

УДК 517.51+514.17

Ортогональное проектирование и минимальная линейная интерполяция на n -мерном кубе

Невский М.В.

Ярославский государственный университет

e-mail: mnevsk@univ.uni Yar.ac.ru

получена 3 сентября 2007

Аннотация

Пусть H — ортогональный проектор на пространство многочленов от n переменных степени ≤ 1 , $\|\cdot\|$ — норма оператора из $C([0, 1]^n)$ в $C([0, 1]^n)$. В статье доказывается, что $C_1\theta_n \leq \|H\| \leq C_2\theta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Здесь θ_n обозначает минимальную величину нормы проектора при линейной интерполяции на кубе $[0, 1]^n$. Используются геометрические и асимптотические свойства эйлеровых чисел и центральных B -сплайнов, а также результаты, полученные автором ранее.

1. Введение

Пусть n — натуральное число, $Q_n := [0, 1]^n$ — n -мерный единичный куб. Через $C(Q_n)$ обозначим пространство непрерывных функций $f : Q_n \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\| := \|f\|_{C(Q_n)} = \max_{x \in Q_n} |f(x)|.$$

В статье рассматриваются вопросы, связанные с аппроксимацией функций из $C(Q_n)$ с помощью многочленов от n переменных общей степени ≤ 1 . Пространство таких многочленов обозначается $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$.

Введём в $C(Q_n)$ скалярное произведение равенством

$$(f, g) := \int_{Q_n} f(x)g(x) dx. \quad (1.1)$$

Обозначим через H ортогональный проектор на $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$, соответствующий скалярному произведению (1.1). Положим $\|H\| := \|H\|_{C(Q_n) \rightarrow C(Q_n)}$.

Наряду с H мы будем рассматривать интерполяционные проекторы $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$. Пусть θ_n есть минимальная величина нормы оператора P при условии, что все соответствующие ему узлы интерполяции $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$ принадлежат кубу Q_n :

$$\theta_n := \min_{x^{(i)} \in Q_n} \|P\|.$$

Оценки величин θ_n и их связь с некоторыми геометрическими характеристиками куба Q_n установлены в статьях автора [1, 2].

Основной результат настоящей работы составляет эквивалентность $\|H\| \approx \theta_n$. Эта запись означает, что с константами $C_1, C_2 > 0$, не зависящими от $n \in \mathbb{N}$, выполняется двойное неравенство

$$C_1\theta_n \leq \|H\| \leq C_2\theta_n. \quad (1.2)$$

Другими словами, существуют положительные константы C_1 и C_2 со следующим свойством. Для любого натурального n найдётся такой набор узлов, принадлежащих Q_n , что для соответствующего интерполяционного проектора P и ортогонального проектора H выполняются соотношения

$$C_1\|P\| \leq \|H\| \leq C_2\|P\|.$$

Одно из неравенств, ведущих к (1.2), имеет вид $\|H\| \geq \text{const} \cdot \sqrt{n}$. Последняя оценка получается ниже двумя способами: с привлечением эйлеровых чисел (пункт 5) и с использованием центральных B -сплайнов (пункт 6). По этой причине значительная часть статьи связана с изложением известных и установлением новых свойств указанных объектов.

2. Норма ортогонального проектора

Очевидно, что норма ортогонального проектора H на $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ как оператора из $L_2(Q_n)$ в $L_2(Q_n)$ равна 1. В этом пункте мы установим формулу для нормы H как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$.

Теорема 2.1. *Имеет место равенство*

$$\|H\| = 6 \int_{Q_n} \left| \sum_{i=1}^n y_i - \frac{3n+1}{6} \right| dy. \quad (2.1)$$

Доказательство. Функции

$$1, \sqrt{12} \left(x_1 - \frac{1}{2} \right), \dots, \sqrt{12} \left(x_n - \frac{1}{2} \right)$$

составляют ортонормированный относительно скалярного произведения (1.1) базис $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$. Это легко следует из результата для $n = 1$. Поэтому действие H на $f \in C(Q_n)$ задаётся равенством

$$\begin{aligned} Hf(x) &= \int_{Q_n} f(y) dy \cdot 1 + 12 \sum_{i=1}^n \int_{Q_n} \left(y_i - \frac{1}{2} \right) f(y) dy \cdot \left(x_i - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \int_{Q_n} \left(3n+1 - 6 \sum_{i=1}^n y_i \right) f(y) dy + 12 \sum_{i=1}^n \left(\int_{Q_n} \left(y_i - \frac{1}{2} \right) f(y) dy \right) x_i. \end{aligned}$$

Так как $Hf \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, то

$$\|Hf\| = \max_{v \in \text{ver}(Q_n)} |Hf(v)|,$$

где $\text{ver}(Q_n)$ обозначает совокупность вершин Q_n . Очевидно,

$$Hf(0) = \int_{Q_n} \left(3n+1 - 6 \sum_{i=1}^n y_i \right) f(y) dy.$$

Для произвольной вершины $v = (v_1, \dots, v_n)$ положим $\Lambda_0 := \{i : v_i = 0\}$, $\Lambda_1 := \{i : v_i = 1\}$. В этих обозначениях

$$Hf(v) = \int_{Q_n} \left(3n+1 - 6 \sum_{i \in \Lambda_0} y_i + 6 \sum_{i \in \Lambda_1} (y_i - 1) \right) f(y) dy. \quad (2.2)$$

Ввиду (2.2) имеем:

$$\begin{aligned} \|H\| &= \sup_{\|f\|=1} \|Hf\| = \\ &= \sup_{\|f\|=1} \max_{v \in \text{ver}(Q_n)} |Hf(v)| = \max_{v \in \text{ver}(Q_n)} \sup_{\|f\|=1} |Hf(v)| = \\ &= \max_{v \in \text{ver}(Q_n)} \int_{Q_n} \left| 3n+1 - 6 \sum_{i \in \Lambda_0} y_i + 6 \sum_{i \in \Lambda_1} (y_i - 1) \right| dy. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В случае $v \neq 0$ интеграл из (2.3) имеет то же значение, что и в случае $v = 0$. Достаточно использовать замену переменных $z_i := 1 - y_i$ для $i \in \Lambda_1$ и $z_i := y_i$ для $i \in \Lambda_0$. Поэтому окончательно получаем равенство

$$\|H\| = \int_{Q_n} \left| 3n+1 - 6 \sum_{i=1}^n y_i \right| dy,$$

которое эквивалентно (2.1). □

Следствие 2.1. *Если $n = 1$, то $\|H\| = 5/3 = 1.66(6)$. Если $n = 2$, то $\|H\| = 233/108 = 2.15(740)$. Далее, для всех $n \in \mathbb{N}$*

$$\|H\| \leq \sqrt{3n+1}. \quad (2.4)$$

Доказательство. Значения $\|H\|$ для $n = 1$ и $n = 2$ легко находятся с помощью прямого вычисления. Оценка (2.4) получается из (2.1) и неравенства Коши:

$$\begin{aligned}\|H\| &= 6 \int_{Q_n} \left| \sum_{i=1}^n y_i - \frac{3n+1}{6} \right| dy \leq 6 \left(\int_{Q_n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - \frac{3n+1}{6} \right)^2 dy \right)^{1/2} = \\ &= 6 \sqrt{\frac{3n+1}{36}} = \sqrt{3n+1}.\end{aligned}$$

□

3. Эйлеровы числа, B -сплайны, слои и сечения куба

В настоящей работе мы отметим интересную возможность использования в оценках для $\|H\|$ эйлеровых чисел и центральных B -сплайнов.

