Модел. и анализ информ. систем. Т.**14**, №**2** (2007) 63–67

УДК 517.929.2

Асимптотическое представление решений систем линейных разностных уравнений и метод усреднения

Нестеров П. Н.[1]
Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14,
e-mail: mathematix@mail.ru,

получена 27 мая 2007

Аннотация

Исследуется задача о построении асимптотики решений некоторого класса линейных систем разностных уравнений при $t \to +\infty$.

Идеи метода усреднения, использованные в работах [1, 2, 3] для построения асимптотики решений линейных систем дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами, могут быть полезны и при исследовании поведения решений линейных систем разностных уравнений в окрестности точки $t = +\infty$. В этой статье мы опишем процедуру построения асимптотики решений некоторого класса систем линейных разностных уравнений, содержащих осциллирующие величины.

Впервые идеи метода усреднения применительно к задаче о построении асимптотики линейных разностных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами были использованы А.В. Бурдом в работе [4]. Мы сформулируем общий вариант теоремы об усреднении систем линейных разностных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. Введем некоторые обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть матрица $A(t)$, определенная на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$, допускает следующее представление:

$$A(t) = \sum_{l=1}^{S} C_l e^{\mathrm{i}\lambda_l t}, \qquad t \in \mathbb{Z},$$

где C_l — постоянные, вообще говоря, комплексные матрицы, λ_l — произвольные вещественные числа. В этом случае мы будем писать, что $A(t) \in \Sigma$. Матрицу $A(t)$ с областью определения $\mathbb{Z}$ назовем периодической, если $A(t+l) \equiv A(t)$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$) и всех $t \in \mathbb{Z}$. Средним значением матрицы $A(t)$ называют матрицу

$$A = \mathrm{M}\big[A(t)\big] := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} A(k), \qquad t \in \mathbb{N}.$$

В том случае, когда $A(t) \in \Sigma$ и $\mathrm{M}[A(t)] = 0$, мы будем писать $A(t) \in \Sigma_0$. Пусть $f(t) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), тогда мы пишем, что $f(t) \in \ell_1$, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| < \infty.$$

Если же $R(t)$ — матрица произвольных размеров и $t \in \mathbb{N}$, то запись $R(t) \in \ell_1$ означает, что $f(t) = \|R(t)\| \in \ell_1$, где $\|\cdot\|$ — некоторая матричная норма. Наконец, если $f(t)$ — скалярная функция (или матрица), то положим

$$\Delta f(t) := f(t+1) - f(t),$$

где Δ — конечно-разностный оператор.

Предположим, что исходная система линейных разностных уравнений может быть приведена к следующему виду:

$$x(t+1) = \Big(A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t) v_i(t) + \sum_{1\le i_1 \le i_2 \le n} A_{i_1 i_2}(t) v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} A_{i_1 \ldots i_k}(t) v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t) + R(t)\Big) x(t). \quad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП.2.1.1.630).

Здесь A_0, $A_{i_1\dots i_l}(t)$, $R(t)$ – квадратные матрицы, $v_1(t),\dots,v_n(t)$ – скалярные функции, $x(t)\in\mathbb{C}^m$ и $t\in\mathbb{N}$.

Пусть

1. A_0 — постоянная невырожденная матрица с вещественными собственными значениями. Кроме того, мы предположим, что спектры матриц A_0 и $-A_0$ не пересекаются.
2. $v_1(t)\to 0, v_2(t)\to 0,\dots,v_n(t)\to 0$ при $t\to\infty$.
3. $\Delta v_1(t),\Delta v_2(t),\dots,\Delta v_n(t)\in\ell_1$.
4. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\dots v_{i_{k+1}}(t)\in\ell_1$ для любого набора $1\le i_1\le i_2\le\dots\le i_{k+1}\le n$.
5. Матрицы $A_{i_1\dots i_l}(t)$ принадлежат классу Σ.
6. Матрица $R(t)\in\ell_1$.

