

УДК 517.929

Нормализация одного уравнения с запаздыванием и бифуркация, приводящая к циклу асимптотически большого периода

Глазков Д.В.¹

Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14

Аннотация

Методом нормальных форм исследуется локальная динамика скалярного дифференциального уравнения с запаздыванием в окрестности нулевого решения в случае, близком к критическому. В результате бифуркации коразмерности два происходит рождение цикла асимптотически большого периода.

В работе изучается математическая модель, основанная на следующем дифференциальном уравнении с запаздыванием [1]:

$$\frac{dy}{dt} = a[y - y(t-1) - f(y)]. \quad (1)$$

Рассмотрим два случая:

- $f(y) = y^n$, n — нечетное, $n \geq 3$;
- $f(y) = |y|y^{n-1} = \text{sign}(y)y^n$, n — четное, $n \geq 2$.

Таким образом, функция f всегда нечетна. Требование нечетности в данном случае обеспечивает ограниченность решений (1). Заметим, что в обеих ситуациях f допускает представление в виде $f(y) = |y|^{n-1}y$.

Устойчивость нулевого решения уравнения (1) определяется из соотношения

$$\lambda = a[1 - e^{-\lambda}].$$

Это характеристическое уравнение всегда имеет нулевое решение, которое при $a=1$ становится двукратным. Заметим также, что других корней на мнимой оси быть не может. Легко показать устойчивость нулевого решения при $0 \leq a < 1$ и неустойчивость для $a > 1$. При этом в правой комплексной полуплоскости располагается только один корень характеристического уравнения, и он действителен. Таким образом, $a=1$ есть бифуркационное значение параметра, связанное с потерей устойчивости нулевым решением.

Методом нормальных форм исследуем уравнение (1) в окрестности критического значения параметра $a=1+\varepsilon$. Выполним следующую замену переменных:

$$y = x_1 + x_2 + \varepsilon x_1 u_1 + \varepsilon x_2 u_2 + x_1^2 u_{20} + x_1 x_2 u_{11} + x_2^2 u_{02} + \dots \quad (2)$$

Здесь ε, x_1, x_2 считаем малыми величинами.

В силу кратности нулевого решения характеристического уравнения главная часть нормальной формы уравнения (1) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \varepsilon \alpha_1 x_1 + \varepsilon \alpha_2 x_2 - \Phi(x_1, x_2). \end{cases} \quad (3)$$

Отметим, что $\frac{dx_2}{dt} = o(1)$, то есть x_2 — медленно меняющаяся по времени t функция. Аналогичный вывод можно сделать и для x_1 . Кроме того, в силу (3) $x_2 = o(x_1)$.

Выполним подстановку (2), (3) в уравнение (1) и будем собирать слагаемые одного порядка малости. В результате получим некоторое число линейных дифференциальных уравнений, из условий разрешимости которых в классе ограниченных функций будут определены коэффициенты нормальной формы. В частности, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=2$, а функцию Φ оказывается удобно представить в виде

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^n \phi_k x_1^{n-k} x_2^k.$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП.2.1.1.630).

Отсюда, правда, без учета множителя $\text{sign}(y)=\text{sign}(x_1)$ в случае четного n , находим, что

$$\phi_k = 2 \left[C_n^k + \sum_{j=1}^k (-1)^j \frac{(n-k+1) \dots (n-k+j)}{j!(j+2)} \phi_{k-j} \right].$$

В частности, $\phi_0=2$ вне зависимости от n , а $\phi_1=\frac{2}{3}n > 0$.

Заметим, однако, что следующая запись функции Φ оказывается предпочтительнее:

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^n \varphi_k f^{(n-k)}(x_1) x_2^k,$$

поскольку в этом случае отпадает необходимость следить за модулями, и соответствующие коэффициенты определяются проще:

$$\varphi_k = 2 \left[\frac{1}{k!} + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{j!(j+2)} \varphi_{k-j} \right].$$

В частности, $\varphi_0=2$, а $\varphi_1=\frac{2}{3}$.

