Модел. и анализ информ. систем. Т.**14**, №**2** (2007) 75–82

УДК 517.9

Бифуркация Андронова – Хопфа для релейных систем

Чернышева О. А.
Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14,
e-mail: olga.chernyshova@gmail.com,

получена 17 мая 2007

Аннотация

Описывается структура матрицы монодромии периодических решений релейных систем, что позволяет сформулировать общий критерий орбитальной экспоненциальной устойчивости цикла. Данная теорема используется, в частности, при разработке аналога бифуркационной теоремы Андронова – Хопфа.

1. Устойчивость по первому приближению цикла

Считая матрицу A гурвицевой, в $R^n, n \geq 2$, рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = Ax + a\varphi(\sigma), \qquad \sigma = (b, x), \tag{1}$$

с релейной нелинейностью

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \leq -d, \\ -1, & \sigma \geq d, \end{cases} \tag{2}$$

где d – неотрицательная постоянная, σ – скалярное произведение.

Напомним понятие решения уравнения (1) с нелинейностью (2). Пусть для определенности $x(0)$ таково, что $\sigma(0) = (b, x(0)) < -d$. Тогда решение уравнения (1) – это решение уравнения

$$\dot{x} = Ax + a. \tag{3}$$

Допустим, найдется такой первый момент времени $t_1 > 0$, что

$$\sigma(t_1) = (b, x(t_1)) = d.$$

В этот момент времени происходит переключение, означающее, что при последующих t $x(t)$ является решением уравнения

$$\dot{x} = Ax - a, \tag{4}$$

с начальным условием $x(t_1)$. Предположим, имеется такой первый момент $t_2 > t_1$, что

$$\sigma(t_2) = (b, x(t_2)) = -d.$$

Тогда снова происходит переключение: в последующие моменты времени $x(t)$ – решение уравнения (3) с начальными условиями $x(t_2)$.

Напомним также, что переключение называется нормальным, если

$$\dot{\sigma}(t_{2k-1} - 0) > 0, \qquad \dot{\sigma}(t_{2k} - 0) < 0, \qquad k = 1, 2, ... \tag{5}$$

Из (3), (4) следует, что в точках переключения производная решения разрывна. Поэтому содержательна форма записи неравенств (5).

Считаем, что система (1), (2) имеет цикл $x_0(t)$ с нормальными моментами переключений $0 < t_1 < ... < t_p < T$ на временном промежутке длины периода T. Для определенности считаем, что для указанных моментов времени выполнены неравенства (5). Введем понятие матрицы монодромии V.

Пусть $U(t)$, $U(0) = I$ — фундаментальная матрица уравнения

$$\dot{h} = Ah, \tag{6}$$

решения которого $h(t) = U(t - t_{s-1})h(t_{s-1} + 0)$ подчинены условиям перенормировки

$$h(t_s + 0) = h(t_s - 0) + (\dot{x}_0(t_s + 0) - \dot{x}_0(t_s - 0))\,\frac{(b, h(t_s - 0))}{\dot{\sigma}(t_s - 0)}. \tag{7}$$

Тогда по определению $V = U(T)$. Подчеркнем, что $h(t) = \dot{x}_0(t)$ при $t \neq t_s$ удовлетворяет уравнению (6), а в моменты переключений – условиям (7). Отметим, что единица является собственным числом матрицы монодромии.

Теорема 1. *Цикл $x_0(t)$ орбитально экспоненциально устойчив в том и только том случае, если единица является простым собственным числом матрицы монодромии, а остальные ее мультипликаторы лежат внутри единичного круга.*

Доказательство. Фактически доказательство содержится в [1] (см. также [2], [3]). Поэтому ограничимся объяснением вывода равенства (7) для первого момента переключения t_1.