Имеет место

Теорема 1. *Система* (1) *при достаточно больших t заменой*

$$x(t)=\Big[I+\sum_{i=1}^{n}Y_i(t)v_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}Y_{i_1i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\dots+$$
$$+\sum_{1\le i_1\le\dots\le i_k\le n}Y_{i_1\dots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y(t),\quad(2)$$

где I – единичная матрица, а матрицы $Y_{i_1\dots i_l}(t)$ принадлежат классу Σ_0, приводится к виду

$$y(t+1)=\Big(A_0+\sum_{i=1}^{n}A_iv_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}A_{i_1i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\dots+$$
$$+\sum_{1\le i_1\le\dots\le i_k\le n}A_{i_1\dots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)+R_1(t)\Big)y(t),\quad t\in\mathbb{N},\quad(3)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\dots i_l}$ и матрицей $R_1(t)\in\ell_1$.

Коротко опишем схему доказательства. Подставим (2) в (1) и учтем (3). Замечая, что

$$v_i(t+1)=\Delta v_i(t)+v_i(t),\qquad i=1,\dots,n,\quad(4)$$

соберем в обеих частях получившегося равенства слагаемые из класса ℓ_1. Воспользовавшись обратимостью замены (2), выразим из получившегося равенства матрицу $R_1(t)$, тем самым превращая полученное равенство в тождество при указанном выборе матрицы $R_1(t)$. Приравнивая слагаемые при множителе $v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_l}(t)$ $(l\le k)$ мы получаем следующие неоднородные разностные уравнения для определения матриц $Y_{i_1\dots i_l}(t)$ и $A_{i_1\dots i_l}$:

$$Y_{i_1i_2\dots i_l}(t+1)A_0-A_0Y_{i_1i_2\dots i_l}(t)=F_{i_1i_2\dots i_l}(t)-A_{i_1\dots i_l},\quad(5)$$

где $F_{i_1i_2\dots i_l}(t)$ – некоторая известная матрица из класса Σ, зависящая от набора $(i_1i_2\dots i_l)$. Матрицу $A_{i_1\dots i_l}$ определим из условия равенства нулю среднего значения выражения, стоящего в правой части (5), т.е.

$$A_{i_1\dots i_l}=\mathrm{M}\big[F_{i_1i_2\dots i_l}(t)\big].$$

Решение уравнения (5) $Y_{i_1i_2\dots i_l}(t)$ ищем в виде

$$Y_{i_1i_2\dots i_l}(t)=\sum_{j=1}^{N}\beta_j^{(i_1\dots i_l)}e^{\mathrm{i}\lambda_jt},\quad\lambda_j\ne 2\pi M,\quad M\in\mathbb{Z},\quad(6)$$

где постоянные матрицы $\beta_j^{(i_1\dots i_l)}$ подлежат определению. Подставим выражение (6) в формулу (5) и, учитывая, что матрица $F_{i_1i_2\dots i_l}(t)$ принадлежит классу Σ, приравняем слагаемые при одинаковых показателях экспоненты. Приходим к следующим матричным уравнениям:

$$\beta_j^{(i_1\dots i_l)}e^{\mathrm{i}\lambda_j}A_0-A_0\beta_j^{(i_1\dots i_l)}=\Upsilon_j^{(i_1\dots i_l)},\quad j=1,\dots,N.$$

Каждое из этих уравнений имеет единственное решение при любой правой части $\Upsilon_j^{(i_1\dots i_l)}$ тогда и только тогда, когда спектры матриц A_0 и $e^{\mathrm{i}\lambda_j}A_0$ не пересекаются (см., например, [5]). В силу вещественности спектра невырожденной матрицы A_0 это условие оказывается заведомо выполненным, если величина $e^{\mathrm{i}\lambda_j}$

является комплексной, т.е. когда $\lambda_j \neq \pi M$, $M \in \mathbb{Z}$. Из (6) следует, что $\lambda_j \neq 2\pi M$, поэтому нам необходимо рассмотреть лишь случай, когда $\lambda_j = (2M+1)\pi$, $M \in \mathbb{Z}$. Но в последнем случае матрица $e^{\mathrm{i}\lambda_j} A_0$ есть матрица $-A_0$. Спектры же матриц A_0 и $-A_0$, согласно нашему предположению, не пересекаются.