Выполним в системе (3) нормировки

$$x_1 = \varepsilon^{1/(n-1)} x, \quad s = \varepsilon^{1/2} t,$$

и выберем слагаемые, наибольшие по порядку малости. В результате замен перейдем к уравнению второго порядка относительно переменной x , где точками обозначается дифференцирование по «медленному» времени s :

$$\ddot{x} + 2\sqrt{\varepsilon} \left[\frac{1}{3} f'(x) - 1 \right] \dot{x} + 2f(x) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) является нормальной формой исходной задачи (1) при значениях параметра a больше критической величины $a=1$. Легко заметить неустойчивость нулевого решения обеих систем. Более того, для достаточно малых $\varepsilon < \varepsilon_*(n)$ локальная динамика уравнения (1) в окрестности нуля полностью определяется поведением построенной нормальной формы.

Отметим, что вне зависимости от вида функции f невозмущенное уравнение (4) при $\varepsilon=0$ записывается в виде

$$\ddot{x} = -2f(x). \quad (5)$$

Консервативная система (5) имеет множество негрубых циклов, которое разрушается при ее возмущении. Непосредственно из (5) можно получить уравнение для интегральных кривых, которое имеет вид

$$\dot{x} = 2\sqrt{C-F(x)}, \quad (6)$$

где $F'(x)=f(x)$, $F(0)=0$ для определенности, а C есть первый интеграл системы (5). Формально из (6) вытекает соотношение

$$s-s_0 = I_*(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dr}{\sqrt{C-F(r)}}, \quad (7)$$

которое, строго говоря, выполняется лишь на первом из тех промежутков, на которых функции f и F одновременно монотонны. Заметим, что полученный интеграл при $n \geq 2$ в элементарных функциях не выражается. Как легко понять, формально периодическое решение системы (5) удовлетворяет соотношению $x(s, C) = I_*^{-1}(s-s_0)$.

Возвращаясь к (4), подчеркнем, что $f(x)$ является нечетной функцией, а $f'(x)$ — четной. Таким образом, оказывается возможно провести аналогию между построенной нормальной формой и классическими уравнениями Ван-дер-Поля и Дуффинга. Справедливость проведенной параллели подтверждает следующая

Теорема. При $\varepsilon > 0$ уравнение (4) имеет единственное периодическое решение, асимптотически орбитально устойчивое при $s \rightarrow \infty$.

Доказательство. Существование устойчивого предельного цикла можно обосновать вторым методом Ляпунова по аналогии с соответствующим доказательством в [2] для уравнения Ван-дер-Поля. В этом случае (4) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{z} = -2f(x), \\ \dot{x} = z - 2\varepsilon^{1/2} \left[\frac{1}{3} f'(x) - x \right], \end{cases}$$

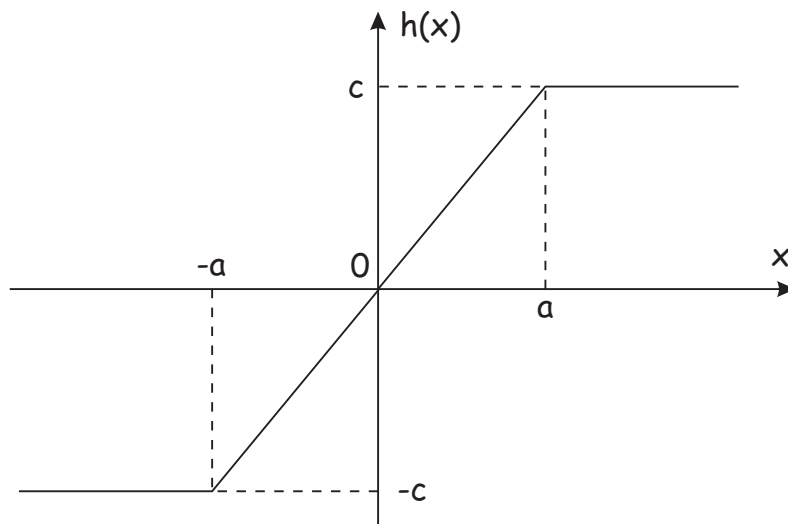


Рис. 1. График функции $h(x)$

а функции Ляпунова выбираются следующим образом:

$$v_1(x, z) = 4F(x) + z^2, \quad v_2(x, z) = 4F(x) + [z - h(x)]^2,$$

где $F'(x) = f(x)$, $F(0) = 0$, функция $h(x)$ (см. рис. 1) задается равенствами

$$h(x) = \begin{cases} -c, & \text{если } x \leq -a, \\ ca^{-1}x, & \text{если } -a < x < a, \\ c, & \text{если } x \geq a. \end{cases}$$

