

УДК 541.1

Устойчивый колебательный режим в нейронной сети обобщенных нейронных автоматов-детекторов

Коновалов Е. В.

Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14,
e-mail: kinnarts@mail.ru,

получена 17 мая 2007

Аннотация

Рассматривается новая модель нейронного элемента — обобщенный нейронный автомат (ОНА). Эта модель носит универсальный характер, объединяет свойства нейрона-пейсмекера и нейрона-детектора. На основе ОНА-детекторов формируется нейронная сеть. Исследуется один из возможных колебательных режимов, доказывається его устойчивость.

Важным вопросом при моделировании нейронных сетей является выбор модели элементарной частицы. Свойства конкретной модели такой элементарной частицы в значительной степени определяют и свойства нейронной сети, сформированной из этих частиц. С этой точки зрения большинство моделей нейронных сетей может быть разделено на два класса. К одному из них относятся сети, элементы которых не способны к авторитмичности (нейроны-детекторы). При этом сеть в целом обладает способностью функционировать в колебательном режиме за счет взаимодействия отдельных нейронов или нейронных ансамблей. Примерами таких сетей являются сеть Винера [1], сети из интегративно-пороговых нейронов [2], сети из W-нейронов [3] и др. Другой класс образуют нейронные сети, состоящие из элементов, обладающих авторитмичностью (нейроны-пейсмекеры). К этому классу относятся сети на основе моделей Ходжкина-Хаксли [4], феноменологических моделей Хиндмарша-Роуза [5], ФитцХью-Нагумо [6],[7] и др., всевозможные осцилляторные сети [8], в том числе на основе популярной модели Вилсона-Коуэна [9]. К этому же классу относятся сети нейронных клеточных автоматов — нейронных элементов, впервые введенных в [10]. Как показывают биологические исследования, нервные клетки обоих типов присутствуют в биологических нейронных сетях, в том числе — в человеческом мозге.

В настоящей работе исследуется новая модель обобщенного нейронного автомата (ОНА), впервые предложенная авторами в [11]. Данная модель носит обобщающий характер, объединяя в себе как свойства нейронов-детекторов, так и свойства нейронов-пейсмекеров. Состояние обобщенного нейронного автомата в момент времени t характеризуется двумя функциями: $u(t)$ — функцией мембранного потенциала и $p(t)$ — функцией порогового значения мембранного потенциала. Если в некоторый момент времени t_0 : $u(t_0) = p$, то ОНА генерирует выходной сигнал — мгновенный импульс, который передается всем автоматам, связанным с данным автоматом. После генерации импульса нейронный элемент на время T_R переходит в рефрактерное состояние (состояние абсолютной невосприимчивости к воздействию со стороны других автоматов). В течение рефрактерного периода значение мембранного потенциала равно u_0 . В данной работе функция порогового значения считается равной константе: $p(t) = p$, а значение мембранного потенциала в течение рефрактерного периода равно нулю: $u_0 = 0$.

После выхода автомата из рефрактерного состояния (в момент времени $t_0 + T_R$) и до генерации импульса функция мембранного потенциала $u(t)$ описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{u} = \alpha(r - u), \quad (1)$$

где r — равновесное значение, $\alpha > 0$.

Если в какой-то момент времени $t^* > t_0 + T_R$ на синапс ОНА-приемника поступил импульс от другого автомата, то, начиная с этого момента времени, функция мембранного потенциала автомата-приемника $u(t)$ описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{u} = \alpha(r + q - u), \quad (2)$$

где $q > 0$ — синаптический вес соответствующей связи.

Формально определенная динамика мембранного потенциала ОНА соответствует развитию потенциала биологического нейрона. Она согласуется с базовой нейронной моделью [12].

Важно отметить, что все исследованные модели нейронных элементов относились либо к нейронам-пейсмейкерам, либо к нейронам-детекторам. Обобщенный нейронный автомат в зависимости от выбранных параметров может вести себя и как нейрон-детектор, и как нейрон-пейсмейкер. А именно, если $p < r$, то ОНА будет вести себя как нейрон-пейсмейкер, то есть без внешнего воздействия будет периодически генерировать импульсы через промежуток времени T_A , определяемый из соотношения:

$$e^{-\alpha(T_A - T_R)} = \frac{r - p}{r}.$$

Если $p > r$, то ОНА будет вести себя как нейрон-детектор. В работе [11] был подробно рассмотрен случай нейрона-пейсмейкера. В данной работе будет исследовано поведение обобщенного нейронного автомата в случае нейрона-детектора.