Явная формула для определения матриц $A_{i_1\dots i_l}$ может быть найдена, например, в работе [2]. Здесь укажем лишь вид матриц первого и второго «приближений»:

$$A_i = \mathrm{M}[A_i(t)], \qquad i = 1, \dots, n.$$

Далее,

$$A_{ij} = \mathrm{M}\big[A_{ij}(t) + A_i(t)Y_j(t) + A_j(t)Y_i(t)\big], \quad 1 \le i < j \le n$$

и

$$A_{ii} = \mathrm{M}\big[A_{ii}(t) + A_i(t)Y_i(t)\big], \quad i = 1, \dots, n.$$

Условие вещественности спектра матрицы A_0, как, впрочем, и требование о том, чтобы спектры матриц A_0 и $-A_0$ не пересекались, не является ограничительным. Действительно, пусть собственные числа матрицы A_0 имеют вид $\lambda_j = \rho_j e^{\mathrm{i}\omega_j}$, $0 \le \omega_j < 2\pi$, $\rho_j > 0$, $(j = 1, \dots, m)$ и матрица A_0 приведена к жордановой нормальной форме. Произведем в системе (1) замену переменных

$$x(t) = \Re^t z(t),$$

где $\Re = \mathrm{diag}(e^{\mathrm{i}\omega_1}, \dots, e^{\mathrm{i}\omega_m})$. Эта замена с ограниченными по t коэффициентами переводит матрицу A_0 в матрицу $\Re^{-1}A_0$, собственными числами которой являются величины $\rho_j > 0$, $(j = 1, \dots, m)$.

Теорема 1 остается справедливой и в том случае, когда все матрицы $A_{i_1\dots i_l}(t)$ являются периодическими с одним и тем же периодом $T \in \mathbb{N}$. Основная задача в этой ситуации заключается в том, чтобы доказать, что уравнение (5) разрешимо в классе периодических матриц с нулевым средним значением при любой периодической правой части, имеющей нулевое среднее значение. На этом пути используются те же рассуждения, что и в работе [6]. Как оказывается, для разрешимости уравнения (5) в классе периодических матриц с нулевым средним значением достаточно предположить, что собственные числа матрицы A_0 удовлетворяют условию $(p, r = 1, \dots, m)$:

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_r} \neq \exp\{\frac{2\pi q \mathrm{i}}{T}\}, \qquad q = 1, \dots, T-1. \tag{7}$$

Усредненная система (3) в главной части не содержит, вообще говоря, осциллирующих коэффициентов, и в этом смысле она проще исходной системы (1). В частности, для построения асимптотики ее решений может быть использован разностный аналог теоремы Левинсона — теорема Бензаида – Латса. Здесь следует заметить, что соответствующий результат был впервые получен Рапопортом (см. [7]), а затем позднее в более общем виде переоткрыт Бензаидом и Латсом.

Рассмотрим следующую систему линейных разностных уравнений:

$$x(t+1) = \big(\Lambda(t) + R(t)\big)x(t), \tag{8}$$

где $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)\big)$ и $\lambda_i^{-1}(t)R(t) \in \ell_1$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Справедлива (см. [8])

Теорема 2. *Пусть*

(1)

$$\lambda_i(t) \neq 0, \qquad 1 \le i \le m, \quad t \ge t_0,$$

(2)

$$\lambda_i^{-1}(t)R(t) \in \ell_1, \qquad 1 \le i \le m,$$

(3) выполнены следующие условия (условия дихотомии): найдутся положительные константы $\mu > 0$ и $K > 0$ такие, что для любой пары индексов (i, j), $i \neq j$ имеет место или

$$\prod_{l=t_0}^{t} \left|\frac{\lambda_i(l)}{\lambda_j(l)}\right| \to +\infty, \quad t \to +\infty \quad \text{и} \quad \prod_{l=t_1}^{t_2} \left|\frac{\lambda_i(l)}{\lambda_j(l)}\right| \ge \mu > 0, \quad t_0 \le t_1 \le t_2 \tag{9}$$