Здесь a и c — положительные константы. Вычислив соответствующие производные в силу системы, можем заключить, что все фазовые траектории рано или поздно попадают в двухсвязную кольцеобразную область $\{G: r^2 \leq x^2 + z^2 \leq R^2\}$. Поскольку единственное состояние равновесия $x = z = 0$ ей не принадлежит, то в области G существует, по крайней мере, один асимптотически орбитально устойчивый предельный цикл. Если принять во внимание вид функции f , то амплитуда A колебаний по x допускает оценку снизу $A > \sqrt[n-1]{3} > r$.

Для доказательства единственности предельного цикла воспользуемся методом Понтрягина [3, 4]. Отметим, что оно является конструктивным и позволяет определить ряд характеристик получаемого периодического решения. В соответствии с выбранным методом введем в рассмотрение функцию Понтрягина. В случае уравнения (4) она имеет вид

$$P(C) = \int_0^{T(C)} \left[\frac{2}{3} f'(x) - 2 \right] \dot{x}^2 ds,$$

где $x = x(s, C)$ — периодическое решение (4), $T(C)$ обозначен его период. Меняя переменную интегрирования, подставляя (6) и используя четность подынтегрального выражения по x , получим, что

$$P(C) = 16 \int_0^A \left[\frac{1}{3} f'(x) - 1 \right] \sqrt{C - F(x)} dx,$$

где $A = [(n+1)C]^{1/(n+1)}$. Отметим, что в силу положительной определенности x в подынтегральном выражении допустимо выполнить замены

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

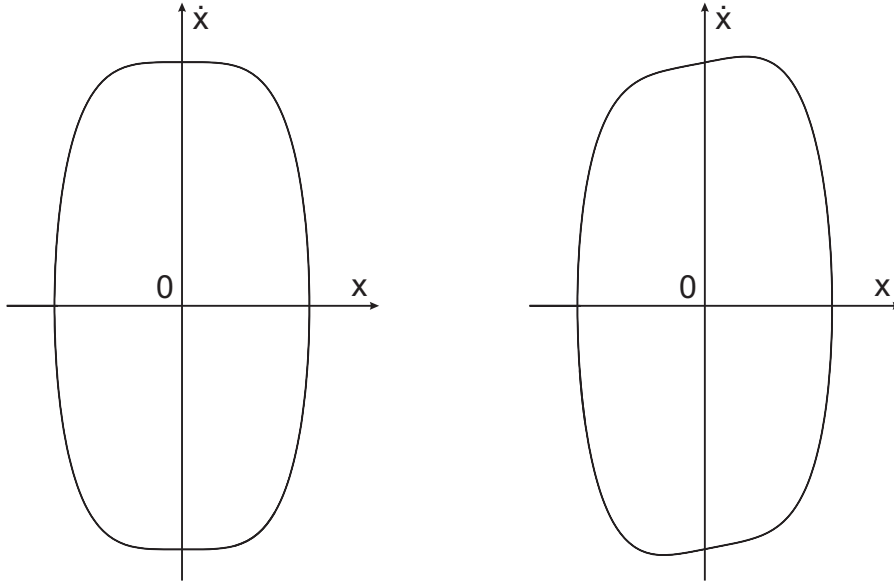


Рис. 2. Фазовый портрет нормальной формы (4) в случае $n=3$ при $\varepsilon=0$ и $\sqrt{\varepsilon}=0,1$. В качестве начальных условий невозмущенного уравнения выбраны значения $x=A$, $\dot{x}=0$

Условие существования предельного цикла у возмущенной системы состоит в выполнении равенства $P(C)=0$. В нашем случае оно может быть приведено к виду

$$\int_0^A \frac{n}{3} x^{n-1} \sqrt{C - \frac{x^{n+1}}{n+1}} dx = \int_0^A \sqrt{C - \frac{x^{n+1}}{n+1}} dx.$$

Заменой $x=A\xi$ это равенство преобразуется к соотношению

$$\frac{n}{3} A^{n-1} I_1 = I_2,$$

где по аналогии с [1] использованы обозначения

$$I_1 = \int_0^1 \xi^{n-1} \sqrt{1 - \xi^{n+1}} d\xi, \quad I_2 = \int_0^1 \sqrt{1 - \xi^{n+1}} d\xi.$$

Соответственно

$$A = \left[\frac{3 I_2}{n I_1} \right]^{1/(n-1)}.$$

Таким образом, $C_0=C(A)$ определяется единственным образом и, следовательно, у возмущенной системы (4) существует единственный предельный цикл. При этом, как несложно проверить, $A > \sqrt[n-1]{3}$.

