Модел. и анализ информ. систем. Т.**14**, №**2** (2007) 58–62

УДК 517.9

Динамические свойства уравнений первого порядка с большим запаздыванием

Кащенко И. С.
Ярославский государственный университет
e-mail: iliyask@uniyar.ac.ru

получена 18 мая 2007

Аннотация

Изучается локальная динамика дифференциального уравнения первого порядка с большим запаздыванием. Метод исследований основывается на методе нормальных форм. В критических случаях, которые имеют бесконечную размерность, построены эволюционные уравнения, играющие роль нормальных форм. Изучены различные случаи соотношения порядка отклонения коэффициентов от критических значений и порядка запаздывания.

1. Дифференциальные уравнения с запаздыванием служат математическими моделями для многих прикладных задач [1–4]. Среди них важное место занимают системы, в которых время запаздывания относительно велико. Для уравнений с запаздыванием характерно наличие многих специфических эффектов и явлений, обусловленных тем, что фазовое пространство является бесконечномерным.

Важно отметить, что задачи о локальной (т.е. в малой окрестности стационара) динамике сингулярно возмущенных систем могут быть достаточно сложными и специфичными. В настоящей работе развивается метод исследования локальной динамики в окрестности состояния равновесия, предложенный в [6–7].

Итак, мы будем изучать поведение решений в окрестности нулевого состояния равновесия дифференциально-разностного уравнения с запаздыванием

$$\frac{dx}{dt} + x = F(x(t-T))$$

при условии, что время запаздывания является достаточно большим, т.е.

$$T \gg 1.$$

Удобно через ε обозначить малый положительный параметр $\varepsilon = T^{-1} \ll 1$. В исходном уравнении произведем замену времени $t \to Tt$. В результате приходим к уравнению

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} + x = F(x(t-1)). \tag{1}$$

Считаем, что в окрестности нуля функция $F(x)$ обладает нужными свойствами гладкости, т.е. ее можно представить в виде

$$F(x) = ax + f_2x^2 + f_3x^3 + \,\ldots$$

Локальная динамика уравнения (1) во многом определяется линеаризованным в нуле уравнением

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} + x = ax(t-1), \tag{2}$$

а поведение решений (2), в свою очередь, зависит от расположения корней характеристического квазиполинома (см. [5])

$$\varepsilon\lambda + 1 = ae^{-\lambda}. \tag{3}$$

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. *Если $|a| > 1$, то существуют такие $M > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ квазиполином (3) имеет корень λ_0, удовлетворяющий $\operatorname{Re}\lambda_0 > M$.*

При этом нулевое решение уравнения (1) неустойчиво, более того, в некоторой его достаточно малой (но не зависящей от ε) окрестности устойчивых режимов быть не может.

Утверждение 2. *Если $|a| < 1$, то существуют такие $M > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что все корни характеристического квазиполинома (3) при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda < -M$.*

В этом случае при малых ε нулевое решение исходного уравнения (1) асимптотически устойчиво, все решения из некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности стремятся к нулю.

Таким образом, необходимо проводить дополнительные исследования поведения решений уравнения (1) только в том случае, когда параметр a по модулю близок к 1. При этом характеристический квазиполином (3) имеет корень $\lambda(\varepsilon)$ такой, что $\operatorname{Re}\lambda(\varepsilon) \to 0$ (при $\varepsilon \to 0$), и не имеет корней в правой комплексной полуплоскости, отделенных от мнимой оси при всех достаточно малых ε.

2. Предположим, что a близко к -1. Пусть

$$a = -1 - \mu a_1, \quad 0 < \mu \ll 1. \tag{4}$$

Легко заметить, что при этом условии квазиполином (3) имеет бесконечное количество корней вида

$$\lambda_k(\varepsilon) = \pi(2k-1)(1-\varepsilon+\varepsilon^2)i + \mu a_1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\pi^2(2k-1)^2 + o(\varepsilon^2+\mu), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \tag{5}$$

Формула (5) дает асимптотическое представление корней, которые непрерывно зависят от малого параметра. Снимем требование непрерывности. Тогда мы можем записать корни (3) следующим образом.

Фиксируем произвольно $0 < \gamma < 1$ и натуральное n. Выберем произвольно n положительных чисел $\omega_1, \dots, \omega_n$. Обозначим через $\theta(\omega, \varepsilon)$ такое число из полуинтервала $[0, 2\pi)$, что $\omega\varepsilon^{-\gamma} + \theta(\omega, \varepsilon)$ является целым нечетно кратным π.

