, а узлы $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и коэффициенты p_0, $p_1, \ldots, p_n$ выбрать оптимальным образом, то наилучшей квадратурной формулой типа Маркова

$$\int\limits_a^b f(x)dx = p_0 f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(x_k) + p_n f(b) + R_n(f)$$

для класса $H^\omega[a,b]$ функций $f(x)$, таких, для которых выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \leq \omega(|x' - x''|),\ x', x'' \in [a,b],$$

является формула трапеций

$$\int\limits_a^b f(x)dx = h\left\{\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right\} + R_n(f), \tag{3.30}$$

где, по-прежнему, $h = (b-a)/n$. При этом оценка погрешности формулы (3.30) на всём классе $H^\omega[a,b]$ равна

$$\mathcal{E}_n(H^\omega[a,b]) = 2n \int\limits_0^{h/2} \omega(t)dt.$$

В частности, для класса Гёльдера, когда $\omega(t) = Kt^\alpha, K > 0, 0 < \alpha \leq 1$, имеем:

$$\mathcal{E}_n(KH^\alpha[a,b]) = \frac{K(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

Список литературы

1. Никольский С.М. Квадратурные формулы. М.: Наука, 1988. (English transl.: Nikol'skiĭ S.M. Quadrature formulas. Moskva: Nauka, 1988.)

2. Корнейчук Н.П. Наилучшие кубатурные формулы для классов функций многих переменных // Математические заметки. 1968. Т. 3, №5. С. 565–576. (English transl.: Korneĭchuk N.P. Best cubature formulas for certain classes of functions of several variables // Matematicheskie Zametki. 1968. V. 3, №5. P. 565–576.)

3. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. (Korneĭchuk N.P. Exact Constants in Approximation Theory. Moskva: Nauka, 1987; English transl. in Encyclopedia Math. Appl., V. 38, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.)

On an Optimal Quadrature Formula for Classes of Functions Given by Modulus of Continuity

Shabozov M.Sh.

A. Juraev Institute of mathematics, Academy of Sciences of the Republic Tajikistan
Aĭni Street, 299/4, Dushanbe city, 734063, Tajikistan

Keywords: optimal formulas, extremal problem, formula of Markov type, modulus of continuity, notes and coefficients, error estimate

The problem of minimizing the error of a cubature formula on the classes of functions given by modulus of continuity for cubature formulas with fixed nodes on the boundary of gird rectangular localization domain of nodes is considered. We give the exact solution of this problem on the wide classes of functions of two variables.

It was previously shown by N.P. Korneychuk that if the boundary nodes of a rectangular lattice $Q_{ki} = \{x_{k-1} \le x \le x_k,\, y_{i-1} \le y \le y_i\}$ are not included in the number of nodes cubature formula

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ki} f(x_k, y_i) + R_{mn}(f), \tag{1}$$

the formula of average rectangles is the best for classes of functions $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, $H^{\omega}_{\rho_1}(Q)$ and $H^{\omega}_{\rho_2}(Q)$ among all quadrature formulas of the form (1).

It is proved that if into the number of nodes in the formula (1) all boundary nodes (such formulas are called Markov-type) are added, then for these classes of functions the best formula is trapezoids. The exact errors for all classes of functions are calculated.

Сведения об авторе:
Шабозов Мирганд Шабозович,
Институт математики АН Республики Таджикистан им. А. Джураева,
доктор физ.-мат. наук, академик АН Республики Таджикистан, профессор