Пусть k — натуральное, $k \leq n$. *Эйлеровым числом* $A_{n,k}$ называется количество перестановок порядка n , каждая из которых имеет ровно $k-1$ *снижений* (*descents*), то есть инверсий своих соседних компонент.

Возьмём для примера $n = 3$. Перестановки $(1, 2, 3)$ и $(3, 2, 1)$ имеют соответственно нуль снижений и два снижения, а любая из остальных четырёх перестановок $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ обладает одним снижением. Значит, $A_{3,1} = A_{3,3} = 1$, $A_{3,2} = 4$.

К введению этих чисел имеются и другие подходы. Например, начиная с ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} t^j = \frac{t}{1-t},$$

сходящегося при $|t| < 1$, с помощью последовательного дифференцирования и умножения на t получим:

$$\sum_{j=1}^{\infty} j t^j = \frac{t}{(1-t)^2} \cdot 1,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2 t^j = \frac{t}{(1-t)^3} (1+t),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3 t^j = \frac{t}{(1-t)^4} (1+4t+t^2)$$

и так далее. Коэффициенты $A_{n,k}$ из правой части равенства

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^n t^j = \frac{t}{(1-t)^{n+1}} \sum_{k=1}^n A_{n,k} t^{k-1}$$

и есть эйлеровы числа. Характеристическими свойствами этих чисел являются также приводимые ниже соотношения (3.1), (3.2) и (3.4).

Введём в рассмотрение следующие подмножества куба Q_n , а именно *слои* (*slices*), получающиеся при пересечении этого куба гиперплоскостью, ортогональной вектору $\{1, \dots, 1\}$. k -й слой ($k = 1, \dots, n$) определяется равенством

$$T_{n,k} := \left\{ x \in Q_n : k-1 \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq k \right\}.$$

Лемма 3.1. *Имеют место равенства:*

$$A_{n,k} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j)^n, \quad (3.1)$$

$$\text{vol}(T_{n,k}) = \frac{A_{n,k}}{n!}, \quad (3.2)$$

и (3.5) установлено. Соотношение (3.6) получается теперь с учётом равенства $\sum A_{n-1,j} = (n-1)!$, см. (3.3). $\square$

Лемма 3.3. Пусть $n = 2m$. Тогда

$$\frac{A_{n+1,m+1}}{(n+1)!} > \frac{A_{n,m+1}}{n!}. \quad (3.7)$$

Если справедлива оценка

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} \geq \frac{1}{\gamma\sqrt{n}}, \quad (3.8)$$

где $\gamma > 0$, то верно и неравенство

$$\frac{A_{n+1,m+1}}{(n+1)!} > \frac{1}{\gamma\sqrt{n+1}}. \quad (3.9)$$

Доказательство. Так как $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, то (3.9) сразу следует из (3.7) и (3.8). Поэтому достаточно доказать (3.7). Применим рекуррентное соотношение (3.4) и учтём, что в нашей ситуации $A_{n,m} = A_{n,m+1}$:

$$\begin{aligned} A_{n+1,m+1} &= (m+1)A_{n,m} + (m+1)A_{n,m+1} = \\ &= 2(m+1)A_{n,m+1} = (n+2)A_{n,m+1}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\frac{A_{n+1,m+1}}{(n+1)!} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{A_{n,m+1}}{n!} > \frac{A_{n,m+1}}{n!}.$$

Неравенство (3.7) может быть получено и геометрическим путём. Заметим, что

$$\min_{m \leq u \leq m+1} \text{mes}_n(G_{n+1,u}) = s(n+1, m+1),$$

а ширина слоя $T_{n+1,m+1}$ в направлении вектора $\{1, \dots, 1\}$ равна $1/\sqrt{n+1}$. Поэтому в силу (3.2) и (3.5)

$$\frac{A_{n+1,m+1}}{(n+1)!} = \text{vol}(T_{n+1,m+1}) > \frac{s(n+1, m+1)}{\sqrt{n+1}} = \frac{A_{n,m+1}}{n!}.$$

$\square$

Пусть

$$B_n(t) := \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^n \cos(2t\xi) d\xi$$

— так называемый *центральный B-сплайн порядка n*. Это чётная кусочно-полиномиальная функция степени $n-1$, принадлежащая $C^{n-2}(\mathbb{R})$. Носитель B_n есть $(-n/2, n/2)$; если $|t| < n/2$, то $B_n(t) > 0$. Кроме того,

$$\int_{-\infty}^\infty B_n(t) dt = 1,$$

см. (6.4) для $g(u) \equiv 1$. Для вычислений с B-сплайнами могут применяться формулы (6.2) и (6.3).

Эти и другие свойства, а также история B-сплайнов приводятся в [3]. В частности, в этой статье отмечено, что первым, кто выявил связь B-сплайнов с сечениями n -мерного куба, был А. Sommerfeld (А. Sommerfeld, 1904). Он доказал следующее утверждение.

Лемма 3.4. Имеют место соотношения:

$$B_n(t) = \frac{s(n, t + \frac{n}{2})}{\sqrt{n}}, \quad n > 1; \quad (3.10)$$

$$B_n(t) \cong \sqrt{\frac{6}{\pi n}} \cdot e^{-6t^2/n}. \quad (3.11)$$

Запись $a_n \cong b_n$ означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$.

С помощью (3.10) и (3.11) мы получим следующий результат.

Лемма 3.5. *Существует константа $\gamma \geq 2$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и $m = \lfloor n/2 \rfloor$ справедливо неравенство*

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} > \frac{1}{\gamma\sqrt{n}}. \quad (3.12)$$

Доказательство. Согласно лемме 3.3 из справедливости (3.12) для данного чётного n следует справедливость этой оценки для следующего нечётного $n+1$, так как $\lfloor n/2 \rfloor = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Поэтому достаточно гарантировать выполнение (3.12) для чётных n и заметить, что неравенство выполняется и для $n=1$.

Из леммы 3.2 следует, что

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} = \frac{s(n+1, m+1)}{\sqrt{n+1}}.$$

Если $n = 2m$, то $m+1 = (n+2)/2$, поэтому согласно (3.10)

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} = B_{n+1} \left(m+1 - \frac{n+1}{2} \right) = B_{n+1} \left(\frac{1}{2} \right).$$

Теперь воспользуемся асимптотическим соотношением (3.11). Из него следует, что

$$\sigma_n := \frac{A_{n,m+1}}{n!} \cdot 2\sqrt{n} \cong \sqrt{\frac{24n}{\pi(n+1)}} \cdot e^{-3/(2n+2)}.$$

Существует натуральное n_0 такое, что при $n > n_0$ выполняется

$$\frac{\sigma_n}{\sqrt{\frac{24n}{\pi(n+1)}} \cdot e^{-3/(2n+2)}} > \frac{1}{2},$$

то есть

$$\sigma_n > \tau_n := \sqrt{\frac{6n}{\pi(n+1)}} \cdot e^{-3/(2n+2)}.$$

Каждый из двух выделенных сомножителей, входящих в τ_n , возрастает по n , поэтому при $n > 8$

$$\sigma_n > \tau_8 = \sqrt{\frac{16}{3\pi}} \cdot e^{-1/6} > 1.$$

Таким образом, если $n \geq \max(n_0, 8)$ и n — чётное, то имеет место

$$\sigma_n = \frac{A_{n,m+1}}{n!} \cdot 2\sqrt{n} > 1,$$

то есть

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} > \frac{1}{2\sqrt{n}}. \quad (3.13)$$

Следовательно, существует такая константа $\gamma \geq 2$, с которой для всех чётных n выполняется неравенство (3.12). Как отмечалось, это означает выполнение (3.12) для всех $n \geq 2$. Лемма доказана.