Тогда формула (6) дает нам еще одну асимптотическую зависимость от ε корней, действительная часть которых стремится к нулю.

$$\begin{aligned} \lambda_K(\Omega, \varepsilon) &= \frac{(\Omega, K)}{\varepsilon^\gamma} i + (\Theta, K)i - \varepsilon^{1-\gamma}(\Omega, K)i + o(\varepsilon^{1-\gamma} + \mu)i - \\ &- \varepsilon^{2-2\gamma}\frac{(\Omega, K)^2}{2} + \mu a_1 + o(\varepsilon^{2-2\gamma} + \mu). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь и далее $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T$, $\Theta = (\theta(\omega_1, \varepsilon), \dots, \theta(\omega_n, \varepsilon))^T$, K — это вектор $(k_1, k_2, \dots, k_n)^T$ $(k_j \in \mathbb{Z})$, причем $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ — нечетно.

Отметим, что хоть формула (6) зависит от непрерывных параметров ω_j, уравнение (3) имеет лишь счетное число корней. При $\varepsilon \to 0$ мы как бы „перескакиваем“ с одного корня на другой за счет разрывной функции θ. Таким образом, модуль каждого λ_K неограниченно растет при $\varepsilon \to 0$. Выбор ω_j влияет лишь на скорость перехода с одного корня на другой.

Перейдем к исследованию динамики (1). В работе [6] подробно разобран случай, когда $\mu = \varepsilon^2$, т.е.

$$a = -1 - \varepsilon^2 a_1.$$

Метод исследований основывается на построении так называемых квазинормальных форм. Применяя стандартные построения нормальных форм [8], получаем бесконечномерную систему уравнений. Как показано в [6], эта система эквивалентна краевой задаче параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + (f_2^2 + f_3)u^3 \tag{7}$$

с антипериодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r+1). \tag{8}$$

Основной результат состоит в том, что динамика (7)–(8) определяет, при малых ε, локальную динамику уравнения (1).

Утверждение 3. *Пусть краевая задача (7)–(8) имеет решение $u_*(\tau, r)$. Тогда, при достаточно малых ε, уравнение (1) имеет асимптотическое по невязке решение*

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon u_*(\varepsilon^2 t, t(1 - \varepsilon + \varepsilon^2))(1 + o(1)).$$

Отметим, что из этого утверждения мы не можем сделать вывод, существует ли у (1) точное решение с приведенной асимптотикой. Можем лишь сказать, что если u_* неустойчиво, то даже если точное решение и существует, то оно заведомо неустойчиво. Поэтому рассматривать нужно только устойчивые решения (7)–(8). Однако, если u_* имеет определенный вид, то существование и устойчивость у (1) точного решения можно предсказать заранее.

Утверждение 4. *Пусть (7)–(8) имеет периодическое по τ решение $u_*(\tau, r)$, причем только один мультипликатор линеаризованной на u_* задачи равен по модулю 1. Тогда, при малых ε, уравнение (1) имеет устойчивое решение вида*

$$x_*(t,\varepsilon) = \varepsilon u_*(\varepsilon^2 t, t(1-\varepsilon+\varepsilon^2))(1+o(1)).$$

Случай, когда в (4) $\mu = o(\varepsilon^2)$, тривиален. Более сложная ситуация возникает при $\mu = \varepsilon^p$, $0 < p < 2$. Итак, будем теперь считать, что

$$a = -1 - \varepsilon^p a_1, \quad 0 < p < 2.$$

Приступим к исследованию динамики (1). Возьмем $\gamma = 1 - p/2$. Аналогично [6] подставим в (1) следующий ряд:

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon^{p/2} \sum_K \xi_K(\tau) e^{(K,T_1)i} + \varepsilon^p x_2(t_1,\ldots,t_n,\tau) + \varepsilon^{3p/2} x_3(t_1,\ldots,t_n,\tau) + \ldots,$$

где $\tau = \varepsilon^p t$, $T_1 = (t_1,\ldots,t_n)^T$, $t_j = (\omega_j \varepsilon^{-\gamma} + \theta(\omega_j,\varepsilon) - \varepsilon^{1-\gamma}\omega_j + o(1))t$, суммирование происходит по всем целочисленным наборам $K = (k_1,\ldots,k_n)^T$ таким, что $k_1 + \cdots + k_n$ — нечетно. Функции $x_2(t_1,\ldots,t_n,\tau)$ и $x_3(t_1,\ldots,t_n,\tau)$ предполагаются 1-периодичными по первым n аргументам. В многоточиях собраны слагаемые более высокого порядка малости по ε.

Будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. При $\varepsilon^{p/2}$ получается верное тождество. Равенство коэффициентов при ε^p дает нам уравнение

$$x_2 = -x_2(t_1 - \omega_1\varepsilon^{-\gamma} - \theta(\omega_1,\varepsilon), \ldots, t_n - \omega_n\varepsilon^{-\gamma} - \theta(\omega_n,\varepsilon), \tau) + f_2\left(\sum_K \xi_K(\tau)e^{(K,T_1)i}\right)^2.$$

В силу того, что $\omega_1\varepsilon^{-\gamma} + \theta(\omega_1,\varepsilon)$ кратно π, а x_2 периодично по первым n аргументам с периодом π, получаем

$$x_2 = \frac{f_2}{2}\left(\sum_K \xi_K(\tau)e^{(K,T_1)i}\right)^2.$$

Приравняем коэффициенты при $\varepsilon^{3p/2}$. Получим, что x_3 выражается следующим образом:

$$2x_3 = \sum_K \left(a_1\xi_K - \frac{(\Omega,K)^2}{2}\xi_K - \frac{d\xi_K}{d\tau}\right)e^{(K,T_1)i} + \\ + (f_2^2 + f_3)\left(\sum_K \xi_K(\tau)e^{(K,T_1)i}\right)^3.$$

Легко заметить, что выражение справа 1-периодично по каждому $t_1,\ldots,t_n$ тогда и только тогда, когда для каждого подходящего набора K выполняется равенство

$$\frac{d\xi_K}{d\tau} = \left(a_1 - \frac{(\Omega,K)^2}{2}\right)\xi_K + (f_2^2+f_3)\varphi_K(\xi). \tag{9}$$

Здесь через $\varphi_K(\xi)$ обозначен коэффициент при $\exp((K,T_1)i)$ в разложении $\left(\sum\limits_K \xi_K(\tau)e^{(K,T_1)i}\right)^3$ в ряд Фурье.

Рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r_1} + \frac{\partial}{\partial r_2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial r_n}\right)^2 u + a_1 u + (f_2^2+f_3)u^3 \tag{10}$$

с краевыми условиями следующего вида:

$$\begin{aligned} u(\tau, r_1, \ldots, r_{n_j}, \ldots, r_n) &= -u(\tau, r_1, \ldots, r_{n_j} + \frac{\pi}{\omega_{n_j}}, \ldots, r_n), \qquad j = 1, \ldots, 2m+1, \\ u(\tau, r_1, \ldots, r_{n_j}, \ldots, r_n) &= u(\tau, r_1, \ldots, r_{n_j} + \frac{\pi}{\omega_{n_j}}, \ldots, r_n), \qquad j = 2m+2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь m — неотрицательное целое число такое, что $2m+1 \le n$, а $\{n_j\}_{j=1}^n$ — перестановка набора $\{1, 2 \ldots, n\}$.

Если разложить решение (10)–(11) в ряд по собственным функциям правой части

$$u(\tau, r_1, \dots, r_n) = \sum_K \xi_K(\tau) e^{(K,R)i},$$

где $R = (r_1, \dots, r_n)^T$, а суммирование происходит по таким наборам K, что k_{n_j} нечетны для $j = 1, \dots, 2m+1$ и четны для $j = 2m+2, \dots, n$, то для определения амплитуд ξ_K получим систему (9). В этом смысле бесконечномерная система обыкновенных дифференциальных уравнений (9) эквивалентна краевой задаче (10)–(11).

При разных значениях m и разных перестановках $\{n_j\}_{j=1}^n$ мы будем получать различные краевые задачи, каждая из которых будет описывать локальную динамику в некоторой части окрестности нулевого решения уравнения (1). Таким образом, мы получили в качестве нормализованной формы семейство краевых задач (10)–(11), зависящее от непрерывных параметров $\omega_j > 0$ $(j = 1, \dots, n)$, перестановки $\{n_j\}_{j=1}^n$ и m. При различных значениях параметров (а также при различном их количестве) динамика этой задачи может быть, вообще говоря, различной.

Теорема 1. *Пусть фиксирован набор $\omega_j > 0$ $(j = 1, \dots, n)$, выбрано неотрицательное целое m (так, что $2m+1 \le n$) и некоторая перестановка $\{n_j\}_{j=1}^n$ первых n натуральных чисел. Пусть краевая задача (10)–(11) имеет определенное при всех $\tau \ge 0$ решение $u_*(\tau, r_1, \dots, r_n)$. Тогда исходное уравнение (1) имеет асимптотическое по невязке решение вида*

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} u_*(\varepsilon^p t, t_1, \dots, t_n)(1 + o(1)).$$

Результат, аналогичный утверждению 4, удается сформулировать лишь в частном случае для $n = 1$. При этом краевые условия (11) принимают вид

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + \frac{\pi}{\omega_1}). \tag{12}$$

Теорема 2. *Пусть при $n = 1$ и некотором $\omega_1 > 0$ краевая задача (10)–(12) имеет периодическое по τ решение $u_*(\tau, r_1)$, причем только один мультипликатор линеаризованной на u_* задачи равен по модулю 1. Тогда исходное уравнение* (1) *имеет периодическое решение вида*

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} u_* \left(\varepsilon^p t, \left(\frac{\omega_1}{\varepsilon^\gamma} + \theta(\omega_1, \varepsilon) + o(1) \right) t \right) (1 + o(1))$$

той же устойчивости.