Для проверки работоспособности предложенной модели рассмотрим нейронную сеть, представляющую собой кольцо из N обобщенных нейронных автоматов (с номерами $1, \dots, N$). Пусть в такой сети существуют синаптические связи, ведущие от автомата с номером i к автомату с номером $i + 1$. Вес таких однонаправленных связей обозначим как $q_{i,i+1}$ ($i = 1, \dots, N - 1$). Автомат с номером N соединен с первым автоматом кольца однонаправленной связью с весом $q_{N,1}$. Первый автомат кольца обладает ведущей к нему извне связью с весом $q_{N,1}$. Поскольку для рассматриваемой модели ОНА выполняется неравенство $p > r$, то автоматы кольца не способны к самостоятельной генерации импульсов. Величины их мембранных потенциалов, в соответствии с уравнением (??), с течением времени экспоненциально приближаются к равновесному значению r . Для возникновения в предложенной сети нейронной активности необходимо однократное воздействие извне. Будем считать, что в момент времени $t_0 = 0$ на первый автомат кольца поступило такое воздействие по внешней связи. Пусть такое воздействие достаточно сильное, и веса связей внутри кольца достаточно велики, а именно

$$\begin{cases} q_{N,1} > p - r \\ q_{i,i+1} > p - r \end{cases}, \quad (3)$$

при всех $i = 1, \dots, N - 1$.

При выполнении этих условий в предложенной сети возникает волна нейронной активности. Этот волновой процесс распространяется по кольцу в направлении возрастания номеров так, что i -й автомат воздействует на $(i + 1)$ -й. В свою очередь, автомат с номером N воздействует на первый автомат кольца, поэтому нет дальнейшей необходимости в воздействии извне. Пусть t_i^k — момент k -го импульса i -го ОНА. Величины t_i^k упорядочены следующим образом:

$$t_0 < t_1^1 < t_2^1 < \dots < t_N^1 < t_1^2 < t_2^2 < \dots$$

Последовательность прохождения импульсов по кольцу (от 1-го автомата к N -му автомату) будем называть тактом прохождения волны. Введем обозначения для временных рассогласований ξ_i, ξ'_i между импульсами i -го и $(i - 1)$ -го автоматов ($i = 1, \dots, N$) на первом и втором тактах прохождения волны. Положим

$$\xi_i = \begin{cases} t_1^1 - t_0, & \text{если } i = 1 \\ t_i^1 - t_{i-1}^1, & \text{если } i \neq 1 \end{cases},$$

$$\xi'_i = \begin{cases} t_1^2 - t_N^1, & \text{если } i = 1 \\ t_i^2 - t_{i-1}^2, & \text{если } i \neq 1 \end{cases}.$$

Обозначим T_i^j — промежуток времени между j -м импульсом i -го автомата и $(j + 1)$ -м импульсом $(i - 1)$ -го автомата, то есть

$$T_i^j = \begin{cases} t_N^j - t_i^j, & \text{если } i = 1 \\ t_{i-1}^{j+1} - t_i^j, & \text{если } i > 1 \end{cases}.$$

Для успешного распространения волны нейронной активности по предложенной сети необходимо, чтобы каждый ОНА успевал выйти из состояния рефрактерности к тому моменту, когда на него начнет оказывать воздействие предыдущий ОНА на следующем такте волны, то есть неравенства

$$T_i^j > T_R \quad (4)$$

должны выполняться при всех $i = 1, \dots, N$; $j \geq 1$.