Приведём для полноты асимптотическое соотношение для величины $A_{n,m+1}/n!$ в случае нечётных n . Если $n = 2m+1$, то $m+1 = (n+1)/2$, поэтому для таких n (3.10) и (3.11) дают

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} = B_{n+1} \left(m+1 - \frac{n+1}{2} \right) = B_{n+1}(0) \cong \sqrt{\frac{6}{\pi(n+1)}}$$

и

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} \cdot 2\sqrt{n} \cong \sqrt{\frac{24n}{\pi(n+1)}}.$$

Добавляя в последнее выражение множитель $e^{-3/(2n+2)}$, убеждаемся, что асимптотика, полученная выше для чётных n , верна и для всех n . Это позволяет завершить доказательство леммы 3.5 и без использования редукции леммы 3.3. $\square$

Заметим, что по крайней мере для $1 \leq n \leq 20$ выполняется более точное, чем (3.12), неравенство (3.13).

4. Оценки $\|H\|$ через эйлеровы числа

Применим эйлеровы числа для оценивания нормы ортогонального проектора.

Введём в рассмотрение величины

$$M_{n,k} := \max_{x \in T_{n,k}} \left| \sum_{i=1}^n x_i - \frac{3n+1}{6} \right|, \quad m_{n,k} := \min_{x \in T_{n,k}} \left| \sum_{i=1}^n x_i - \frac{3n+1}{6} \right|.$$

Пусть

$$s_1 := k - 1 - \frac{3n+1}{6}, \quad s_2 := k - \frac{3n+1}{6}.$$

Очевидно, $M_{n,k} = \max\{|s_1|, |s_2|\}$. Если $s_1 s_2 > 0$, то $m_{n,k} = \min\{|s_1|, |s_2|\}$. Нетрудно видеть, что $s_1 s_2 \leq 0$ тогда и только тогда, когда $0 \leq s_2 \leq 1$. В этом случае $m_{n,k} = 0$. Неравенство $0 \leq s_2 \leq 1$ эквивалентно

$$k = k^* := \left\lceil \frac{3n+1}{6} + 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{3n+7}{6} \right\rceil,$$

где $[z]$ есть целая часть z . Итак, для всех $k = 0, 1, \dots, n$

$$M_{n,k} = \max \left\{ \left| k - 1 - \frac{3n+1}{6} \right|, \left| k - \frac{3n+1}{6} \right| \right\}.$$

Если $k \neq k^* = [(3n+7)/6]$, то

$$m_{n,k} = \min \left\{ \left| k - 1 - \frac{3n+1}{6} \right|, \left| k - \frac{3n+1}{6} \right| \right\}.$$

Если же $k = k^*$, то значение $m_{n,k}$ равно 0.

Теорема 4.1. Для $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{6}{n!} \sum_{k=1}^n m_{n,k} A_{n,k} \leq \|H\| \leq \frac{6}{n!} \sum_{k=1}^n M_{n,k} A_{n,k}. \quad (4.1)$$

Разность правой и левой частей двойного неравенства (4.1) не превосходит 6. Если левая часть (4.1) меньше 1, то она может быть заменена на 1.

Доказательство. Применяя (2.2), запишем:

$$\|H\| = 6 \int_{Q_n} \left| \sum_{i=1}^n x_i - \frac{3n+1}{6} \right| dx = 6 \sum_{k=1}^n \int_{T_{n,k}} \left| \sum_{i=1}^n x_i - \frac{3n+1}{6} \right| dx.$$

Так как $\text{vol}(T_{n,k}) = A_{n,k}/n!$, см. (3.2), то

$$\frac{m_{n,k} A_{n,k}}{n!} \leq \int_{T_{n,k}} \left| \sum_{i=1}^n x_i - \frac{3n+1}{6} \right| dx \leq \frac{M_{n,k} A_{n,k}}{n!}.$$

Суммируя эти неравенства, получаем (4.1).

Обозначим левую и правую части (4.1) соответственно через α_n и β_n . Покажем, что $\beta_n - \alpha_n \leq 6$. Пусть

$$\text{osc}(g; C(\Omega)) := \sup_{x, y \in \Omega} |g(x) - g(y)|$$

есть колебание функции $g \in C(\Omega)$. В силу неравенства $||g(x)| - |g(y)|| \leq |g(x) - g(y)|$ колебание $|g|$ не превышает колебания g . Поэтому, полагая $g_n(x) := \sum x_i - (3n+1)/6$, имеем:

$$M_{n,k} - m_{n,k} = \text{osc}(|g_n|; C(T_{n,k})) \leq \text{osc}(g_n; C(T_{n,k})) = 1.$$

Отсюда и из равенства (3.3) следует:

$$\beta_n - \alpha_n = \frac{6}{n!} \sum_{k=1}^n (M_{n,k} - m_{n,k}) A_{n,k} \leq \frac{6}{n!} \sum_{k=1}^n A_{n,k} = 6.$$

Справедливость последнего утверждения из условия теоремы очевидна: норма H как любого проектора не меньше 1. $\square$

Приведём результаты применения оценок (4.1) и (2.4) для $1 \leq n \leq 9$. В следующей таблице α_n и β_n — левая и правая части (4.1), $\delta_n := \sqrt{3n+1}$ — правая часть (2.4). Последний столбец содержит точные значения $\|H\|$ для $n = 1, 2, 3$ (см. пункты 2 и 6).

n	α_n	β_n	$\beta_n - \alpha_n$	δ_n	$\ H\ $
1	0	4	4	2	1.66(6)
2	0.5	6	5.5	2.645...	2.15(740)
3	1	5.66(6)	4.66(6)	3.162...	2.770...
4	0.958(3)	6.5	5.541(6)	3.605...	
5	1.45	6.35	4.9	4	
6	1.402(7)	6.983(3)	5.580(5)	4.358...	
7	1.852...	6.893...	5.040...	4.690...	
8	1.812...	7.425...	5.612...	5	
9	2.225...	7.364...	5.139...	5.291...	

5. Соотношения $\|H\| \geq C\sqrt{n}$ и $\|H\| \approx \theta_n$

Пусть

$$I_n := \int_{Q_n} \left| \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2} \right| dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим для $k = 1, \dots, n$

$$D_{n,k} := \max_{x \in T_{n,k}} \left| \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2} \right|, \quad d_{n,k} := \min_{x \in T_{n,k}} \left| \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2} \right|.$$

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 4.1, получим двойное неравенство

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n d_{n,k} A_{n,k} \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n D_{n,k} A_{n,k}, \quad (5.1)$$

разность правой и левой частей которого не превосходит 1.

В этом пункте m обозначает целую часть числа $n/2$, то есть $m = [n/2]$. Таким образом, $n = 2m$ или $n = 2m + 1$ в зависимости от чётности n .

Если $n = 2m$, то для всех $j = 1, \dots, m$ выполняются равенства $D_{n,m+j} = j$, $d_{n,m+j} = j - 1$. В этом случае положим

$$Y_n := \sum_{j=1}^m j A_{n,m+j}.$$

Если же $n = 2m + 1$, то при любом $j = 1, \dots, m + 1$ выполняется $D_{n,m+j} = j - 1/2$. Теперь $d_{n,m+1} = 0$, а для $j = 2, \dots, m + 1$ справедливо $d_{n,m+j} = j - 3/2$. Положим в случае $n = 2m + 1$

$$Y_n := \frac{1}{4} A_{n,m+1} + \sum_{j=2}^{m+1} \left(j - \frac{1}{2} \right) A_{n,m+j}.$$

Для всех $n \in \mathbb{N}$ — и чётных, и нечётных — правая часть (5.1) равна $2Y_n/n!$. Так как разность правой и левой частей (5.1) не больше 1, то

$$I_n \geq \frac{2}{n!} Y_n - 1. \quad (5.2)$$

Рассмотрим вопрос о нижних оценках величин Y_n .

