Модел. и анализ информ. систем. Т.**14**, №**2** (2007) 27–29

УДК 517.929.4

Устойчивость одной модели нейрона на основе уравнения с запаздыванием

Богомолов Ю. В.
Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14,
e-mail: yurik232@mail.ru,

получена 24 мая 2007

Аннотация

Проводится анализ решения дифференциального уравнения с запаздыванием, описывающего динамику нейрона-автогенератора. Рассмотрен вопрос устойчивости периодического решения уравнения при определенных значениях параметров.

Введение

В настоящее время рассматривается большое количество моделей искусственных нейронных сетей, имитирующих свойства и структуру мозга и нервной системы. Ограниченный мембраной биологический нейрон (нервная клетка) состоит из центральной части (тела) и отходящих от него отростков (дендритов и древовидного аксона). Динамика нейрона характеризуется мембранным потенциалом (разностью потенциалов между поверхностями мембраны нейрона), который характеризует состояние нейрона. Нейрон, возможно, под влиянием внешнего воздействия, способен к генерации высокоамплитудного импульса короткой продолжительности (спайка). Сгенерированный импульс распространяется по аксону и его ответвлениям и через особого рода контакты (синапсы) воздействует на другие нейроны, вызывая в нем процессы возбуждения или торможения.

С учетом биологических данных о функционировании биологического нейрона, в работе [1] предложена импульсная модель нейрона-автогенератора, основанная на дифференциальном уравнении с отклоняющимся аргументом. Ранее было показано существование периодического решения уравнения, описывающего динамику нейрона.

В работе проводится аналитическое доказательство устойчивости периодического решения соответствующего уравнения при некоторых значениях параметра, а также численный анализ динамики нейрона.

Математическая модель

Рассматриваемая модель нейрона построена на основе анализа калиевого и натриевого токов [1]. Мембранный потенциал нейрона описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{u}(t) = \lambda\left(-1 - f_{Na}(u(t)) + f_K(u(t-1))\right)u(t). \tag{1}$$

Здесь $u(t)$ — мембранный потенциал нейрона. За единицу времени принята величина запаздывания калиевого тока по отношению к натриевому. Функции f_{Na} и f_K описывают состояние натриевых и калиевых каналов соответственно, параметр λ характеризует скорость восстановления мембранного потенциала.

Предполагается, что f_{Na} и f_K — достаточно гладкие положительные функции, сходящиеся к 0 при $u \to \infty$ быстрее, чем $u^{-(1+\gamma)}$ (здесь γ — положительный параметр).

Также будем считать, что выполняется следующее условие:

$$\alpha = f_K(0) - f_{Na}(0) - 1 > 0.$$

Данное условие гарантирует, что сильно поляризованная мембрана имеет тенденцию к деполяризации. Дополнительно предполагаем, что

$$\alpha_1 = f_K(0) - 1 > 1.$$

Анализ устойчивости модели

При аналитическом исследовании устойчивости будем предполагать, что параметр $\lambda \gg 1$ (при малых значениях параметра λ также проведен численный анализ динамики нейрона).

Пусть $C[-1,0]$ — пространство непрерывных на $[-1,0]$ функций, $S \subset C[-1,0]$ — подмножество функций $\varphi(x)$ таких, что $0 < \varphi(s) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}\exp\dfrac{\lambda\alpha}{2}s$ (при $s \in [-1,0]$).

Обозначим через $u_\varphi(t)$ решение уравнения (1) с начальным условием $u_\varphi(s) \equiv \varphi(s)$ (при $s \in [-1, 0]$). В [2] показано, что при выполнении данных условий существует функция $\varphi_0(s) \in S$ и положительное число T, такие, что $u_{\varphi_0}(s+T) \equiv \varphi_0(s)$ (при $s \in [-1, 0]$), то есть существует периодическое решение уравнения (1).

В дальнейшем будем обозначать периодическое решение уравнения, описывающего динамику нейрона, как $u(t)$. В работе анализируется устойчивость данного решения.

Линеаризуем уравнение (1) на решении $u(t)$ (при этом представляем решение в виде $u(t)+v(t)$, отбрасывая нелинейные по $v(t)$ слагаемые). В результате уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\dot{v} = \lambda\left(-f'_{Na}(u)uv + f'_K(u(t-1))uv(t-1)\right) + \frac{\dot{u}}{u}v. \tag{2}$$

С помощью замены $v = uz$ получаем следующее уравнение:

$$\dot{z} = \lambda\left(-f'_{Na}(u)uz + f'_K(u(t-1))u(t-1)z(t-1)\right). \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет периодическое решение:

$$z = \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} \tag{4}$$

(с точностью до множителя). Докажем, что имеет место следующее утверждение:

Теорема. *Любое решение $z(t)$ уравнения (3) сходится при $t \to \infty$ к одному из периодических решений уравнения (4).*

Для доказательства данной теоремы перепишем с использованием формулы Лагранжа уравнение (3) в интегральном виде

$$\begin{gathered} z(t) = \exp\left(-\lambda\int_0^t f'_{Na}(u(s))u'(s)ds\right)z(0)+ \\ +\lambda\int_0^t \exp\left(-\lambda\int_\tau^t f'_{Na}(u(s))u'(s)ds\right)f'_K(u(\tau-1))u(\tau-1)z(\tau-1)d\tau. \end{gathered} \tag{5}$$

Для доказательства основного утверждения последовательно доказываются следующие леммы:

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$1 \leqslant \exp\left(\int_0^T f'_{Na}(u(s))u'(s)ds\right) \leqslant C,$$

где константа C не зависит от параметра λ, а T – период $u(t)$.