Пусть выполнено условие (??), а условие (??) выполняется для первого такта волны (то есть $T_i^1 > T_R$ при всех $i = 1, \dots, N$). Рассмотрим поведение первого автомата кольца на промежутке времени $[t_N^1 < t < t_1^2]$. Решая дифференциальное уравнение (??), получаем, что функция мембранного потенциала первого автомата $u_1(t)$ на данном промежутке имеет вид

$$u_1(t) = r + q_{N,1} + \exp(-\alpha(t - t_N^1)) [u_1(t_N^1) - r - q_{N,1}].$$

Подставляем в это равенство выражение для $u_1(t_N^1)$, полученное из уравнения (??):

$$u_1(t_N^1) = r - r \exp(-\alpha(t_N^1 - \xi_1 - T_R)).$$

Получаем:

$$u_1(t) = r + q_{N,1} + \exp(-\alpha(t - t_N^1)) [-r \exp(-\alpha(t_N^1 - \xi_1 - T_R)) - q_{N,1}].$$

Приравниваем $u_1(t_N^1 + \xi_1') = p$ (момент генерации импульса), с учетом того, что $t_N^1 - \xi_1 = \sum_{i=2}^N \xi_i$.

$$\exp(-\alpha(t_N^1 + \xi_1' - t_N^1)) [-r \exp(-\alpha(\sum_{i=2}^N \xi_i - T_R)) - q_{N,1}] = p - r - q_{N,1}.$$

Аналогично выписываются уравнения для остальных ОНА кольца. Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} e^{-\alpha\xi_1'} [r \exp(-\alpha(\sum_{i=2}^N \xi_i - T_R)) + q_{N,1}] = r + q_{N,1} - p \\ e^{-\alpha\xi_k'} [r \exp(-\alpha(\sum_{i=1}^{k-1} \xi_i' + \sum_{i=k+1}^N \xi_i - T_R)) + q_{k-1,k}] = r + q_{k-1,k} - p \\ e^{-\alpha\xi_N'} [r \exp(-\alpha(\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i' - T_R)) + q_{N-1,N}] = r + q_{N-1,N} - p \end{cases} \quad (5)$$

Важным вопросом при изучении нейронной сети является исследование волн нейронной активности и доказательство их устойчивости. Покажем, что в предложенной сети существует, по крайней мере, один такой устойчивый колебательный режим, а именно тот, при котором автоматы циклически генерируют импульсы в порядке возрастания их номеров.

Выберем положительные числа $\xi_1^0, \dots, \xi_N^0$ так, что

$$\sum_{i=1}^N \xi_i^0 - \xi_k^0 > T_R$$

для всех $k = 1, \dots, N$.

Распорядимся синаптическими весами так, чтобы отображение (??) имело неподвижную точку $\bar{\xi}^0 = \xi_1^0, \dots, \xi_N^0$. Для этого рассмотрим первое уравнение системы (??) и подставим в него предельные рассогласования ξ_i^0 :

$$e^{-\alpha\xi_1^0} [r \exp(-\alpha(\sum_{i=2}^N \xi_i^0 - T_R)) + q_{N,1}] = r + q_{N,1} - p,$$

$$q_{N,1} e^{-\alpha\xi_1^0} - q_{N,1} = r - p - r e^{-\alpha\xi_1^0} \exp(-\alpha(\sum_{i=2}^N \xi_i^0 - T_R)),$$

$$q_{N,1} = \frac{1}{e^{-\alpha\xi_1^0} - 1} [r - p - r \exp(-\alpha(\sum_{i=1}^N \xi_i^0 - T_R))]. \quad (6)$$

Аналогично выражаем через предельные рассогласования синаптические веса $q_{1,2}, \dots, q_{N-1,N}$ из остальных уравнений системы (??):

$$q_{k-1,k} = \frac{1}{e^{-\alpha\xi_k^0} - 1} \left[r - p - r \exp \left(-\alpha \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^0 - T_R \right) \right) \right], \quad (7)$$

$$q_{N-1,N} = \frac{1}{e^{-\alpha\xi_N^0} - 1} \left[r - p - r \exp \left(-\alpha \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^0 - T_R \right) \right) \right]. \quad (8)$$

Исследуем вопрос об устойчивости неподвижной точки $\bar{\xi}^0$. Для этого вновь рассмотрим первое уравнение системы (??) в следующем виде:

$$r \exp \left(-\alpha \left(\sum_{i=2}^N \xi_i - T_R \right) \right) + q_{N,1} = (r + q_{N,1} - p) e^{\alpha\xi_1'}.$$

Представим рассогласования ξ_i и ξ_i' ($i = 1, \dots, N$) следующим образом: $\xi_i = \xi_i^0 + \eta_i$ и $\xi_i' = \xi_i^0 + \eta_i'$, где ξ_i^0 — предельные рассогласования, $|\eta_i| < 1$, $|\eta_i'| < 1$.