Лемма 5.1. Для $n = 2m$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} A_{n+2,m+1+j} &= (m-j+2)^2 A_{n,m+j-1} + \\ &+ (2m^2 + 4m - 2j^2 + 2j + 1) A_{n,m+j} + (m+j+1)^2 A_{n,m+1+j}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$Y_{n+2} = \frac{(n+2)^2}{4} A_{n,m} + \frac{(n+1)!}{2} + (n^2 + n) Y_n. \quad (5.4)$$

Если же $n = 2m + 1$, то

$$\begin{aligned} A_{n+2,m+1+j} &= (m-j+3)^2 A_{n,m+j-1} + \\ &+ (2m^2 + 6m - 2j^2 + 4j + 2) A_{n,m+j} + (m+j+1)^2 A_{n,m+1+j}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$Y_{n+2} = \frac{(n+1)^2}{4} A_{n,m+1} + \frac{(n+1)!}{2} + (n^2 + n) Y_n. \quad (5.6)$$

Доказательство. Докажем сначала (5.3) и (5.4) для чётного n . Применяя рекуррентное соотношение (3.4) и равенство $n = 2m$, получим:

$$A_{n+2,m+1+j} = (m-j+2) A_{n+1,m+j} + (m+1+j) A_{n+1,m+1+j},$$

$$A_{n+1,m+j} = (m-j+2) A_{n,m+j-1} + (m+j) A_{n,m+j},$$

$$A_{n+1,m+1+j} = (m-j+1) A_{n,m+j} + (m+1+j) A_{n,m+1+j},$$

откуда следует (5.3). Поэтому

$$\begin{aligned} Y_{n+2} &= \sum_{j=1}^{m+1} j A_{n+2,m+1+j} = \sum_{j=1}^{m+1} j (m-j+2)^2 A_{n,m+j-1} + \\ &+ \sum_{j=1}^{m+1} j (2m^2 + 4m - 2j^2 + 2j + 1) A_{n,m+j} + \\ &+ \sum_{j=1}^{m+1} j (m+j+1)^2 A_{n,m+1+j} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \end{aligned}$$

В сумме Σ_2 последнее слагаемое равно нулю. Первая и третья суммы преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{l=0}^m (l+1)(m-l+1)^2 A_{n,m+l} = \\ &= (m+1)^2 A_{n,m} + \sum_{l=1}^m (l+1)(m-l+1)^2 A_{n,m+l}, \\ \Sigma_3 &= \sum_{l=2}^{m+2} (l-1)(m+l)^2 A_{n,m+l} = \sum_{l=1}^m (l-1)(m+l)^2 A_{n,m+l}. \end{aligned}$$

Мы учли, что $A_{n,2m+1} = A_{n,2m+2} = 0$. Значит,

$$\begin{aligned} Y_{n+2} &= (m+1)^2 A_{n,m} + \sum_{j=1}^m \left\{ (j+1)(m-j+1)^2 + \right. \\ &+ \left. (j-1)(m+j)^2 + j(2m^2 + 4m - 2j^2 + 2j + 1) \right\} A_{n,m+j} = \\ &= (m+1)^2 A_{n,m} + \sum_{j=1}^m (4m^2 j + 2mj + 2m + 1) A_{n,m+j} = \\ &= (m+1)^2 A_{n,m} + (4m^2 + 2m) Y_n + (2m+1) \sum_{j=1}^m A_{n,m+j}. \end{aligned}$$

Подставляя $n = 2m$ и пользуясь тем, что $\sum A_{n,m+j} = n!/2$, см. (3.3), представим последнее выражение в виде

$$\frac{(n+2)^2}{4}A_{n,m} + (n^2+n)Y_n + \frac{(n+1)!}{2}.$$

Таким образом, (5.4) доказано.

Теперь рассмотрим случай $n = 2m + 1$. На этот раз (3.4) даёт соотношения

$$A_{n+2,m+1+j} = (m-j+3)A_{n+1,m+j} + (m+1+j)A_{n+1,m+1+j},$$

$$A_{n+1,m+j} = (m-j+3)A_{n,m+j-1} + (m+j)A_{n,m+j},$$

$$A_{n+1,m+1+j} = (m-j+2)A_{n,m+j} + (m+1+j)A_{n,m+1+j},$$

из которых вытекает (5.5).

Установим (5.6). По определению

$$Y_{n+2} = \frac{1}{4}A_{n+2,m+2} + \sum_{j=2}^{m+2} \left(j - \frac{1}{2}\right) A_{n+2,m+1+j}.$$

Для преобразования первого слагаемого в правой части применим (5.5) с $j = 1$ и используем то, что в нашей ситуации $A_{n,m+2} = A_{n,m}$. Применяя (5.5) также и к сумме, запишем:

$$\begin{aligned} Y_{n+2} &= \frac{1}{2} \left\{ (m+2)^2 A_{n,m} + (m^2 + 3m + 2) A_{n,m+1} \right\} + \\ &\quad + \sum_{j=2}^{m+2} \left(j - \frac{1}{2}\right) (m-j+3)^2 A_{n,m+j-1} + \\ &\quad + \sum_{j=2}^{m+2} \left(j - \frac{1}{2}\right) (2m^2 + 6m - 2j^2 + 4j + 2) A_{n,m+j} + \\ &\quad + \sum_{j=2}^{m+2} \left(j - \frac{1}{2}\right) (m+j+1)^2 A_{n,m+1+j} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (m+2)^2 A_{n,m} + (m^2 + 3m + 2) A_{n,m+1} \right\} + \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3. \end{aligned}$$

В сумме Θ_2 последнее слагаемое равно нулю. Первая и третья суммы преобразуются к следующему виду:

$$\Theta_1 = \frac{3}{2}(m+1)^2 A_{n,m+1} + \sum_{l=2}^{m+1} \left(l + \frac{1}{2}\right) (m-l+2)^2 A_{n,m+l},$$

$$\begin{aligned} \Theta_3 &= \sum_{l=3}^{m+3} \left(l - \frac{3}{2}\right) (m+l)^2 A_{n,m+l} = \\ &= \sum_{l=2}^{m+1} \left(l - \frac{3}{2}\right) (m+l)^2 A_{n,m+l} - \frac{1}{2}(m+2)^2 A_{n,m+2}. \end{aligned}$$

Мы учли, что $A_{n,2m+2} = A_{n,2m+3} = 0$. Так как $A_{n,m+2} = A_{n,m}$, то в выражении для Y_{n+2} слагаемое с $A_{n,m}$ исчезает. Коэффициент при $A_{n,m+1}$ равен

$$\frac{(m^2 + 3m + 2) + (3m^2 + 6m + 3)}{2} = \frac{4m^2 + 9m + 5}{2}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} Y_{n+2} &= \frac{4m^2 + 9m + 5}{2} A_{n,m+1} + \sum_{j=2}^{m+1} \left\{ \left(j + \frac{1}{2}\right) (m-j+2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(j - \frac{1}{2}\right) (2m^2 + 6m - 2j^2 + 4j + 2) + \left(j - \frac{3}{2}\right) (m+j)^2 \right\} A_{n,m+j}. \end{aligned}$$