Устойчивость найденного предельного цикла в рамках метода Понтрягина определяется знаком величины

$$P_1(C_0) = \int_0^{T(C_0)} \left[2 - \frac{2}{3} f'(x(t, C_0)) \right] ds.$$

В случае $P_1(C_0) < 0$ предельный цикл устойчив, а при $P_1(C_0) > 0$ — неустойчив.

Несложно заметить, что знак $P_1(C_0)$ совпадает со знаком выражения

$$I_4 - \frac{n}{3} A^{n-1} I_3,$$

где

$$I_3 = \int_0^1 \frac{\xi^{n-1} d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{n+1}}}, \quad I_4 = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{n+1}}},$$

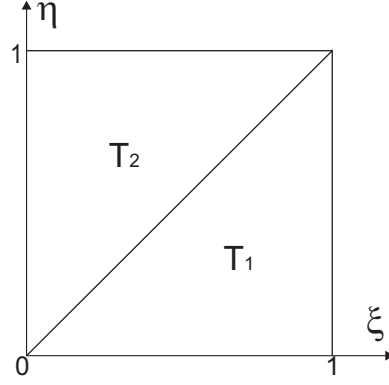


Рис. 3. Разбиение единичного квадрата K на два треугольника T_1 и T_2

или в силу $I_1 > 0$ со знаком величины $I_1 I_4 - I_2 I_3$. Оценив значение этого выражения, можем заключить, что найденный предельный цикл асимптотически устойчив.

В силу соотношения (7) период колебаний для $x=A$ в возмущенном уравнении (4) в первом приближении определяется следующим образом:

$$T(C_0) = 4 I_*(A) = 2 \sqrt{\frac{n+1}{A^{n-1}}} I_4.$$

Следовательно, в области G существует единственный устойчивый предельный цикл с указанными характеристиками. Он является единственным глобально устойчивым аттрактором уравнения (4) (см. рис. 2). \square

Лемма. $I_1 I_4 - I_2 I_3 < 0$ при $n \geq 2$.

Доказательство. Представим оцениваемое выражение в виде следующего двойного интеграла:

$$I_1 I_4 - I_2 I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \eta^{n-1} \left[\frac{\sqrt{1-\eta^{n+1}}}{\sqrt{1-\xi^{n+1}}} - \frac{\sqrt{1-\xi^{n+1}}}{\sqrt{1-\eta^{n+1}}} \right] d\xi d\eta.$$

Обозначим K единичный квадрат. Разобьем $K = T_1 \cup T_2$ на две области в зависимости от знака выражения $\xi - \eta$, как показано на рис. 3. Полученный двойной интеграл представляется в виде суммы

$$\int_0^1 \int_0^\xi \eta^{n-1} \left[\frac{\sqrt{1-\eta^{n+1}}}{\sqrt{1-\xi^{n+1}}} - \frac{\sqrt{1-\xi^{n+1}}}{\sqrt{1-\eta^{n+1}}} \right] d\eta d\xi + \int_0^1 \int_0^\eta \eta^{n-1} \left[\frac{\sqrt{1-\eta^{n+1}}}{\sqrt{1-\xi^{n+1}}} - \frac{\sqrt{1-\xi^{n+1}}}{\sqrt{1-\eta^{n+1}}} \right] d\xi d\eta.$$

Заменой переменных сведем первый интеграл по области T_1 к интегралу по области T_2 :

$$\int_0^1 \int_0^\eta \xi^{n-1} \left[\frac{\sqrt{1-\xi^{n+1}}}{\sqrt{1-\eta^{n+1}}} - \frac{\sqrt{1-\eta^{n+1}}}{\sqrt{1-\xi^{n+1}}} \right] d\xi d\eta + \int_0^1 \int_0^\eta \eta^{n-1} \left[\frac{\sqrt{1-\eta^{n+1}}}{\sqrt{1-\xi^{n+1}}} - \frac{\sqrt{1-\xi^{n+1}}}{\sqrt{1-\eta^{n+1}}} \right] d\xi d\eta.$$