Получаем

$$r \exp \left(-\alpha \left(\sum_{i=2}^N (\xi_i^0 + \eta_i) - T_R \right) \right) + q_{N,1} = (r + q_{N,1} - p) e^{\alpha(\xi_1^0 + \eta_1')}.$$

Используем разложение Тейлора в точке $\bar{\xi}^0$ и опускаем слагаемые, содержащие все степени η_i и η_i' выше первой:

$$\exp \left(-\alpha \left(\sum_{i=2}^N (\xi_i^0 + \eta_i) - T_R \right) \right) = \left(1 - \alpha \sum_{i=2}^N \eta_i \right) \exp \left(-\alpha \left(\sum_{i=2}^N \xi_i^0 - T_R \right) \right),$$

$$e^{\alpha(\xi_1^0 + \eta_1')} = e^{\alpha\xi_1^0} (1 + \alpha\eta_1').$$

Таким образом, получаем

$$r \exp \left(-\alpha \left(\sum_{i=2}^N \xi_i^0 - T_R \right) \right) \left(1 - \alpha \sum_{i=2}^N \eta_i \right) + q_{N,1} = (r + q_{N,1} - p) e^{\alpha\xi_1^0} (1 + \alpha\eta_1').$$

Домножим обе части на $e^{-\alpha\xi_1^0}$

$$r \exp \left(-\alpha \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^0 - T_R \right) \right) \left(1 - \alpha \sum_{i=2}^N \eta_i \right) + q_{N,1} e^{-\alpha\xi_1^0} = (r + q_{N,1} - p) (1 + \alpha\eta_1'). \quad (9)$$

Из выражения (??), связывающего синаптический вес $q_{N,1}$ с предельными рассогласованиями ξ_i^0 , получаем

$$r \exp \left(-\alpha \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^0 - T_R \right) \right) = r - p - q_{N,1} (e^{-\alpha\xi_1^0} - 1). \quad (10)$$

Подставляем в формулу (??) выражение (??):

$$\left[r - p - q_{N,1} (e^{-\alpha\xi_1^0} - 1) \right] \left(1 - \alpha \sum_{i=2}^N \eta_i \right) + q_{N,1} e^{-\alpha\xi_1^0} = (r + q_{N,1} - p) (1 + \alpha\eta_1').$$

После раскрытия скобок и взаимного уничтожения слагаемых это уравнение приобретает следующий вид:

$$A_1 \eta_1' + \eta_2 + \dots + \eta_N = 0, \quad (11)$$

где $A_1 = (r + q_{N,1} - p) / (r + q_{N,1} - p - q_{N,1}e^{-\alpha\xi_1^0})$.

Аналогичные преобразования остальных $N-1$ уравнений системы (??) с использованием формул (??)–(??) приводят к уравнениям:

$$\eta'_1 + \dots + \eta'_{k-1} + A_k \eta'_k + \eta_{k+1} + \dots + \eta_N = 0, \quad (12)$$

где $A_k = (r + q_{k-1,k} - p) / (r + q_{k-1,k} - p - q_{k-1,k}e^{-\alpha\xi_k^0})$; $k = 2, \dots, N-1$,

$$\eta'_1 + \dots + \eta'_{N-1} + A_N \eta'_N = 0, \quad (13)$$

где $A_N = (r + q_{N-1,N} - p) / (r + q_{N-1,N} - p - q_{N-1,N}e^{-\alpha\xi_N^0})$.

Уравнения (??) – (??), объединенные в систему, задают следующее отображение:

$$\begin{cases} A_1 \eta'_1 + \eta_2 + \dots + \eta_N = 0 \\ \eta'_1 + \dots + \eta'_{k-1} + A_k \eta'_k + \eta_{k+1} + \dots + \eta_N = 0 \\ \eta'_1 + \dots + \eta'_{N-1} + A_N \eta'_N = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Матрица данного отображения имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & A_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & A_N \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Поскольку $q_{k-1,k} > 0$, то, с учетом условия (??), $A_i > 1$ при всех $i = 1, \dots, N$. Поэтому метод Зейделя [13] для положительно определенной матрицы A сходится в данном случае к нулю.