Последняя сумма приводится к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^{m+1} (4m^2j - 2m^2 + 6mj + 2j - m + 1) A_{n,m+j} = \\ &= \sum_{j=2}^{m+1} \left\{ 4m^2 \left(j - \frac{1}{2} \right) + 6m \left(j - \frac{1}{2} \right) + 2 \left(j - \frac{1}{2} \right) + 2m + 2 \right\} A_{n,m+j} = \\ &= (4m^2 + 6m + 2) \sum_{j=2}^{m+1} \left(j - \frac{1}{2} \right) A_{n,m+j} + (2m + 2) \sum_{j=2}^{m+1} A_{n,m+j}. \end{aligned}$$

Так как $n = 2m + 1$, то получаем равенство

$$\begin{aligned} Y_{n+2} &= \frac{2n^2 + 5n + 3}{4} A_{n,m+1} + (n^2 + n) \sum_{j=2}^{m+1} \left(j - \frac{1}{2} \right) A_{n,m+j} + \\ &+ (n + 1) \sum_{j=2}^{m+1} A_{n,m+j}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства (5.6) осталось учесть, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{m+1} \left(j - \frac{1}{2} \right) A_{n,m+j} &= Y_n - \frac{1}{4} A_{n,m+1}, \\ \sum_{j=2}^{m+1} A_{n,m+j} &= \frac{1}{2} (n! - A_{n,m+1}), \end{aligned}$$

и привести подобные члены. □

Лемма 5.2. *Существует константа $\gamma \geq 2$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\frac{Y_n}{n!} > \frac{\sqrt{n}}{12\gamma}. \quad (5.7)$$

Доказательство. Пусть γ — константа из условия леммы 3.5. Отдельно разберём случаи чётных и нечётных n и в каждом из них используем индукцию.

Пусть n — чётное. При $n = 2$, то есть $m = 1$, утверждение верно, так как

$$\frac{Y_2}{2!} = \frac{A_{2,2}}{2} = \frac{1}{2} > \frac{1}{24} \geq \frac{1}{12\gamma}.$$

Предположим, что неравенство (5.7) имеет место для данного n , и докажем его справедливость для $n + 2$.

Введём в рассмотрение величину

$$W_n := \frac{(n+2)(n+1)\sqrt{n+2} - n(n+1)\sqrt{n} - 6\gamma(n+1)}{(n+2)^2}$$

и покажем, что $W_n < 3/\sqrt{n}$. Действительно,

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{n^2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) + n(3\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) + 2\sqrt{n+2} - 6\gamma(n+1)}{(n+2)^2} = \\ &= \frac{2n^2}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})(n+2)^2} + \frac{n(8n+18)}{(3\sqrt{n+2} + \sqrt{n})(n+2)^2} - \\ &- \frac{6\gamma(n+1) - 2\sqrt{n+2}}{(n+2)^2} < \frac{2n^2}{2n^2\sqrt{n}} + \frac{8(n+2)^2}{4\sqrt{n}(n+2)^2} = \frac{3}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Как мы допустили, $\gamma \geq 2$ — такая константа, с которой имеет место неравенство

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} \geq \frac{1}{\gamma\sqrt{n}}. \quad (5.9)$$

В исследуемой сейчас ситуации ($n = 2m$) $A_{n,m} = A_{n,m+1}$, поэтому из (5.8) и (5.9) следует, что

$$\frac{A_{n,m}}{n!} \geq \frac{1}{3\gamma} \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} > \frac{1}{3\gamma} W_n.$$

Это эквивалентно неравенству

$$3\gamma(n+2)^2 A_{n,m} + (n^2 + n)n!\sqrt{n} + 6\gamma(n+1)! > (n+2)!\sqrt{n+2}.$$

По предположению индукции $12\gamma Y_n > n!\sqrt{n}$, поэтому

$$3\gamma(n+2)^2 A_{n,m} + 12\gamma(n^2 + n)Y_n + 6\gamma(n+1)! > (n+2)!\sqrt{n+2},$$

или

$$12\gamma \left\{ \frac{(n+2)^2}{4} A_{n,m} + (n^2 + n)Y_n + \frac{(n+1)!}{2} \right\} > (n+2)!\sqrt{n+2}.$$

Согласно (5.4) величина в фигурных скобках есть Y_{n+2} , и мы приходим к неравенству

$$\frac{Y_{n+2}}{(n+2)!} > \frac{\sqrt{n+2}}{12\gamma},$$

которое и нужно было установить.

Теперь применим индукцию по нечётным n . Для $n = 1$ и $n = 3$ утверждение проверяется непосредственно:

$$\frac{Y_1}{1!} = \frac{1}{4} > \frac{1}{24} > \frac{1}{12\gamma}, \quad \frac{Y_3}{3!} = \frac{5}{6} > \frac{\sqrt{3}}{24} \geq \frac{\sqrt{3}}{12\gamma}.$$

Предположим, что утверждение леммы верно для $n = 2m+1$, и докажем его справедливость для значения $n+2 = 2m+3$.

Пусть

$$V_n := \frac{(n+2)\sqrt{n+2} - n\sqrt{n} - 6\gamma}{n+2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{n+1} \cdot V_n &< \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{(n+2)\sqrt{n+2} - n\sqrt{n}}{n+2} = \\ &= \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{2n}{(n+2)(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})} + \frac{2\sqrt{n+2}}{n+2} \right) = \\ &= \frac{2n}{(n+1)(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})} + \frac{2\sqrt{n+2}}{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$V_n < \frac{3}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{3(n+1)^2 n!}{\sqrt{n}(n+2)!}.$$

Применим теперь неравенство (5.9), записав его в виде $3n!/\sqrt{n} \leq 3\gamma A_{n,m+1}$. Объединяя это с предыдущим, получим, что

$$V_n < \frac{3\gamma(n+1)^2}{(n+2)!} A_{n,m+1}.$$

Это эквивалентно соотношению

$$3\gamma(n+1)^2 A_{n,m+1} + (n+1)!n\sqrt{n} + 6\gamma(n+1)! > (n+2)!\sqrt{n+2}. \quad (5.10)$$

По предположению индукции $Y_n > n!\sqrt{n}/(12\gamma)$, поэтому

$$(n^2 + n)Y_n > \frac{(n+1)!n\sqrt{n}}{12\gamma}. \quad (5.11)$$

Из (5.10) и (5.11) следует, что

$$12\gamma \left\{ \frac{(n+1)^2}{4} A_{n,m+1} + (n^2 + n)Y_n + \frac{(n+1)!}{2} \right\} > (n+2)! \sqrt{n+2}.$$

В силу (5.6) величина в фигурных скобках есть Y_{n+2} . Значит,

$$\frac{Y_{n+2}}{(n+2)!} > \frac{\sqrt{n+2}}{12\gamma},$$

и мы получили нужное соотношение. $\square$

Теорема 5.1. *Существует положительная константа $C \leq 1/2$ со следующим свойством. Для всех $n \in \mathbb{N}$*

$$\|H\| > C\sqrt{n} - 7. \quad (5.12)$$

Доказательство. Пусть $\gamma \geq 2$ — константа из условия лемм 3.5 и 5.2. Применяя (2.1) и определение I_n , запишем неравенство

$$\|H\| = 6 \int_{Q_n} \left| \sum_{i=1}^n x_i - \frac{3n+1}{6} \right| dx \geq 6 \left(I_n - \frac{1}{6} \right) = 6I_n - 1.$$

Для продолжения оценки применим сначала (5.2) и затем (5.7). Мы получим:

$$\begin{aligned} \|H\| &\geq 6I_n - 1 \geq 6 \left(\frac{2}{n!} Y_n - 1 \right) - 1 = \\ &= \frac{12}{n!} Y_n - 7 > \frac{12}{n!} \cdot \frac{n! \sqrt{n}}{12\gamma} - 7 = \frac{\sqrt{n}}{\gamma} - 7. \end{aligned}$$

