УДК 517.926

Явление буферности в одном уравнении маятникового типа

Сандуляк Д. В.

Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14
e-mail: danzova@hotmail.ru,

получена 2 мая 2007

Аннотация

Рассматривается уравнение, описывающее вынужденные колебания нелинейного маятника с малым трением под действием периодической внешней силы. Для него установлен гамильтонов сценарий явления буферности, то есть показано, что при подходящем выборе параметров в его фазовом пространстве существует любое наперёд заданное конечное число устойчивых периодических решений, появляющихся в результате каскада бифуркаций типа седло-узел.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + \sin x = \varepsilon a \cos \nu t, \quad (1)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $a > 0$, $\nu > 0$.

Отметим одно необходимое для последующего анализа свойство. Пусть уравнение (1) допускает некоторое периодическое решение $x(t, \varepsilon)$ периода $T(\varepsilon)$ с комплексными мультипликаторами $\lambda_1(\varepsilon)$, $\lambda_2(\varepsilon)$. Тогда в силу теоремы Лиувилля справедливо равенство

$$|\lambda_1(\varepsilon)| = |\lambda_2(\varepsilon)| = e^{-\varepsilon T(\varepsilon)/2} < 1.$$

При $\varepsilon = 0$ исследуемое уравнение обращается в уравнение математического маятника, которое, как известно, обладает помимо обычных (колебательных) периодических решений $x(t)$, $x(t+T) \equiv x(t)$, $T > 0$ ещё и вращательными периодическими движениями $x(t)$, для которых $x(t+T) \equiv x(t) + 2\pi m$, при некотором целом $m \neq 0$. В связи с этим введём в рассмотрение две серии множеств. Через Ω_n^1 обозначим совокупность наборов параметров (ε, a, ν) , при которых уравнение (1) имеет не менее n различных устойчивых колебательных периодических решений, а через Ω_n^2 обозначим аналогичное множество для вращательных периодических движений.

Теорема. Множество $\Omega_n^1 \cap \Omega_n^2$ при любом $n \in \mathbb{N}$ не пусто.

Доказательство. Сначала изучим вопрос о существовании у уравнения (1) при $0 < \varepsilon \ll 1$ вращательных периодических движений с положительными скоростями $\dot{x}$. В связи с тем, что при $\varepsilon = 0$ семейство вращательных периодических решений задаётся равенством $\dot{x} = \sqrt{2(\xi + \cos x)}$, где $\xi > 1$ – произвольный параметр, перейдём от уравнения (1) к трёхмерной системе для $(x, y, z) = (x, \dot{x}, \nu t)$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\varepsilon y - \sin x + \varepsilon a \cos z \\ \dot{z} = \nu \end{cases} \quad (2)$$

и произведём в системе (2) замену переменных $(x, y) \rightarrow (\tau, \xi)$, исходя из формул

$$x = \tau, \quad y = \sqrt{2(\xi + \cos \tau)}, \quad (3)$$

где $\xi > 1$. Тогда система (2) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{\tau} = \sqrt{2(\xi + \cos \tau)}, \\ \dot{\xi} - \dot{\tau} \sin \tau = \sqrt{2(\xi + \cos \tau)}(-\varepsilon \sqrt{2(\xi + \cos \tau)} - \sin \tau + \varepsilon a \cos z), \\ \dot{z} = \nu. \end{cases}$$

В заключение примем τ за новое время и получим систему

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon a \cos z - \varepsilon \sqrt{2(\xi + \cos \tau)}, \\ \frac{dz}{d\tau} = \frac{\nu}{\sqrt{2(\xi + \cos \tau)}}, \end{cases} \quad (4)$$

которую следует рассматривать в области $\xi > 1$.

Обозначим через $(z(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon), \xi(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon))$ решение системы (4) с произвольно фиксированными условиями $z_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_0 > 1$ при $\tau = 0$ и рассмотрим уравнения

$$z(2\pi, z_0, \xi_0, \varepsilon) \equiv z_0 \pmod{2\pi}, \quad \xi(2\pi, z_0, \xi_0, \varepsilon) = \xi_0 \quad (5)$$