Покажем, что нелинейная часть отображения (??) не нарушит его сходимости к точке $\bar{\xi}^0$. Запишем общий вид нелинейного отображения для η, η' :

$$A\eta + \Phi(\eta, \eta') = 0,$$

где A — матрица линейной части, $\Phi(\eta, \eta')$ — оператор нелинейного отображения.

Поскольку матрица A линейного отображения (??) симметричная и положительно определенная, то из теоремы об условиях сходимости метода итерации [13] и леммы Адамара вытекает сходимость нелинейного отображения $A\eta + \Phi(\eta, \eta') = 0$. Тем самым доказана сходимость исходного отображения (??).

Таким образом, синаптическими весами связей между обобщенными нейронными автоматами можно распорядиться так, чтобы в предложенной сети (кольцо из N ОНА-детекторов) существовал устойчивый режим нейронной активности.

Список литературы

1. Винер, Н. Проведение импульсов в сердечной мышце / Н. Винер, А. Розенблюм // Кибернетический сборник. — 1961. — Т. 3. — С. 3 – 56.
2. Hopfield, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities / J. J. Hopfield // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1982. — V. 79, N. 8. — P. 2554 – 2558.
3. Майоров, В.В. Сообщение о сетях W-нейронов / В.В. Майоров, Г.В. Шабаршина // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1997. — Вып. 4. — С. 37 – 50.
4. Hodgkin, A. L. A quantitative description of membrane current and its applications to conduction and excitation in nerve / A.L. Hodgkin, A.F. Huxley // J. Physiol. (London). — 1952. — V. 117. P. 500 – 544.
5. Hindmarsh, J.L. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations / J.L. Hindmarsh, R.M. Rose // Proc. R. Soc. London Ser. B. — 1984. — V. 221. — P. 87 – 102.
6. FitzHugh, R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane / R. FitzHugh // Biophys. J. — 1961. — Vol. 1. — P. 445 – 466.

7. *Nagumo, J. S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon / *J. S. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa* // *Proc. Ire.* — 1962. — V. 50. — P. 2061 – 2070.
8. *Omata, S.* Entrainment among coupled limit cycle oscillator with frustration / *S. Omata, Y. Yamaguchi, H. Shimuzi* // *Physica D.* — 1988. — V. 31. — P. 397 – 408.
9. *Wilson, H. R.* Excitatory and Inhibitory Interactions in Localized Populations of Model Neurons / *H. R. Wilson, J.D. Cowan* // *Biophysical J.* — 1972. — V. 12. — P. 1 – 24.
10. *Шабаршина, Г.В.* Проведение возбуждения по кольцевой структуре нейронных клеточных автоматов / *Г.В. Шабаршина* // *Моделирование и анализ информационных систем.* Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1994. — Вып. 2. — С. 116 – 121.
11. *Майоров, В.В.* Обобщенный нейронный автомат в задаче распространения волны возбуждения по нейронной сети / *В.В. Майоров, Е.В. Коновалов* // IX Всероссийская научно-техническая конференция "Нейроинформатика-2007": Сборник научных трудов. Ч.3. М.: МИФИ, 2007. — С.182 – 188.
12. *Крюков, В.И.* Метастабильные и неустойчивые состояния в мозге / *В.И. Крюков и др.* — Препринт. — Пущино, НЦБИ АН СССР, 1986. — 112 с.
13. *Бахвалов, Н.С.* Численные методы / *Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков.* — М.: Наука, 1987. — 630 с.

The Stable Oscillatory Regime in a Neuron Net Consisting of Generalized Automatic Neuron-detectors

Konovalov E.V.

A new model of the neuron cell — the generalized automatic neuron (GAN) — is considered. This model has a universal character. It combines the properties of neuron-oscillator and neuron-detector. The neuron net is formed on the base of this GAN-detector. One of possible oscillatory regimes is investigated, and its stability is proved.