Осталось положить $C := 1/\gamma$. $\square$

Следствие 5.1. *Существует положительная константа $C \leq 1/2$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$C\sqrt{n} - 7 < \|H\| \leq \sqrt{3n+1}. \quad (5.13)$$

Доказательство. Оценка сверху отмечена в следствии 2.1. Остаётся учесть неравенство (5.12) предыдущей теоремы. $\square$

Теорема 5.2. *Для $n \in \mathbb{N}$ имеет место эквивалентность $\|H\| \approx \theta_n$. Иначе говоря, существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, что для всех n*

$$C_1 \theta_n \leq \|H\| \leq C_2 \theta_n. \quad (5.14)$$

Доказательство. Как доказано автором, $\theta_n \approx \sqrt{n}$, см. [2]. Двойная оценка (5.13) означает, что $\|H\| \approx \sqrt{n}$. Отсюда $\|H\| \approx \theta_n$, то есть существуют универсальные (не зависящие от n) константы C_1 и C_2 такие, что справедливы соотношения (5.14).

Покажем здесь, что правое неравенство в (5.14) имеет место, если взять $C_2 = 5e/\sqrt{7} = 5.137\dots$, и в этом случае оно является строгим. (Итак, с точностью до 0.01 верхняя граница для минимальной возможной константы из правой части двойного неравенства получается равной 5.14. Случайное совпадение этого числа с номером соотношений вызвало изумление автора.)

Для $n \geq 8$ выполняется неравенство

$$\sqrt{3n+1} \leq \frac{5}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{n-1}. \quad (5.15)$$

Действительно, функция

$$\psi(n) := \frac{n-1}{3n+1} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{4}{3n+1} \right)$$

возрастает, её минимум на промежутке $[8, \infty)$ равен $\psi(8) = 7/25$. Поэтому при $n \geq 8$ выполняется $7/25 \leq (n-1)/(3n+1)$, что эквивалентно (5.15). Как доказано автором в [1, 2],

$$\frac{1}{e} \sqrt{n-1} < \theta_n, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = 1.89 \dots, \quad \theta_3 = 2, \quad 1.81 \dots \leq \theta_4 \leq 2.33 \dots, \\ 1.87 \dots \leq \theta_5 \leq 2.6, \quad 1.90 \dots \leq \theta_6 \leq 3, \quad 1.81 \dots \leq \theta_7 \leq 2.5. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Если $n \geq 8$, то

$$\|H\| \leq \sqrt{3n+1} \leq \frac{5}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{n-1} < \frac{5e}{\sqrt{7}} \cdot \theta_n.$$

Мы применили (5.13), (5.15) и (5.16). Остаётся заметить, что оценка $\|H\| < (5e/\sqrt{7}) \cdot \theta_n$ верна и для всех n от 1 до 7 включительно. Это следует из (5.13) и (5.17). $\square$

Хотя бы для некоторых n имеет место неравенство $\theta_n \leq \|H\|$. Таковыми являются, например, $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$.

Сформулируем уточнение теоремы 5.2, которое получается с применением результатов статьи автора [2]. Пусть $T \subset Q_n$ — симплекс максимального объёма, хотя бы одна из вершин которого совпадает с вершиной Q_n ; P — интерполяционный проектор, узлы которого находятся в вершинах T .

Теорема 5.3. *С универсальными константами справедлива эквивалентность $\|H\| \approx \|P\|$.*

6. Вычисление $\|H\|$ с помощью однократного интеграла

Отметим подход, при котором $\|H\|$ выражается через интеграл от функции одного переменного. Этот способ может быть применён как для оценивания нормы ортогонального проектора, так и для её приближённого вычисления.

В действиях с B -сплайнами наряду с интегральным представлением

$$B_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^n \cos(2t\xi) d\xi \quad (6.1)$$

полезно иметь в виду следующие две формулы, приведённые в [3]:

$$B_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(t + \frac{n}{2} - k \right)_+^{n-1}, \quad (6.2)$$

$$B_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{[n/2-|t|]} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - |t| - k \right)^{n-1}, \quad |t| \leq \frac{n}{2}. \quad (6.3)$$

В (6.2) используются обозначения:

$$a_+^m := \begin{cases} a^m, & a \geq 0, \\ 0, & a < 0, \end{cases} \quad \text{если } a \text{ или } m \neq 0; \quad 0_+^0 := \frac{1}{2}.$$

В дополнение к (6.3) полагаем $B_n(t) = 0$ при $|t| > n/2$. Для построения B_2 и B_3 удобно применить (3.10).

Лемма 6.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, g — функция одного переменного, непрерывная на отрезке $[0, n]$. Тогда*

$$\begin{aligned} \int_{Q_n} g \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) dx &= \int_0^n g(u) B_n \left(u - \frac{n}{2} \right) du = \\ &= \int_{-n/2}^{n/2} g \left(t + \frac{n}{2} \right) B_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g \left(t + \frac{n}{2} \right) B_n(t) dt. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что цепочка (6.4) верна для $n = 1$. Согласно (6.1)

$$B_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} \cos(2t\xi) d\xi.$$

Следовательно, B_1 есть так называемый *разрывный множитель Дирихле*, равный 1 на $(-1/2, 1/2)$ и 0 вне $[-1/2, 1/2]$; $B_1(\pm 1/2) = 1/2$. Эти свойства следуют из равенств

$$2 \sin \xi \cos(2t\xi) = \sin((2t-1)\xi) + \sin((2t+1)\xi),$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sigma \xi}{\xi} d\xi = \text{sign } \sigma.$$

Пусть теперь $n \geq 2$. Гиперплоскость $\sum x_i = u$ ($u \geq 0$) лежит на расстоянии $\tau = u/\sqrt{n}$ от начала координат, а нормаль к ней коллинеарна главной диагонали куба, соединяющей вершины $(0, \dots, 0)$ и $(1, \dots, 1)$. Поэтому элемент объёма Q_n , равный объёму слоя ширины $d\tau$, есть $s(n, \sqrt{n}\tau) d\tau$. Отсюда

$$\int_{Q_n} g\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) dx = \int_0^{\sqrt{n}} g(\sqrt{n}\tau) s(n, \sqrt{n}\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^n g(u) s(n, u) du.$$

Теперь применим соотношение (3.10), согласно которому $s(n, u) = \sqrt{n} \cdot B_n(u - n/2)$. В результате получим:

$$\int_{Q_n} g\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) dx = \int_0^n g(u) B_n\left(u - \frac{n}{2}\right) du = \int_{-n/2}^{n/2} g\left(t + \frac{n}{2}\right) B_n(t) dt.$$

Последнее равенство в (6.4) связано с тем, что $\text{supp } B_n = (-n/2, n/2)$. □

Теорема 6.1. Для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|H\| &= 6 \int_0^n \left| u - \frac{3n+1}{6} \right| B_n\left(u - \frac{n}{2}\right) du = \\ &= 6 \int_{-n/2}^{n/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| B_n(t) dt = 6 \int_{-\infty}^{\infty} \left| t - \frac{1}{6} \right| B_n(t) dt. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Доказательство. По теореме 2.1

$$\|H\| = 6 \int_{Q_n} \left| \sum_{i=1}^n x_i - \frac{3n+1}{6} \right| dx.$$

Для вычисления последнего интеграла можно привлечь формулы (6.4) с $g(t) = |t - (3n+1)/6|$. □