для определения начальных условий интересующих нас периодических движений. Далее подставим в систему (5) вытекающие из (4) асимптотические формулы

$$\begin{aligned} z(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon) &= z_0(\tau) + \varepsilon z_1(\tau) + O(\varepsilon^2), \\ \xi(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon) &= \xi_0 + \varepsilon \xi_1(\tau) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$z_0(\tau) = z_0 + \nu \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}}, \quad \xi_1(\tau) = \int_0^\tau a \cos z_0(s) - \sqrt{2(\xi_0 + \cos s)} ds. \quad (7)$$

После сокращения и отбрасывания слагаемых порядка ε условия (5) примут вид

$$\begin{aligned} \nu \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos \tau)}} &= 2\pi p, \quad \text{где } p \in \mathbb{N}; \\ \int_0^{2\pi} a \cos \left(z_0 + \nu \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}} \right) - \sqrt{2(\xi_0 + \cos \tau)} d\tau &= 0. \end{aligned}$$

В последнем равенстве раскроем $\cos \left(z_0 + \nu \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}} \right)$ по формуле косинуса суммы. Слагаемое, содержащее синусы, равняется нулю, поскольку оно представляет собой интеграл от периодической нечётной функции по периоду.

Таким образом, мы приходим к системе

$$\begin{aligned} \nu \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos \tau)}} &= 2\pi p, \quad \text{где } p \in \mathbb{N}, \\ a \cos z_0 \int_0^{2\pi} \cos \left(\nu \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}} \right) d\tau &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(\xi_0 + \cos \tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

При значениях параметра a больших критических значений a_p^1 , где

$$a_p^1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(\xi_0 + \cos \tau)} d\tau \left/ \left| \int_0^{2\pi} \cos \left(\nu \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}} \right) d\tau \right| \right.,$$

получившаяся система допускает наборы решений

$$(z_0, \xi_0) = (\varphi_{0,p}, \xi_{0,p}), (\varphi_{1,p}, \xi_{0,p}), \quad (9)$$

где $p = 1, 2, \dots$, $\xi_{0,p} \searrow 1$ при $p \rightarrow \infty$, корни первого уравнения из (8) при всевозможных $p \in \mathbb{N}$ (поскольку левая часть этого уравнения как функция переменной ξ_0 монотонно убывает при $1 < \xi_0 < \infty$ от $+\infty$ до нуля, то $\xi_{0,p}$, $p \geq 1$, определяются однозначно).

Если учесть в (8) отброшенные слагаемые порядка ε и применить к получившейся системе теорему о неявной функции по переменным z_0, ξ_0 в точке $z_0 = \varphi_{0,p}$, $\xi_0 = \xi_{0,p}$ или $z_0 = \varphi_{1,p}$, $\xi_0 = \xi_{0,p}$, то каждое решение (9) порождает при достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение $(z_p(\varepsilon), \xi_p(\varepsilon))$: $z_p(0) = \varphi_{0,p}$ или $\varphi_{1,p}$, $\xi_p(0) = \xi_{0,p}$, исходной системы (5). Периодические движения рождаются парами в результате бифуркации типа седло-узел.

Условия применимости упомянутой теоремы здесь будут выполняться. Действительно, нам необходимо убедиться в отличии от нуля якобиана системы (8) на любом из решений (9), что сводится к проверке неравенства $I_p \neq 0$, $p \in \mathbb{N}$, где

$$I_p = \int_0^{2\pi} \cos \left(\nu \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_{0,p} + \cos s)}} \right) d\tau. \quad (10)$$

Для вычисления интеграла (10) воспользуемся соотношениями

$$\nu = \frac{\pi p}{kF(\pi/2, k)}, \int_0^{\tau} \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_{0,p} + \cos s)}} = kF(\tau/2, k), \quad (11)$$

где $k = \sqrt{2/(\xi_{0,p} + 1)}$, $F(\tau, k)$ - эллиптический интеграл первого рода, задающийся равенством $F(\tau, k) = \int_0^{\tau} ds/\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}$. Подставим, далее, формулы (11) в (10) и выполним последовательно замены $s/2 \rightarrow s$, $\tau/2 \rightarrow \tau$, $\tau = am(u, k)$, где функция $am(u, k)$ определяется как неявная из уравнения $F(\tau, k) = u$.