Пусть $x(t, h) = x_0(t) + h(t),\ h(0) = h$. Имеем $(x_0(t(h)) + h(t(h)), b) = d$, а значит,

$$(t_1', h) = -\frac{(b, h(t_1 - 0))}{\dot{\sigma}(t_1 - 0)}, \tag{8}$$

При $t > t_1$ в силу (4) в первом приближении по h

$$x(t, x(t(h), h)) = e^{A(t - t(h))}(x(t(h), h) - A^{-1}a) + A^{-1}a =$$
$$= x_0(t) + e^{A(t - t_1)}(h(t_1 - 0) - (t_1', h)(\dot{x}_0(t_1 + 0) - \dot{x}_0(t_1 - 0))) + ...$$

Остановимся подробнее на этом равенстве. Имеем

$$x(t(h), h) = x_0(t(h)) + h(t_1 - 0) + ... = x_0(t_1) + (t_1', h)\dot{x}_0(t_1 - 0) + h(t_1 - 0) + ...,$$

$$e^{A(t - t_1(h))}(x_0(t_1) - A^{-1}a) + A^{-1}a = x_0(t_1) - (t_1', h)\dot{x}_0(t_1 + 0) + ...,$$

отсюда и следует упомянутое равенство. Так как добавка равна $h(t)$, отсюда путем предельного перехода при $t \to t_1 + 0$ (с учетом (8)) приходим к (7) при $s = 1$. Доказательство закончено.

В качестве примера рассмотрим известное уравнение [4]

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + x + \varphi(\dot{x}) = 0, \tag{9}$$

где $0 < \alpha < 1$, а φ – стандартное идеальное реле, т.е. в (2) $d = 0$.

Через $x_1(t)$ обозначим решение следующей задачи:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + x = 1,\ \dot{x}(0) = 0. \tag{10}$$

Очевидно, что решение задачи (10) доставляется формулой

$$x_1(t) = 1 - ce^{-\alpha t}(\alpha \sin\omega t + \omega\cos\omega t),\ \omega = \sqrt{1 - \alpha^2}, \tag{11}$$

где постоянную c определим в последующем. Из (11) вытекает, что

$$\sigma(t) = \dot{x}_1(t) = ce^{-\alpha t}\sin\omega t. \tag{12}$$

Из (12) следует, что $c > 0$ и что полупериод искомого цикла $x_0(t)$ равен $\frac{\pi}{\omega}$.

Итак, $\sigma_0(t) = \dot{x}_0(t)$. Отсюда и из формулы (11) вытекает, что

$$\dot{\sigma}_0(-0) = \dot{\sigma}_0(2\pi/\omega - 0) = c\omega e^{-\alpha\pi/\omega},\ \dot{\sigma}_0(\pi/\omega - 0) = -c\omega e^{-\alpha\pi/\omega}. \tag{13}$$

Остается определить постоянную c. Из (11) следует, что

$$x_0\left(\frac{\pi}{\omega} - 0\right) = 1 + c\omega e^{-\alpha\pi/\omega},\ x_0\left(\frac{\pi}{\omega} + 0\right) = -1 + c\omega. \tag{14}$$

Формулы (14) означают, что непрерывность $x_0(t)$ обеспечивает равенство

$$c = \frac{2}{\omega\left(1 - e^{-\alpha\pi/\omega}\right)}. \tag{15}$$

Из (12) непрерывная дифференцируемость $x_0(t)$ следует автоматически: при переключениях значения левых и правых производных одновременно равны нулю.

Таким образом, построение периодического решения $x_0(t)$ уравнения (9) закончено. Перейдем к доказательству его устойчивости. С этой целью уравнение (9) запишем в виде системы

$$\dot{u} = Au - e_2\varphi(\sigma),\ \sigma = (u, e_2), \quad u = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Прямая выкладка показывает, что

$$e^{At} = e^{-\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\frac{1}{\omega}\sin\omega t & \cos\omega t - \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t \end{pmatrix},$$

а значит,

$$e^{\frac{\pi}{\omega}A} = e^{-\alpha\pi/\omega}I, \quad e^{\frac{2\pi}{\omega}A} = e^{-\alpha\frac{2\pi}{\omega}}I. \tag{17}$$

Все подготовлено, чтобы воспользоваться теоремой 1.