или

$$\prod_{l=t_1}^{t_2} \left|\frac{\lambda_i(l)}{\lambda_j(l)}\right| \le K, \qquad t_0 \le t_1 \le t_2. \tag{10}$$

Тогда фундаментальная матрица $X(t)$ системы (8) *допускает следующее асимптотическое представление при $t \to +\infty$:*

$$X(t) = \Big[I + o(1)\Big] \prod_{l=t_0}^{t-1} \Lambda(l). \tag{11}$$

Для приведения системы (3) к виду (8) можно, например, воспользоваться следующим результатом. Запишем систему (3) в следующей форме:

$$x(t+1) = \big(A_0 + V(t) + R_1(t)\big)x(t), \tag{12}$$

где $V(t) \to 0$, $t \to +\infty$, $\Delta V(t) \in \ell_1$ и $R_1(t) \in \ell_1$. Потребуем, чтобы все собственные числа невырожденной матрицы A_0 были различны. В этом случае справедлива

Лемма 1. *Существует невырожденная при $t \geq t_0$ матрица $C(t)$ (по столбцам этой матрицы стоят собственные векторы матрицы $A_0 + V(t)$), удовлетворяющая свойствам*

(1) $C(t) \to \Pi$ при $t \to +\infty$, где матрица Π приводит матрицу A_0 к диагональному виду,

(2) $\Delta C(t) \in \ell_1$,

такая, что замена $x(t) = C(t)y(t)$ приводит систему (12) *к виду*

$$y(t+1) = \big(\Lambda(t) + R_2(t)\big)y(t), \tag{13}$$

где $\Lambda(t)$ — диагональная матрица, составленная из собственных чисел матрицы $A_0 + V(t)$ и $R_2(t) \in \ell_1$.

В работе [9] изложенная методика используется для построения асимптотики решений одного разностного уравнения второго порядка. Здесь мы рассмотрим более простой пример.

Дискретным адиабатическим осциллятором будем называть следующее разностное уравнение второго порядка:

$$x(n+2) - 2\cos\omega\, x(n+1) + \big(1 + q(n)\big)x(n) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

где $0 < \omega < \pi$, а функция $q(n)$ мала в некотором смысле при $n \to +\infty$. Мы рассмотрим случай, когда

$$q(n) = a\frac{\sin 2\omega n}{n^\alpha}, \qquad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Сделаем в уравнении (14) замену

$$\begin{aligned} x(n) &= c_1(n)\cos\omega n + c_2(n)\sin\omega n,\\ x(n+1) &= c_1(n)\cos\omega(n+1) + c_2(n)\sin\omega(n+1), \end{aligned}$$

с помощью которой исходное уравнение преобразуется в систему

$$y(n+1) = \big(I + A(n)q(n)\big)y(n), \tag{15}$$

где $y(n) = \begin{pmatrix} c_1(n)\\ c_2(n)\end{pmatrix}$ и

$$A(n) = \frac{1}{\sin\omega}\begin{pmatrix} \sin\omega(n+1)\cos\omega n & \sin\omega(n+1)\sin\omega n\\ -\cos\omega(n+1)\cos\omega n & -\cos\omega(n+1)\sin\omega n\end{pmatrix}.$$