Отметим, что решение x_*, о котором идет речь в теореме 2, является высокочастотным колебательным режимом.

3. Ситуация, когда параметр a близок к 1, является более простой. Кратко приведем основные результаты.

Случай

$$a = 1 + \varepsilon^2 a_1$$

изучен в [7]. Квазинормальная форма в этом случае имеет вид параболической краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + f_2 u^2$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + 1).$$

Как известно, устойчивыми решениями такой краевой задачи могут быть только пространственно-однородные состояния равновесия, которым будут соответствовать устойчивые решения (1), близкие к постоянным. В силу этого, динамика (1) в случае $p = 2$ описывается следующим образом.

Утверждение 5. *Пусть $a_1 > 0$. Тогда нулевое решение уравнения (1) неустойчиво, и существует асимптотически устойчивое стационарное решение $x_*(t, \varepsilon)$, причем*

$$x_*(t, \varepsilon) = -\varepsilon^2 \frac{a_1}{f_2}(1 + o(1)).$$

Если же $a_1 < 0$, то нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

В случае
$$a = 1 + \varepsilon^p a_1, \quad 0 < p < 2$$
квазинормальная форма — это семейство параболических уравнений
$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r_1} + \frac{\partial}{\partial r_2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial r_n}\right)^2 u + a_1 u + f_2 u^2 \tag{13}$$
с периодическими краевыми условиями по каждой пространственной переменной
$$u(\tau, r_1, \ldots, r_j, \ldots, r_n) = u\left(\tau, r_1, \ldots, r_j + \frac{2\pi}{\omega_j}, \ldots, r_n\right), \quad j = 1\ldots, n. \tag{14}$$

Теорема 3. *Пусть при некотором наборе $\omega_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ система* (13)–(14) *имеет решение $u_*(r_1, \ldots, r_n, \tau)$. Тогда у исходного уравнения (1) существует асимптотическое по невязке решение вида*
$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^p u_*(\varepsilon^p t, t_1, \ldots, t_n,).$$

Отдельно отметим, что при $n = 1$ устойчивыми решениями квазинормальной формы могут быть только пространственно-однородные состояния равновесия, которые от значения ω_1 не зависят.

Теорема 4. *Пусть $n = 1$. Тогда если $a_1 > 0$, то нулевое решение уравнения (1) неустойчиво, и существует асимптотически устойчивое стационарное решение $x_*(t, \varepsilon)$, причем*
$$x_*(t, \varepsilon) = -\varepsilon^p \frac{a_1}{f_2}(1 + o(1)).$$
Если $a_1 < 0$, то нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Список литературы

1. *Ланда, П.С.* Автоколебания в распределенных системах / *П.С. Ланда.* — М.: Наука, 1983. — 320 с.
2. *Дмитриев, А.С.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике / *А.С. Дмитриев, В.Я. Кислов.* — М.: Наука, 1989. — 280 с.
3. *Кузнецов, С.П.* Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью (обзор) / *С.П. Кузнецов* // Изв. вузов. Радиофизика. — 1982. — Т. 25, №12. — С. 1410 – 1428.
4. *Kilias, T.* Electronic chaos generators – design and applications / *T. Kilias, K. Kutzer, A. Moegel, W. Schwarz* // International Journal of Electronics. — 1995. — Vol. 79, № 6. — P. 737 – 753.
5. *Хейл, Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений / *Дж. Хейл.* — М.: Мир, 1984. — 421 с.
6. *Кащенко, С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной / *С.А. Кащенко* // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, №8. — С. 1448 – 1451.
7. *Кащенко, С.А.* Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / *С.А. Кащенко* // Диф. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 10. — С. 1343 – 1355.
8. *Арнольд, В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / *В.И. Арнольд.* — М.: Наука 1978. — 304 с.

Dynamic Properties of First-order Equations with Large Delay

Kashchenko I.S.

The local dynamic of the first-order differential equation with large delay is studied. The method of research is based on the normal forms theory. In critical cases having infinite dimensions, special evolutional equations playing the role of normal form are built. Different cases of correlation between the order of coefficient variance from critical values and order of delay are studied.