Положим $h = h(-0)$, что в силу (7) и (16) приводит к равенству

$$h(+0) = h + 2e_2\frac{(e_2, h)}{\dot{\sigma}_0(-0)}. \tag{18}$$

Из (18) и первого равенства (17) заключаем, что

$$h\left(\frac{\pi}{\omega} - 0\right) = -e^{-\alpha\pi/\omega}\left(h + 2e_2\frac{(e_2, h)}{\dot{\sigma}_0(-0)}\right). \tag{19}$$

Переход от $h\left(\frac{\pi}{\omega} - 0\right)$ к $h\left(\frac{\pi}{\omega} + 0\right)$ осуществляется по подобной (18) формуле

$$h\left(\frac{\pi}{\omega} + 0\right) = h\left(\frac{\pi}{\omega} - 0\right) - 2e_2\frac{\left(e_2, h\left(\frac{\pi}{\omega} - 0\right)\right)}{\dot{\sigma}_0\left(\frac{\pi}{\omega} - 0\right)}. \tag{20}$$

Вспоминая о равенствах (13) и учитывая (19) в (20), получаем

$$\begin{aligned} h\left(\frac{\pi}{\omega} + 0\right) = e^{-\alpha\pi/\omega}\left[\left(h + 2e_2\frac{(e_2, h)}{\dot{\sigma}_0(-0)}\right) + \right. \\ \left. + \ \frac{2e_2}{\dot{\sigma}_0(-0)}\left(e_2, h + 2e_2\frac{(e_2, h)}{\dot{\sigma}_0(-0)}\right)\right]. \end{aligned} \tag{21}$$

Напомним, что согласно (7) $Vh = h\left(\frac{2\pi}{\omega} - 0\right) = -e^{-\alpha\pi/\omega}h\left(\frac{2\pi}{\omega} + 0\right)$. Отсюда и из (21) выводим, что $V = \Pi^2$, где

$$\Pi h = -e^{-\alpha\pi/\omega}\left(h + 2e_2\frac{(e_2, h)}{\dot{\sigma}_0(-0)}\right). \tag{22}$$

В силу (22) и (13), (15) дело свелось к рассмотрению спектральной задачи

$$-e^{-\alpha\pi/\omega}h - \left(1 - e^{-\alpha\pi/\omega}\right)e_2(e_2, h) = \rho h,$$

решения которой доставляют равенства $\rho_1 = -1$ при $h = e_2$ и $\rho_2 = -e^{-\alpha\frac{\pi}{\omega}}$ при $h = e_1$. Тем самым уравнение (9) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл.

2. Бифуркация Андронова – Хопфа для систем с идеальным реле

Здесь считаем реле идеальным, т.е. в (2) $d = 0$. Подчеркнем, что при этом условии функция $\varphi(\sigma)$ в нуле не имеет конкретного значения. В связи с этим возникает определенное затруднение с формулировкой одного из основных предположений. Чтобы сформулировать его суть, рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = Ax - Ma\,(b, x), \tag{23}$$

в котором положительная постоянная M произвольно велика, естественным образом возникающее [5] при решении проблемы о локальной устойчивости нулевого состояния равновесия уравнения (1) с нелинейностью

$$\varphi(\sigma) = \left\{1, \sigma \le -\frac{1}{M};\ -M\sigma, -\frac{1}{M} \le \sigma \le \frac{1}{M};\ -1, \sigma \ge \frac{1}{M}\right\}. \tag{24}$$

Пусть $P(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})$. Из структуры правой части уравнения (23) вытекает, что характеристический многочлен связанной с ним матрицы представим в виде

$$\frac{1}{M} + \big((\lambda I - A)^{-1}a, b\big) = \frac{1}{M} + \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}, \tag{25}$$

где степень многочлена Q равна $n-1$ при $(a,b) \neq 0$.

Равенство (25) означает, что характеристическое уравнение рассматриваемой матрицы записывается в виде сингулярного равенства:

$$\frac{1}{M}P(\lambda) + Q(\lambda) = 0. \tag{26}$$

Из известного [5] имеем: если многочлен Q является гурвицевым, то при $(a,b) > 0$, что означает согласованность знаков их коэффициентов P и Q, корни уравнения (26) располагаются в левой комплексной полуплоскости.