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \cos \left(\int_0^{\tau} \frac{\nu ds}{\sqrt{2(\xi_0 + 1 - 2 \sin^2(s/2))}} \right) d\tau = \int_0^{2\pi} \cos \left(\int_0^{\tau/2} \frac{\nu ds}{\sqrt{(\xi_0 + 1)/2 - \sin^2 s}} \right) d\tau = \\ & = 2 \int_0^{\pi} \cos \left(k\nu \int_0^{\tau} \frac{ds}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}} \right) d\tau = 2 \int_0^{\pi} \cos(k\nu F(\tau, k)) d\tau = |\tau = am(u, k)| = \\ & = 2 \int_0^{\pi/\omega} \cos(k\nu u) dnu du = 2 \int_0^{\pi/\omega} \cos \left(k \frac{\pi p u}{kF(\pi/2, k)} \right) dnu du = 2 \int_0^{\pi/\omega} \cos(2p\omega u) dnu du, \end{aligned}$$

где $dnu = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}$, $snu = \sin(am(u, k))$ - эллиптический синус, $\omega = \pi/(2F(\pi/2, k))$.

То есть мы привели интересующий нас интеграл к виду

$$I_p = 2 \int_0^{\pi/\omega} \cos(2p\omega u) dnu du. \quad (12)$$

Теперь учтём в (12) известные разложения Фурье (см, например, [2])

$$dnu = \omega + 4\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \cos(2n\omega u),$$

$$k^2 \sin^2 u = 1 - 2E\omega/\pi - 8\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^n} \cos(2n\omega u), \quad (13)$$

где $q = \exp\left(-\pi \frac{F(\pi/2, \sqrt{1 - k^2})}{F(\pi/2, k)}\right)$, $E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s} ds$. (14)

Таким образом,

$$I_p = \frac{4\pi q^p}{1 + q^{2p}} > 0; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} I_p = \frac{4\pi e^{-\pi\nu/2}}{1 + e^{-\pi\nu}} > 0, \quad (15)$$

а также

$$a_p^1 = \frac{2E(1 + q^{2p})}{\pi q^p}, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} a_p^1 = 2 \frac{1 + e^{-\pi\nu}}{\pi e^{-\pi\nu/2}}. \quad (16)$$

Справедливость предельных переходов обосновывается следующими выкладками:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} q^p &= \exp \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \left(-\pi p \frac{F(\pi/2, \sqrt{1 - k^2})}{F(\pi/2, k)} \right) \right); \\ -\pi p \frac{F(\pi/2, \sqrt{1 - k^2})}{F(\pi/2, k)} &= -k\nu F(\pi/2, \sqrt{1 - k^2}) = -k\nu \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 s}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\xi_{0,p} \searrow 1$ при $p \rightarrow \infty$, то $k = \sqrt{2/(\xi_{0,p} + 1)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 1$ и подынтегральное выражение стремится к 1. Таким образом, установлено, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} q^p = e^{-\pi\nu/2},$$

откуда сразу же следует справедливость предельных равенств из (15) и (16).

Остаётся заметить, что решениям (9) при $z_0 = \varphi_{0,p}$ ($\sin \varphi_{0,p} > 0$) отвечают седловые периодические решения исходного уравнения, а интересующие нас эллиптические решения получаются при $z_0 = \varphi_{1,p}$ ($\sin \varphi_{1,p} < 0$). Мультипликаторы решений — это спектр матрицы Якоби

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial z_0}(2\pi, z_0, \xi_0, \varepsilon) & \frac{\partial z}{\partial \xi_0}(2\pi, z_0, \xi_0, \varepsilon) \\ \frac{\partial \xi}{\partial z_0}(2\pi, z_0, \xi_0, \varepsilon) & \frac{\partial \xi}{\partial \xi_0}(2\pi, z_0, \xi_0, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

вычисленный на найденных выше решениях системы (5). Рассмотрим подробнее характеристический многочлен матрицы (17)

$$\det(\mathbb{J} - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda + \varepsilon \frac{\partial z_1}{\partial z_0}(2\pi) + O(\varepsilon^2) & \frac{\partial z_0}{\partial \xi_0}(2\pi) + \varepsilon \frac{\partial z_1}{\partial \xi_0} 2\pi + O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon \frac{\partial \xi_1}{\partial z_0}(2\pi) + O(\varepsilon^2) & 1 - \lambda + \varepsilon \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_0}(2\pi) + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix}.$$

Обозначим за $\mu = 1 - \lambda$ и раскроем определитель с точностью до слагаемых порядка ε . Получим многочлен

$$\mu^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial z_1}{\partial z_0}(2\pi) + \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_0}(2\pi) \right) \mu - \frac{\partial z_0}{\partial \xi_0}(2\pi) \frac{\partial \xi_1}{\partial z_0}(2\pi) \varepsilon = 0. \quad (18)$$