Рассмотрим для примера случаи $n = 1, 2, 3$. Сплайн B_1 описан в начале доказательства леммы 6.1. Если $n = 1$, то

$$\begin{aligned} \|H\| &= 6 \int_{-1/2}^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| B_1(t) dt = \int_{-1/2}^{1/6} (1 - 6t) dt + \\ &+ \int_{1/6}^{1/2} (6t - 1) dt = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1.6\bar{6}(6). \end{aligned}$$

Пусть $n = 2$. Из геометрических соображений нетрудно найти явное выражение для величины $s(2, u)$:

$$s(2, u) = \sqrt{2} \begin{cases} u, & 0 \leq u \leq 1, \\ 2 - u, & 1 \leq u \leq 2, \\ 0, & u \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Применив (3.10), получим, что

$$B_2(t) = \frac{s(2, t+1)}{\sqrt{2}} = \begin{cases} 1+t, & -1 \leq t \leq 0, \\ 1-t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

То же выражение для B_2 дают (6.2) и (6.3). Именно, (6.2) сводится к представлению

$$\begin{aligned} B_2(t) &= (t+1)_+ - 2t_+ + (t-1)_+ = \\ &= \max(t+1, 0) - 2\max(t, 0) + \max(t-1, 0), \end{aligned}$$

а (6.3) — к равенству $B_2(t) = 1 - |t|$ при $|t| \leq 1$. Итак, в двумерной ситуации

$$\begin{aligned} \|H\| &= 6 \int_{-1}^1 \left| t - \frac{1}{6} \right| B_2(t) dt = \int_{-1}^0 (1-6t)(1+t) dt + \\ &+ \int_0^{1/6} (1-6t)(1-t) dt + \int_{1/6}^1 (6t-1)(1-t) dt = \frac{233}{108} = 2.15(740). \end{aligned}$$

Значения $\|H\|$ для $n = 1$ и $n = 2$ приводились в следствии 2.1.

В трёхмерной ситуации справедливо равенство

$$s(3, u) = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{cases} u^2, & 0 \leq u \leq 1, \\ u^2 - 3(u-1)^2, & 1 \leq u \leq 2, \\ u^2 - 3(u-1)^2 + 3(u-2)^2, & 2 \leq u \leq 3, \\ 0, & u \notin [0, 3]. \end{cases}$$

Значит,

$$\begin{aligned} B_3(t) &= \frac{s(3, t+3/2)}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} (t+3/2)^2, & -3/2 \leq t \leq -1/2, \\ (t+3/2)^2 - 3(t+1/2)^2, & -1/2 \leq t \leq 1/2, \\ (t+3/2)^2 - 3(t+1/2)^2 + 3(t-1/2)^2, & 1/2 \leq t \leq 3/2, \\ 0, & t \notin [-3/2, 3/2], \end{cases} \end{aligned}$$

или

$$B_3(t) = \frac{1}{2} \begin{cases} t^2 + 3t + 9/4, & -3/2 \leq t \leq -1/2, \\ -2t^2 + 3/2, & -1/2 \leq t \leq 1/2, \\ t^2 - 3t + 9/4, & 1/2 \leq t \leq 3/2, \\ 0, & t \notin [-3/2, 3/2]. \end{cases}$$

Таким образом, для $n = 3$

$$\begin{aligned} \|H\| &= 6 \int_{-3/2}^{3/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| B_3(t) dt = \int_{-3/2}^{-1/2} \left(\frac{1}{2} - 3t \right) \left(t^2 + 3t + \frac{9}{4} \right) dt + \\ &+ \int_{-1/2}^{1/6} \left(\frac{1}{2} - 3t \right) \left(-2t^2 + \frac{3}{2} \right) dt + \int_{1/6}^{1/2} \left(3t - \frac{1}{2} \right) \left(-2t^2 + \frac{3}{2} \right) dt + \\ &+ \int_{1/2}^{3/2} \left(3t - \frac{1}{2} \right) \left(t^2 - 3t + \frac{9}{4} \right) dt = \frac{9}{8} + \frac{70}{81} + \frac{16}{81} + \frac{7}{12} = \frac{1795}{648} = 2.770 \dots \end{aligned}$$

Равенства (6.5) можно положить в основу нового подхода к получению оценки $\|H\| \geq \text{const} \cdot \sqrt{n}$, доказанной нами в пункте 5 с помощью эйлеровых чисел. Таким образом, предлагается несколько иной способ доказательства теоремы 5.2.

Перепишем асимптотическое соотношение (3.11) в виде

$$\sqrt{\frac{n}{6}} B_n \left(\sqrt{\frac{n}{6}} \cdot t \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.6)$$

Как следует из результатов Курри и Шёнберга (Н. В. Curry, I. J. Shoenberg, 1966), сходимость в (6.6) является локально равномерной по t , см. [3]. В связи с (6.6) можно ожидать, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} J_n &:= \int_0^\infty t B_n(t) dt = \sqrt{\frac{n}{6}} \int_0^\infty \tau \sqrt{\frac{n}{6}} B_n \left(\sqrt{\frac{n}{6}} \cdot \tau \right) d\tau \cong \\ &\cong \sqrt{\frac{n}{6\pi}} \int_0^\infty \tau e^{-\tau^2} d\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{6\pi}}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Если асимптотическое соотношение (6.7) имеет место, то существует константа $C_3 > 0$ такая, что для всех n выполняется $J_n \geq C_3 \sqrt{n}$. Последнее ведёт к аналогичной оценке для $\|H\|$, см. окончание доказательства теоремы 6.2. Асимптотика (6.7) требует аккуратного обоснования, но интересующее нас неравенство $J_n \geq C_3 \sqrt{n}$ всё же оказывается верным.

Теорема 6.2. *Существуют такие константы $C_3, C_4 > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства*

$$J_n \geq C_3 \sqrt{n}, \quad \|H\| \geq C_4 \sqrt{n}. \quad (6.8)$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $B_n(t)$ не возрастает по t при $t > 0$ (если $n > 1$ — строго убывает на $(0, n/2)$). Это следует, например, из представления [3, с. 138]

$$B_n(t) = \int_{t-1/2}^{t+1/2} B_{n-1}(u) du = \int_{-1/2}^{1/2} B_{n-1}(t+w) dw.$$

Напомним, что $B_1(t) = 1$ для $t \in (-1/2, 1/2)$ и $B_1(t) = 0$ для $t \notin [-1/2, 1/2]$. Предположим, что B_{n-1} не возрастает, тогда аналогичным свойством обладает и B_n . Действительно, при $t > r \geq 1/2$

$$B_n(r) - B_n(t) = \int_{-1/2}^{1/2} (B_{n-1}(r+w) - B_{n-1}(t+w)) dw \geq 0.$$

Если $t \geq 1/2 > r > 0$, то

$$\int_{r-1/2}^0 B_{n-1}(u) du = \int_0^{1/2-r} B_{n-1}(u) du \geq \int_{r+1/2}^1 B_{n-1}(u) du,$$

значит,

$$\int_{r-1/2}^{r+1/2} B_n(u) du = \int_{r-1/2}^0 + \int_0^{r+1/2} \geq \int_{r+1/2}^1 + \int_0^{r+1/2} = \int_0^1 B_n(u) du.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} B_n(r) - B_n(t) &= \int_{r-1/2}^{r+1/2} B_{n-1}(u) du - \int_{t-1/2}^{t+1/2} B_{n-1}(u) du \geq \\ &\geq \int_0^1 B_{n-1}(u) du - \int_{t+1/2}^{t-1/2} B_{n-1}(u) du \geq 0. \end{aligned}$$