В дальнейшем предполагаем, что

$$(a,b) = \varepsilon, \tag{27}$$

где ε – малый положительный параметр. Например, если

$$a = a_0 + \varepsilon a_1, \qquad (a_0, b) = 0, \qquad (a_1, b) = 1. \tag{28}$$

По построению многочлен $Q(\lambda)$ зависит от ε. Через $Q_0(\lambda)$ обозначим его значение при $\varepsilon = 0$. В этом случае многочлен (26) является при всех M гурвицевым, если при $n \geq 3$ дополнительно [5]

$$(Aa, b) > 0, \qquad (A^2a, b) < 0. \tag{29}$$

Здесь предполагается, что отделенность от нуля является квалифицированной, т.е. неравенства сохраняются и при $\varepsilon = 0$.

Условимся называть основной бифуркационной проблемой для уравнения (1) в $R^n, n \geq 3$, с идеальным реле, если равенство (27) дополнено неравенствами

$$(Aa, b) > 0, \qquad (A^2a, b) > 0. \tag{30}$$

Поясним их смысл на примере уравнения

$$\dddot{x} + c_3\ddot{x} + c_2\dot{x} + c_1x = \varphi(\sigma),\ \sigma = b_1x + b_2\dot{x} + b_3\ddot{x}, \tag{31}$$

где $b_k > 0$. Запишем (31) в виде системы

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = z,\ \dot{z} = -c_1x - c_2y - c_3z + \varphi(\sigma), \tag{32}$$

где согласно (31) $\sigma = b_1x + b_2y + b_3z$. Эйлеровы показатели экспонент линейной части системы (32) определяются из равенств

$$\lambda x - y = 0, \qquad \lambda y - z = 0, \qquad \lambda z + c_1x + c_2y + c_3z = 1. \tag{33}$$

Из (33) собственный вектор $x = \frac{1}{P(\lambda)},\ y = \frac{\lambda}{P(\lambda)},\ z = \frac{\lambda^2}{P(\lambda)}$, где $P(\lambda) = \lambda^3 + c_3\lambda^2 + +c_2\lambda + c_1$. Отсюда и из (31) следует, что

$$\big((\lambda I - A)^{-1}a, b\big) = \frac{b_3\lambda^2 + b_2\lambda + b_1}{P(\lambda)} = \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}, \tag{34}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{pmatrix}$, $a = e_3$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Из (25) и (34) вытекает, что

$$P(\lambda) + MQ(\lambda) = \lambda^3 + (c_3 + Mb_3)\lambda^2 + (c_2 + Mb_2)\lambda + c_1 + Mb_1. \tag{35}$$

Отметим, что при больших M гурвицевость многочлена (35) влечет неравенство

$$M^2b_2b_3 + M(b_2c_3 + b_3c_2 - b_1) + c_2c_3 - c_2 > 0. \tag{36}$$

Имеем

$$((I + \frac{1}{\lambda}A + \frac{1}{\lambda^2}A^2 + \ldots)^{-1}a, b) = \lambda\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)},$$

а значит, в силу (34) $\lambda\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)} \to (a, b) = b_3$ при $\lambda \to \infty$.

При $b_3 = 0$ неравенство (36) содержательно, если

$$b_2c_3 - b_1 > 0. \tag{37}$$

При том же ограничении из (34) следует, что при $\lambda \to \infty$

$$\lambda^2\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)} \to (Aa, b) = b_2, \quad \lambda\left(\lambda^2\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)} - b_2\right) \to (A^2a, b) = b_1 - b_2c_3. \tag{38}$$

Тем самым в данном примере при

$$b_3 = \varepsilon, \quad b_1 - b_2c_3 > 0, \tag{39}$$

и при таких больших M, что $\varepsilon M << 1$, имеем колебательную неустойчивость.