Систему (15) можно упростить, используя теорему 1. В системе (15) выполним усредняющую замену $y(n) = \big[I + n^{-\alpha}V(n)\big]z(n)$, где $V(n) \in \Sigma_0$. Получим усредненную систему

$$z(n+1) = \big(I + n^{-\alpha}A_1 + R(n)\big)z(n), \tag{16}$$

где $R(n) \in \ell_1$, $A_1 = \mathrm{M}\big[a\sin 2\omega n A(n)\big]$. Проделывая довольно утомительные вычисления, приходим к выводу, что

$$A_1 = \frac{a}{4\sin\omega}\begin{pmatrix}\cos\omega & \sin\omega\\ \sin\omega & -\cos\omega\end{pmatrix}, \qquad \omega \neq \frac{\pi}{2}.$$

Несложно убедиться, что в случае, когда $\omega = \pi/2$, решения уравнения (14) имеют вид

$$x(n) = C_1\cos\frac{\pi n}{2} + C_2\sin\frac{\pi n}{2},$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные. Пусть теперь $\omega \neq \pi/2$. Собственные числа матрицы $I + n^{-\alpha}A_1$ имеют вид

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 \pm \sigma n^{-\alpha}, \qquad \sigma := \frac{a}{4\sin\omega}.$$

Заметим, что при $n \to +\infty$

$$\prod_{l=n_0}^{n-1}\big(1 \pm \sigma l^{-\alpha}\big) = C_* \exp\{\pm\frac{\sigma}{1-\alpha}n^{1-\alpha}\}\big(1+o(1)\big), \qquad \alpha < 1,$$

и

$$\prod_{l=n_0}^{n-1}\big(1 \pm \sigma l^{-1}\big) = C^* n^{\pm\sigma}\big(1+o(1)\big),$$

где C_*, C^* — некоторые действительные постоянные. Отсюда следует, что при $\omega \neq \pi/2$ и $a \neq 0$ уравнение (14) имеет неограниченно растущие по абсолютной величине решения.

Список литературы

1. *Нестеров, П.Н.* Построение асимптотики решений одномерного уравнения Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом / *П.Н. Нестеров* // Математические заметки. — 2006. — Т. 80, №2. — С. 240 – 250.

2. *Нестеров, П.Н.* Асимптотическое интегрирование системы двух линейных осцилляторов с медленно убывающей связью / *П.Н. Нестеров.* — Яросл. гос. ун-т. им. П.Г. Демидова. Ярославль, 2006. — 28 с. — Деп. в ВИНИТИ РАН 21.02.2006, №171-В 2006.

3. *Бурд, В.Ш.* Параметрический резонанс в одном уравнении из класса адиабатических осцилляторов / *В.Ш. Бурд, П.Н. Нестеров* // Модел. и анализ информ. систем. — 2006. — Т. 13, №2. — С. 48 – 54.

4. *Bourd, A.V.* Asymptotic Behavior of Solutions of Some Linear Difference Equations with Oscillatory Decreasing Coefficients / *A.V. Bourd* // Journal of Difference Equations and Applications. — 2003. — V. 9, №2. — P. 211 – 225.

5. *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / *Ф.Р. Гантмахер.* — 5-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 560 с.

6. *Нестеров, П.Н.* Усреднение систем с колебательно убывающими коэффициентами в случае периодичности осциллирующей составляющей / *П.Н. Нестеров* // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. — 2006. — Вып. 8. — С. 98 – 108.

7. *Рапопорт, И.М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений / *И.М. Рапопорт.* — Киев: Изд-во Академии наук УССР, 1954. — 292 с.

8. *Benzaid, Z.* Asymptotic representation of solutions of perturbed systems of linear difference equations / *Z. Benzaid, D.A. Lutz* // Studies in Appl. Math. — 1987. — V. 77. — P. 195 – 221.

9. *Бурд, В.Ш.* Об асимптотике решений одного разностного уравнения второго порядка с колебательно убывающими коэффициентами / *В.Ш. Бурд, П.Н. Нестеров* // Модел. и анализ информ. систем. — 2005. — Т. 12, №2. — С. 24 – 31.

The Asymptotic Representation of Solutions of Difference Equations Systems and the Averaging Method

Nesterov P.N.

The problem of constructing asymptotics for solutions of one class of difference equations as $t \to +\infty$ is studied.