Запишем его дискриминант, отбрасывая слагаемые порядка ε^2 :

$$D = 4 \frac{\partial z_0}{\partial \xi_0}(2\pi) \frac{\partial \xi_1}{\partial z_0}(2\pi) \varepsilon.$$

То есть тип корней многочлена (18) определяется знаком произведения

$$\frac{\partial z_0}{\partial \xi_0}(2\pi) \frac{\partial \xi_1}{\partial z_0}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\nu ds}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}^3} \cdot a \sin z_0 I_p.$$

Так как $a I_p \int_0^{2\pi} \frac{\nu ds}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}^3} > 0$, то знак дискриминанта совпадает со знаком $\sin z_0$.

Теперь перейдём к вопросу о существовании колебательных эллиптических периодических решений у рассматриваемой системы. Воспользуемся тем фактом, что при $\varepsilon = 0$ система обладает семейством колебательных решений, задающихся равенствами

$$x = 2 \arcsin(k \operatorname{sn}(\varphi/\omega, k)), \quad \dot{x} = 2k \operatorname{cn}(\varphi/\omega, k), \quad (19)$$

где $k \in (0, 1)$ — произвольный параметр, переменная $0 \leq \varphi \leq 2\pi \pmod{2\pi}$ меняется по закону $\dot{\varphi} = \omega$, частота $\omega = \omega(k)$ определяется той же формулой, что и в (12), а в эллиптическом синусе и косинусе подчёркнута явная зависимость от k .

Стандартным образом, произведя замену $\dot{x} = y$, $z = \nu t$, перейдём от исходного уравнения к трёхмерной системе; затем выполним в получившейся системе замену переменных $(x, y) \rightarrow (k, \varphi)$, исходя из формул (19) и приняв φ за новое время, приходим к системе с 2π -периодическими по φ правыми частями, имеющей вид

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\varphi} = \frac{\nu}{\omega} + O(\varepsilon), \\ \frac{dk}{d\varphi} = \frac{\varepsilon}{2\omega} \operatorname{cn}(\varphi/\omega, k)(a \cos z - 2k \operatorname{cn}(\varphi/\omega, k)) + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (20)$$

Обозначим через $(z(\varphi, z_0, k_0, \varepsilon), k(\varphi, z_0, k_0, \varepsilon))$ решение рассматриваемой системы с произвольно фиксированными начальными условиями $k_0 \in (0, 1)$, $z_0 \in \mathbb{R}$, заданными при $\varphi = 0$, и рассмотрим уравнения

$$z(2\pi, z_0, k_0, \varepsilon) = z_0 \pmod{2\pi}, \quad k(2\pi, z_0, k_0, \varepsilon) = k_0 \quad (21)$$

для определения начальных условий интересующих нас периодических движений.

Подставим в (21) вытекающие из (20) и справедливые равномерно по $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ асимптотические представления для $z(\varphi, z_0, k_0, \varepsilon)$ и $k(\varphi, z_0, k_0, \varepsilon)$

$$z(\varphi, z_0, k_0, \varepsilon) = z_0(\varphi) + \varepsilon z_1(\varphi) + O(\varepsilon^2), \quad k(\varphi, z_0, k_0, \varepsilon) = k_0 + \varepsilon k_1(\varphi) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$z_0(\varphi) = z_0 + \frac{\nu\varphi}{\omega}, \quad k_1(\varphi) = \frac{1}{2\omega} \int_0^\varphi \operatorname{cn}\left(\frac{\tau}{\omega}, k\right) \left(a \cos\left(z_0 + \frac{\nu\tau}{\omega}\right) - 2k \operatorname{cn}\left(\frac{\tau}{\omega}, k\right) \right) d\tau.$$

Таким образом, для определения k_0 приходим к равенству

$$\frac{\nu}{\omega(k_0)} = p, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