Теорема 2. *В рамках основной бифуркационной проблемы уравнение* (1) *в* $R^n, n \geq 3$, *с идеальным реле имеет орбитально экспоненциально устойчивый цикл* $x_0(t)$ *с периодом* $\frac{2\pi}{\omega}$, *где*

$$\omega = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(A^2a, b)}{3\varepsilon}} + O(\sqrt{\varepsilon}), \tag{40}$$

и двумя переключениями на промежутке длины периода. Его амплитуда по порядку равна $\varepsilon^{1/2}$, *а соответствующий управляющий сигнал* $\sigma_0(t)$ *по порядку равен* ε.

Доказательство. Согласно (4) и (3) имеем

$$x_1(t) = e^{At}(x_0 - A^{-1}a) + A^{-1}a, \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}, \tag{41}$$

$$x_2(t) = e^{At}(x_1(\frac{\pi}{\omega}) + A^{-1}a) - A^{-1}a, \ \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}. \tag{42}$$

Из (41), (42) и равенства $x_2(\frac{2\pi}{\omega}) = x_0$ следует, что

$$x_0 = -\left(I + e^{\frac{\pi}{\omega}A}\right)^{-1}\left(I - e^{\frac{\pi}{\omega}A}\right)A^{-1}a. \tag{43}$$

Из (43) и (41) получаем

$$x_1(t) = -2e^{At}\left(I + e^{\frac{\pi}{\omega}A}\right)^{-1}A^{-1}a + A^{-1}a, \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}. \tag{44}$$

Отсюда и из (42) заключаем, что

$$x_2(t) = -x_1\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right), \ \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}. \tag{45}$$

Частоту колебаний ω ищем из равенства $(x_0, b) = 0$. Чтобы с ним разобраться, воспользуемся равенством

$$\left(I + e^{\frac{\pi}{\omega}A}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left[I + \frac{1}{2}\left(I - e^{\frac{\pi}{\omega}A}\right) + \frac{1}{4}\left(I - e^{\frac{\pi}{\omega}A}\right)^2 + \ldots\right] \tag{46}$$

и формулой (43), позволяющей заключить, что

$$x_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\omega}a + \frac{\pi^3}{12\omega^3}A^2a + O\left(\frac{1}{\omega^5}\right)\right). \tag{47}$$

Из (27) и (47) следует, что рассматриваемое равенство эквивалентно соотношению

$$\varepsilon = \frac{\pi^2}{12\omega^2}\left(A^2a, b\right) + O\left(\frac{1}{\omega^4}\right). \tag{48}$$

Вывод равенства (48) означает, что справедлива формула (40).

Для завершения доказательства существования $\frac{2\pi}{\omega}$-периодического решения $x_0(t)$, связанного с равенствами (44) и (45), остается показать, что

$$\sigma_0(t) = (x_1(t), b) > 0,\ 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, \tag{49}$$

и что

$$\dot\sigma_0(0) > 0,\ \dot\sigma_0(\frac{\pi}{\omega}) < 0. \tag{50}$$

Предварительно отметим следующее. По построению $\sigma_0(0) = 0$, а так как в силу (44) и (43) $x_1(\frac{\pi}{\omega}) = -x_0$, то и $\sigma_0(\frac{\pi}{\omega}) = 0$.

Остановимся сначала на доказательстве неравенств (50). В силу (44) и формулы (46)

$$\dot x_1(0) = -\left(I - \frac{\pi}{2\omega}A + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right)\right)a,$$

а значит, согласно (27)

$$\dot\sigma_0(0) = \frac{\pi}{2\omega}(Aa, b) - \varepsilon + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right). \tag{51}$$

Из (51), формулы (48) и первого неравенства (29) следует первое неравенство (50). Доказательство же второго неравенства (50) из доказанной формулы (51) и равенства $\dot x_1(\frac{\pi}{\omega}) = -2a - \dot x_1(0)$ достаточно просто выводится из (44).

Из первого неравенства (28) и (44) следует, что

$$\ddot\sigma_0(t) = -2(Aa, b) + O\left(\frac{1}{\omega}\right) < 0,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{\omega}, \tag{52}$$

т.е. на рассматриваемом временном отрезке функция $\sigma_0(t)$ выпукла. Тем самым закончено построение $\frac{2\pi}{\omega}$ – периодического решения $x_0(t)$ с двумя переключениями на произвольном временном промежутке длины периода, причем выполнены условия нормального переключения. Остается разобраться со свойствами его устойчивости.