Вновь объединяя два интеграла в один, получим, что

$$I_1 I_4 - I_2 I_3 = \int_0^1 \int_0^\eta [\eta^{n-1} - \xi^{n-1}] \left[\frac{\sqrt{1-\eta^{n+1}}}{\sqrt{1-\xi^{n+1}}} - \frac{\sqrt{1-\xi^{n+1}}}{\sqrt{1-\eta^{n+1}}} \right] d\xi d\eta.$$

Этот интеграл неположителен, поскольку, как несложно заметить, в треугольнике T_2 , где $\xi \leq \eta$,

$$\eta^{n-1} - \xi^{n-1} \geq 0, \quad \frac{\sqrt{1-\eta^{n+1}}}{\sqrt{1-\xi^{n+1}}} - \frac{\sqrt{1-\xi^{n+1}}}{\sqrt{1-\eta^{n+1}}} \leq 0.$$

Во внутренних точках области T_2 при $n \geq 2$ знаки обеих функций-сомножителей строгие, поэтому выражение $I_1 I_4 - I_2 I_3$ строго отрицательно. \square

Замечание 1. Утверждение теоремы можно также доказать, воспользовавшись теоремой и следствием из нее, которые сформулированы в [5].

Замечание 2. В случае $a < 1$ соответствующая нормальная форма имеет вид

$$\ddot{x} + 2\sqrt{\varepsilon} \left[\frac{1}{3}f'(x) + 1 \right] \dot{x} + 2f(x) = 0.$$

Легко заметить, что $\frac{1}{3}f'(x)+1 > 0$ при всех x . Используя критерий Бендиксона [2], несложно убедиться в отсутствии предельных циклов у этого уравнения. Следовательно, диссипативность влечет за собой глобальную устойчивость единственной особой точки $x=\dot{x}=0$.

Возвращаясь от переменных нормальной формы x и s к переменным исходной задачи y и t , можем сделать выводы относительно характеристик соответствующего периодического решения уравнения (1). Его амплитуда A_y при достаточно малых ε зависит от амплитуды колебаний периодического решения (4) как $A_y = \sqrt[3]{\varepsilon} A$, а период во времени t исходной задачи изменяется согласно закону $T_y = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} T(C_0)$. Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ амплитуда колебаний $A_y \rightarrow 0$, а период $T_y \rightarrow \infty$. Это хорошо согласуется с численно наблюдаемой динамикой уравнения (1).

Характеристики построенного предельного цикла отмечались в [1]. Однако в этой статье не исследовался вопрос о его устойчивости и не была получена в явном виде нормальная форма, которая бы содержала всю наиболее важную информацию о поведении решения исходного уравнения (1) для значений параметра, близких к критическому. Приведенное исследование является более полным. В частности, построенная нормальная форма модели изучена исчерпывающим образом.

Таким образом, нам удалось свести задачу исследования динамики сложного объекта — дифференциального уравнения с запаздыванием — к существенно более простой задаче исследования ОДУ второго порядка.

Автор благодарит С.А. Кащенко и С.Д. Глызина за постановку задачи, внимание к работе и полезные дискуссии.

Список литературы

1. Erneux, T. Bifurcation to large period oscillations in physical systems controlled by delay / T. Erneux, H.O. Walther // Phys. Rev. E 72. — 2005. — 066206: 1–5.
2. Горяченко, В.Д. Элементы теории колебаний: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд. / В.Д. Горяченко. — М.: Высш. шк., 2001. — 395 с.
3. Андронов, А.А. Теория колебаний. 2-е изд. / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. — М.: Физматгиз, 1959. — 926 с.
4. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. — М.: Наука, 1991. — 492 с.
5. Оболенский, А.Ю. Лекции по качественной теории дифференциальных уравнений / А.Ю. Оболенский. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. — 320 с.

Normalization of a Delay Differential Equation and Bifurcation Leading to an Asymptotically Large Period Cycle

Glazkov D.V.

We investigate local dynamics of a scalar delay differential equation in the vicinity of the zero solution. When an order parameter is close to the critical value, we use the normal forms method. An asymptotically large period cycle appears as the result of the codimension two bifurcation.