При $0 < k_0 < 1$ функция $1/\omega(k_0)$ монотонно возрастает от 1 до $+\infty$, откуда следует, что данное уравнение имеет единственное решение $k_{0,p}$ для каждого натурального p , начиная с номера $p_0 = [\nu] + 1$ ($[\ast]$ – целая часть). Условие для определения z_0 имеет вид

$$\frac{1}{2\omega(k_{0,p})} \int_0^{2\pi} \operatorname{cn}\left(\frac{\varphi}{\omega(k_{0,p})}, k_{0,p}\right) \left(a \cos\left(z_0 + \frac{\nu\varphi}{\omega(k_{0,p})}\right) - 2k \operatorname{cn}\left(\frac{\varphi}{\omega(k_{0,p})}, k_{0,p}\right) \right) d\varphi = 0.$$

С целью упростить выражение раскроем косинус суммы:

$$\frac{1}{2\omega} \int_0^{2\pi} \operatorname{cn}\left(\frac{\varphi}{\omega}, k\right) \left(a \cos z_0 \cos\left(\frac{\nu\varphi}{\omega}\right) - a \sin z_0 \sin\left(\frac{\nu\varphi}{\omega}\right) - 2k \operatorname{cn}\left(\frac{\varphi}{\omega}, k\right) \right) d\varphi = 0, \quad (23)$$

где $k = k_{0,p}$, $\omega = \omega(k_{0,p})$. Интеграл по периоду от периодической нечётной функции $\operatorname{cn}\left(\frac{\varphi}{\omega(k_{0,p})}, k_{0,p}\right) \sin\left(\frac{\nu\varphi}{\omega(k_{0,p})}\right)$ равен нулю, следовательно, равенство (23) примет более простой вид

$$a \cos z_0 \cdot \frac{1}{2\omega} \int_0^{2\pi} \operatorname{cn}\left(\frac{\varphi}{\omega}, k\right) \cos\left(\frac{\nu\varphi}{\omega}\right) d\varphi = \frac{k}{\omega} \int_0^{2\pi} \operatorname{cn}^2\left(\frac{\varphi}{\omega}, k\right) d\varphi, \quad (24)$$

где $k = k_{0,p}$, $\omega = \omega(k_{0,p})$. Обозначим

$$I_p = \frac{1}{2\omega(k_{0,p})} \int_0^{2\pi} \operatorname{cn}\left(\frac{\varphi}{\omega(k_{0,p})}, k_{0,p}\right) \cos\left(\frac{\nu\varphi}{\omega(k_{0,p})}\right) d\varphi.$$

Пользуясь разложением Фурье

$$\operatorname{cn} u = \frac{4\omega}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}} \cos[(2n+1)\omega u],$$

где q определяется формулой (14), легко видеть, что

$$I_p = \begin{cases} \frac{2\pi}{k_{0,p}} \frac{q^{p/2}}{1+q^p} > 0, & \text{если } p \text{ – нечётное число} \\ 0, & \text{если } p \text{ – чётное число} \end{cases} \quad (25)$$

и

$$\frac{k_{0,p}}{\omega} \int_0^{2\pi} \operatorname{cn}^2\left(\frac{\varphi}{\omega(k_{0,p})}, k_{0,p}\right) d\varphi = 2\pi \frac{k_{0,p}^2 - 1}{\omega(k_{0,p})k_{0,p}} + \frac{4E}{k_{0,p}}.$$

Таким образом, при выполнении ограничений на параметры:

$$a > a_p^2, \quad \text{где } a_p^2 = \frac{2E(1+q^p)}{\pi q^{p/2}} \quad \text{и } p \text{ – нечётное,}$$

система, состоящая из равенств (22) и (24), допускает наборы решений

$$(z_0, k_0) = (\psi_{0,p}, k_{0,p}), (\psi_{1,p}, k_{0,p}), \quad p \in \mathbb{N}, \text{ нечётное}, \quad (26)$$

а $\psi_0, \psi_1 \in [0, 2\pi]$ и $\psi_0 < \psi_1$.

Из соотношений (25) следует, что любому решению (26) с нечётным номером p в исходном уравнении соответствует колебательное периодическое движение. Для определения типа этого движения в очередной раз рассмотрим матрицу Якоби на найденных решениях

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial z_0}(2\pi, z_0, k_0, \varepsilon) & \frac{\partial z}{\partial k_0}(2\pi, z_0, k_0, \varepsilon) \\ \frac{\partial k}{\partial z_0}(2\pi, z_0, k_0, \varepsilon) & \frac{\partial k}{\partial k_0}(2\pi, z_0, k_0, \varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Отбрасывая слагаемые порядка ε^2 , получаем характеристический многочлен матрицы (27)

$$\mu^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial z_1}{\partial z_0}(2\pi) + \frac{\partial k_1}{\partial k_0}(2\pi) \right) \mu - \varepsilon \frac{\partial z_0}{\partial k_0}(2\pi) \frac{\partial k_1}{\partial z_0}(2\pi) = 0$$