Положим $h(-0) = h$. Из формул (7) выводим, что $h(+0) = h + 2a\frac{(b,h)}{\dot\sigma_0(2\pi/\omega - 0)}$. Но согласно (44) и (45)

$$\dot x_2\left(\frac{2\pi}{\omega} - 0\right) = -\dot x_1\left(\frac{\pi}{\omega} - 0\right) = -2a - \dot x_1(+0). \tag{53}$$

Поэтому с точностью до слагаемых порядка ε, которые не повлияют на итоговый результат, имеет место равенство

$$h(+0) = h + 2a\frac{(b,h)}{\dot\sigma_0(0)},\ \dot\sigma_0(0) = \dot\sigma_0(+0). \tag{54}$$

Из (54) заключаем, что

$$h\left(\frac{\pi}{\omega} - 0\right) = e^{\frac{\pi}{\omega}A}\left(h + 2a\frac{(b,h)}{\dot\sigma_0(0)}\right). \tag{55}$$

Еще раз воспользуемся одной из подходящих формул (7), что в соответствии с (55) приводит к последовательности соотношений

$$\begin{aligned} h\left(\frac{\pi}{\omega} + 0\right) &= h\left(\frac{\pi}{\omega} - 0\right) - 2a\frac{\left(b, h\left(\frac{\pi}{\omega} - 0\right)\right)}{\dot\sigma_0\left(\frac{\pi}{\sigma} - 0\right)} = e^{\frac{\pi}{\omega}A}\left(h + 2a\frac{(b,h)}{\dot\sigma_0(0)}\right) + \\ &+ \frac{2a}{\dot\sigma_0(0)}\left(b, e^{\frac{\pi}{\omega}A}\left(h + 2a\frac{(b,h)}{\dot\sigma_0(0)}\right)\right), \end{aligned} \tag{56}$$

при составлении которых используем равенства (53), позволяющие опустить несущественные слагаемые порядка ε.

Итак,

$$Vh = h\left(\frac{2\pi}{\omega} - 0\right) = e^{\frac{\pi}{\omega}A}h\left(\frac{\pi}{\omega} + 0\right). \tag{57}$$

Равенства (56) позволяют выявить подробности формулы (57):

$$Vh = e^{\frac{2\pi}{\omega}A}\left(h + 2a\frac{(b,h)}{\dot\sigma_0(0)}\right) + \frac{2}{\dot\sigma_0(0)}\left(b, e^{\frac{\pi}{\omega}A}\left(h + 2a\frac{(b,h)}{\dot\sigma_0(0)}\right)\right)e^{\frac{\pi}{\omega}A}a. \tag{58}$$

Анализ формулы (58) приводит к заключению, что $V = \Pi^2$, где

$$\Pi h = e^{\frac{\pi}{\omega}A}\left(h + 2a\frac{(b,h)}{\dot\sigma_0(0)}\right). \tag{59}$$

Для завершения доказательства следует показать, что $(n-1)$ собственных значений оператора (59) находятся внутри единичного круга.

Из (59) вытекает, что

$$\frac{1}{2}\dot\sigma_0(0)h = (b,h)(\mu e^{-\frac{\pi}{\omega}A} - I)^{-1}a,$$

где μ – собственное число рассматриваемого оператора, а значит,

$$\frac{1}{2}\dot\sigma_0(0) = ((\mu e^{-\frac{\pi}{\omega}A} - I)^{-1}a, b).$$

Покажем, что $|\mu|$ ограничено при $\varepsilon \to 0$. Действительно, предположим, что это не так. Тогда в силу (51) с требуемой точностью

$$\frac{\pi}{4\omega}\mu(Aa,b) = ((e^{-\frac{\pi}{\omega}} - \frac{1}{\mu}I)^{-1}a, b),$$

откуда и из (40) вытекает, что $\mu \sim \sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. получаем противоречие.