Оценка снизу вытекает из характера поведения функции f_{Na} (монотонная сходимость к 0), оценка сверху несложным образом получается интегрированием показателя экспоненты по частям.

При этом заметим, что лемма 1 допускает очевидное обобщение: для всех $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$ справедлива оценка

$$1 \leqslant \exp\left(\int_\tau^t f'_{Na}(u(s))u'(s)ds\right) \leqslant C.$$

Лемма 2. *Пусть начальная функция $z_0(s) \in C[-1, 0]$ для уравнения (3) (а следовательно, и для уравнения (5)) такова, что $z_0(0) = 0$. Тогда для решения уравнения (5) справедлива следующая оценка:*

$$\|z(s+t)\|_{C[-1,0]} \leqslant \frac{1}{\lambda}C_1\|z_0(s)\|_{C[-1,0]}.$$

Справедливость утверждения леммы 2 показывается методом шагов с привлечением леммы 1 и асимптотики периодического решения.

Дальнейшая схема доказательства выглядит следующим образом: произвольную начальную функцию $z_0(s) \in C[-1, 0]$ представляем в виде

$$z_0(s) = z_0(0)\frac{\dot{u}(s)}{u(s)}\frac{u(0)}{\dot{u}(0)} + \left(z_0(s) - z_0(0)\frac{\dot{u}(s)}{u(s)}\frac{u(0)}{\dot{u}(0)}\right), \tag{6}$$

то есть $z_0(s) = z_0^1(s) + z_0^2(s)$, где $z_0^1(s)$ и $z_0^2(s)$ – первое и второе слагаемое данного представления. В силу линейности уравнения (5) и периодичности его решения $\dfrac{\dot{u}(t)}{u(t)}$, получаем

$$z_0(s+T) = z_0(0)\frac{\dot{u}(s)}{u(s)}\frac{u(0)}{\dot{u}(0)} + z_1^2(s),$$

где в силу леммы 2 справедлива оценка

$$\left\|z_1^2(s+T)\right\|_{C[-1,0]} \leqslant \frac{1}{\lambda}C_1 \left\|z_0(s)\right\|_{C[-1,0]} .$$

Норма $\left\|z_0^2(s)\right\|$ оценивается через $\|z_0(s)\|$ из представления (6). Слагаемое $z_0^1(s)$ представляется по формуле (6), в которой первое слагаемое изменится на $\dfrac{1}{\lambda}C_1 \|z_0(s)\|$.

Применяя тот же подход, получим следующее представление:

$$z_0(s+2T) = \frac{\dot{u}(s)}{u(s)}\left(\frac{u(0)}{\dot{u}(0)}z_0(0) + \frac{C_1}{\lambda}\right) + z_2^2(s),$$

где $\left\|z_2^2(s)\right\|_{C[-1,0]} \leqslant \dfrac{1}{\lambda^2}C_2 \|z_0(s)\|_{C[-1,0]}$.

Аналогично (по индукции) устанавливается, что на k-м шаге имеем

$$z_0(s+kT) = \frac{\dot{u}(s)}{u(s)}\left(\frac{u(0)}{\dot{u}(0)}z_0(0) + \frac{C_1}{\lambda} + \cdots + \frac{C_k}{\lambda^k}\right) + z_k^2(s), \tag{7}$$

где $\left\|z_k^2(s)\right\|_{C[-1,0]} \leqslant \dfrac{1}{\lambda^k}C_k \|z_0(s)\|_{C[-1,0]}$.

Сходимость содержащейся в (7) последовательности частичных сумм (при больших значениях λ) влечет фактически справедливость утверждения доказываемой теоремы.

Таким образом, нами установлено, что каждое решение $z(t)$ уравнения (3) сходится при $t \to \infty$ к одному из его периодических решений $\dfrac{\dot{u}(t)}{u(t)}$. Тогда по теореме Андронова (см., например, [3]) периодическое решение исходного уравнения (1) орбитально экспоненциально устойчиво. Доказанная теорема означает, что уравнение (3) имеет единственный простой мультипликатор, равный 1 (остальные мультипликаторы меньше 1).

Результаты проведенного анализа подтверждают устойчивость периодического решения дифференциального уравнения с запаздыванием (при больших значениях параметра λ), описывающего динамику рассматриваемой модели нейрона-автогенератора, что является аналитическим подтверждением результатов, полученных ранее в ходе вычислительного эксперимента.

Список литературы

1. *Майоров, В.В.* Математическое моделирование нейронов на основе уравнений с запаздыванием / *В.В. Майоров, И.Ю. Мышкин* // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 2, № 11. — С. 64 – 76.

2. *Кащенко, С.А.* Исследование дифференциально-разностных уравнений, моделирующих импульсную активность нейрона / *С.А. Кащенко, В.В. Майоров* // Математическое моделирование. — 1993. — Т. 5, № 12. — С. 13 – 25.

3. *Демидович, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / *Б.П. Демидович* М.: Наука, 1967. — 472 с.

Stability of the Neuron Model Based on the Equation with Delay

Bogomolov Yu.V.

We analyze the periodical solution of a differential equation with delay describing the neuron-autogenerator dynamics. The stability of the periodical solution of the equation with certain parameters is investigated.