и его дискриминант

$$D = 4\varepsilon \frac{\partial z_0}{\partial k_0}(2\pi) \frac{\partial k_1}{\partial z_0}(2\pi) = -16\varepsilon\nu \int_0^{2\pi} \frac{k \sin^2 s ds}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}^3} \cdot \frac{\partial k_1}{\partial z_0}(2\pi).$$

Поскольку
$$\int_0^{2\pi} \frac{k \sin^2 s ds}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}^3} > 0$$

и
$$\frac{\partial k_1}{\partial z_0}(2\pi) = -\frac{a}{2\omega(k_0)} \sin z_0 \int_0^{2\pi} \operatorname{cn}\left(\frac{\varphi}{\omega(k_0)}, k_0\right) \cos \frac{\varphi}{\omega(k_0)} d\varphi = -\frac{a}{2\omega(k_0)} \sin z_0 I_p,$$

решениям (26) при $z_0 = \psi_{0,p}$ ($\sin \psi_{0,p} > 0$) отвечают седловые периодические решения исходной системы, а при $z_0 = \psi_{1,p}$ ($\sin \psi_{1,p} < 0$) – эллиптические.

В заключение отметим, что последовательности критических значений обладают общим пределом $a_\infty = \frac{2}{\pi}(e^{\pi\nu/2} + e^{-\pi\nu/2})$ (см. (16)) и для их элементов выполняется неравенство: $a_p^1 < a_p^2$. Действительно, обозначим решение первого равенства из (11) u_p , а решение (22) – v_p . Из (11) и (22) следует

$$2F(\pi/2, v_p) = u_p F(\pi/2, u_p) < 2F(\pi/2, u_p).$$

Поскольку функция $F(\pi/2, k)$ монотонно возрастает по $k \in (0, 1)$, то $v_p < u_p$. Для удобства запишем элементы последовательностей критических значений в следующем виде:

$$a_p^1 = \frac{4}{\pi} E(u_p) \operatorname{ch}\left(\nu u_p F(\pi/2, \sqrt{1 - u_p^2})\right),$$

$$a_p^2 = \frac{4}{\pi} E(v_p) \operatorname{ch}\left(\nu F(\pi/2, \sqrt{1 - v_p^2})\right).$$

Так как функция $E(k)$, где $0 < k < 1$, монотонно убывает, а $\operatorname{ch}(x)$, где $x > 0$, монотонно возрастает, очевидно, что $a_p^1 < a_p^2$.

Также стоит отметить, что, если для систем (4) и (20) рассмотреть периодические условия (5) и (21) соответственно с периодами $2\pi m$, где $m > 1$, то значения I_p , где p – взаимно просто с m , окажутся равными нулю и равенства для определения ξ_0 и k_0 будут иметь вид $0 = \operatorname{const} > 0$. То есть такого типа периодических движений (называемых ультрасубгармониками) в исследуемой системе (1) не существует.

Таким образом, при выборе подходящего ε и $a > a_\infty$ можно гарантировать сосуществование в системе (1) любого наперёд заданного конечного числа устойчивых периодических движений как вращательного, так и колебательного типов. Что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Глызин, С.Д. Явление буферности в системах с полутора степенями свободы / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // ЖВМ и МФ. — 2006. — Т.46, № 9. — С. 1503 – 1514.
2. Уиттекер, Э.Т. Курс современного анализа. Ч.2. Трансцендентные функции / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. — М.: "ФИЗМАТЛИТ", 1963. — 500 с.
3. Колесов, А.Ю. Явление буферности в системах, близких к гамильтоновым / А.Ю. Колесов, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов // Тр. Института матем. и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 109 – 140.

The Buffer Phenomenon in One Pendulum Type Equation

Sandulyak D.V.

An equation describing induced oscillations of the non-linear pendulum with small friction under external force is considered. We establish that the Hamilton's scenario of the buffer phenomenon takes place in this dynamical system. We prove that any predetermined finite number of stable periodic solutions exists in the phase space if the parameters are appropriately chosen. These solutions appear as a result of a cascade of saddle-node type bifurcations.