Стандартным образом считаем, что

$$\mu = 1 + \frac{\pi}{\omega}\lambda + O(\varepsilon).$$

В этом случае характеристическое уравнение преобразуется к виду

$$-\frac{\pi^2}{4\omega^2(Aa,b)} = ((\lambda I - A)a, b),$$

т.е.

$$Q(\lambda) + \frac{\pi^2}{4\omega^2(Aa,b)}P(\lambda) = 0. \tag{60}$$

Один корень уравнения (60) по порядку равен $-\varepsilon^{-1}$. Другой корень определяется из равенства

$$\lambda + \frac{\pi^2\varepsilon}{4\omega^2(Aa,b)} = 0,$$

а значит, отрицателен и по порядку равен 1. Главные части остальных $n-2$ корней находятся из уравнения

$$Q_0(\lambda) = 0.$$

По предположению многочлен $Q(\lambda)$ является гурвицевым. Отсюда следует [6], что таковым является и многочлен $Q_0(\lambda)$.

Напоминаем, что одно собственное число оператора (59) равно 1. В силу (60) остальные его собственные значения находятся внутри единичного круга на расстоянии порядка $\sqrt{\varepsilon}$ от его границы.

Доказательство закончено.

В частности, данная теорема применима к уравнению (31) при ограничениях (39).

Самостоятельный интерес представляют уравнения второго порядка с идеальным реле

$$\ddot x + c_2\dot x + c_1 x = \varphi(\sigma), \qquad \sigma = b_1 x + b_2\dot x, \tag{61}$$

где все параметры, исключая b_2, считаем положительными. Уравнение (61) представляем в виде системы в R^2

$$\dot u = Au + e_2\varphi(\sigma), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma = (b,u), \tag{62}$$

где e_2 – второй единичный вектор, b – вектор с компонентами $b_1,\ b_2$.

Согласно (62) имеем

$$\big((\lambda I - A)^{-1}e_2, b\big) = \frac{b_2\lambda + b_1}{P(\lambda)},\ P(\lambda) = \lambda^2 + c_2\lambda + c_1. \tag{63}$$

Из (63) вытекает, что $(e_2, b) = b_2$. В данном случае считаем, что

$$b_2 = -\varepsilon. \tag{64}$$

Тогда при $\varepsilon = 0$ из (63) вытекает, что $(Ae_2, b) = b$, $(A^2 e_2, b) = -c_2$. Предполагаем,что $b_1 > 0$, $c_2 > 0$, отсюда и из (64) получаем, что

$$P(\lambda) + MQ(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(c_2 - \varepsilon M) + c_1 + Mb_1,$$

т.е. при таких больших M, что $\varepsilon M >> 1$, имеем колебательную неустойчивость.

Теорема 3. *При ограничении* (64) *уравнение* (61) *имеет орбитально экспоненциально устойчивый цикл с изложенными в теореме 2 свойствами.*

Список литературы

1. *Колесов, Ю.С.* Периодические решения релейных систем с распределенными параметрами / *Ю.С. Колесов* // Матем.сб. — 1970. — Т. 89, № 3. — С. 349 – 371.

2. *Колесов, Ю.С.* Автоколебания в системах с распределенными параметрами / *Ю.С. Колесов, В.С. Колесов, И.И. Федик.* — Киев: Наукова думка, 1979. — 162 с.

3. *Мищенко, Е.Ф.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах / *Е.Ф. Мищенко, Ю.С. Колесов, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов.* — М.: Физматлит, 1995. — 336 с.

4. *Андронов, А.А.* Теория колебаний / *А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин.* — М.: Физматгиз, 1959. — 916 с.

5. *Аносов, Д.В.* Об устойчивости положений равновесия релейных систем / *Д.В. Аносов* // Автом. и телемех. — 1959. — Т. 20, № 2. — С. 135 – 139.

6. *Демидович, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / *Б.П. Демидович.* — М.: Наука, 1967. — 472 с.

Andronov-Hopf Bifurcation for Relay Systems

Chernysheva O.A.

We describe the structure of a monodromy matrix of periodic solutions for relay systems that makes it possible to derive the general criterion for the orbital exponential stability of the cycle. The given theorem is used to develop an analog to the Andronov-Hopf bifurcation theorem.