Наконец, при $1/2 > t > r > 0$

$$\int_{r-1/2}^{t-1/2} B_{n-1}(u) du = \int_{1/2-t}^{1/2-r} B_{n-1}(u) du \geq \int_{r+1/2}^{t+1/2} B_{n-1}(u) du,$$

откуда

$$\begin{aligned} B_n(r) - B_n(t) &= \int_{r-1/2}^{r+1/2} B_{n-1}(u) du - \int_{t-1/2}^{t+1/2} B_{n-1}(u) du = \\ &= \int_{r-1/2}^{t-1/2} B_{n-1}(u) du - \int_{r+1/2}^{t+1/2} B_{n-1}(u) du \geq 0. \end{aligned}$$

Для $n > 1$ невозрастание B_n на $(0, \infty)$ геометрически иллюстрируется равенством (3.10). Из отмеченного свойства B_n вытекает:

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^\infty t B_n(t) dt \geq \int_{\sqrt{n/24}}^{\sqrt{n/6}} t B_n(t) dt \geq \left(\sqrt{\frac{n}{24}} \right)^2 \cdot B_n \left(\sqrt{\frac{n}{6}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n}{6}} \cdot \sqrt{\frac{n}{6}} B_n \left(\sqrt{\frac{n}{6}} \cdot 1 \right) \cong \frac{1}{4e} \sqrt{\frac{n}{6\pi}}. \end{aligned}$$

Мы применили (6.6). Таким образом, существует константа $C_3 > 0$, с которой для всех n выполняется левое неравенство в (6.8). Из него и (6.5) следует, что

$$\begin{aligned} \|H\| &= 6 \int_{-\infty}^\infty \left| t - \frac{1}{6} \right| B_n(t) dt \geq 6 \left(\int_{-\infty}^\infty |t| B_n(t) dt - \frac{1}{6} \right) = \\ &= 6 \left(2J_n - \frac{1}{6} \right) \geq 12C_3\sqrt{n} - 1. \end{aligned}$$

Поэтому с некоторой константой $C_4 > 0$ имеет место оценка $\|H\| \geq C_4\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$. □

7. О некоторых свойствах центрального сечения куба

В предыдущем тексте рассматривались множества

$$G_{n,u} = \left\{ x \in Q_n : \sum_{i=1}^n x_i = u \right\}.$$

Ниже в иллюстративных целях обсуждаются некоторые (скорее всего, известные) свойства сечения единичного куба $(n-1)$ -мерной гиперплоскостью $\sum x_i = n/2$, то есть множества $G_{n,n/2}$. Сначала мы докажем следующую лемму.

Лемма 7.1. Пусть $n \geq 2$. Допустим, что действительные числа $y_1, \dots, y_n$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \frac{n}{n-1}, \quad \sum_{i=1}^n y_i = 0. \quad (7.1)$$

Тогда $|y_i| \leq 1$, $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Можно использовать индукцию по n , но здесь мы отметим более короткий путь. Равенство из (7.1) вместе с неравенством Коши даёт оценку

$$y_1^2 = \left(\sum_{i=2}^n y_i \right)^2 \leq (n-1) \sum_{i=2}^n y_i^2.$$

Левое условие запишем в виде

$$\sum_{i=2}^n y_i^2 \leq \frac{n}{n-1} - y_1^2.$$

Таким образом,

$$y_1^2 \leq (n-1) \left(\frac{n}{n-1} - y_1^2 \right) = n - (n-1)y_1^2,$$

откуда $y_1^2 \leq 1$. Аналогично доказывается, что $y_2^2, \dots, y_n^2 \leq 1$. $\square$

Число $n/(n-1)$ из условия леммы увеличить нельзя. Точнее, если в неравенстве из (7.1) правую часть заменить величиной $n/(n-1) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то утверждение леммы 7.1 станет неверным. Контрпример доставляет набор

$$y_1 = \dots = y_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{\varepsilon}{n(n-1)}}, \quad y_n = -\sqrt{1 + \varepsilon \frac{n-1}{n}}.$$

Теорема 7.1. Пусть $n \geq 2$,

$$G_n := \left\{ x \in Q_n : \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n}{2} \right\}.$$

Обозначим через R_n минимальный радиус $(n-1)$ -мерного шара, содержащего G_n , а через r_n — максимальный радиус $(n-1)$ -мерного шара, содержащегося в G_n . Имеют место равенства:

$$R_n = \frac{\sqrt{n}}{2}, \text{ если } n \text{ — чётное;} \quad (7.2)$$

$$R_n = \frac{\sqrt{n-1}}{2}, \text{ если } n \text{ — нечётное;} \quad (7.3)$$

$$r_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{n-1}}. \quad (7.4)$$

Доказательство. В силу симметрии центр указанных шаров есть точка $C = (1/2, \dots, 1/2)$. При чётном n множество G_n содержит точку $D = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ а при нечётном n — точку $E = (1, \dots, 1, 1/2, 0, \dots, 0)$ (количество 1 и количество 0 в обоих случаях равны $[n/2]$).

Пусть n — чётное. Так как $CD = \sqrt{n}/2$, то $R_n \geq \sqrt{n}/2$. Однако шар с центром в точке C радиуса $\sqrt{n}/2$ содержит весь куб Q_n , а следовательно, и G_n . Поэтому справедливо (7.2).

Пусть n — нечётное. Так как $CE = \sqrt{n-1}/2$, то $R_n \geq \sqrt{n-1}/2$. Но в этом случае расстояние от точки C до внутренней точки произвольной грани куба, принадлежащей также G_n , меньше CE . Поэтому шар с центром в точке C радиуса $\sqrt{n-1}/2$ полностью содержит G_n , откуда следует (7.3).

Теперь для любого $n \geq 2$ докажем (7.4). Так как точка

$$M = \left(\frac{n}{2(n-1)}, \dots, \frac{n}{2(n-1)}, 0 \right)$$

принадлежит одновременно G_n и грани куба, то

$$\begin{aligned} r_n \leq CM &= \left\{ (n-1) \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2(n-1)} \right)^2 + \frac{1}{4} \right\}^{1/2} = \\ &= \left(\frac{1}{4(n-1)} + \frac{1}{4} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{n-1}}. \end{aligned}$$

Докажем, что $(n-1)$ -мерный шар с радиусом, равным CM , и центром в точке C принадлежит G_n . Для этого достаточно установить, что если одновременно

$$\sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{n}{4(n-1)}, \quad \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n}{2},$$

то $x \in Q_n$, то есть $0 \leq x_i \leq 1$. Положив $y_i = 2x_i - 1$, то есть $x_i - 1/2 = y_i/2$, сведём задачу к следующей: установить, что если

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \frac{n}{n-1}, \quad \sum_{i=1}^n y_i = 0,$$

то $-1 \leq y_i \leq 1$. Последнее совпадает с утверждением леммы 7.1. $\square$

Как известно, $(n-1)$ -объём $(n-1)$ -мерного шара $U_{n-1}(r)$ радиуса r с центром в нуле равен

$$\text{mes}_{n-1}(U_{n-1}(r)) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} r^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}. \quad (7.5)$$

Пусть U^* и U^{**} обозначают $(n-1)$ -мерные шары радиусов r_n и R_n соответственно, о которых идёт речь в условии теоремы 7.1. Тогда справедливы включения $U^* \subset G_n \subset U^{**}$. Из формул (7.2) – (7.5) и известных оценок для Γ -функции получается, что при $n \rightarrow \infty$

$$\text{mes}_{n-1}(U^*) \rightarrow 0, \quad \text{mes}_{n-1}(U^{**}) \rightarrow \infty.$$

В то же время $(n-1)$ -мера множества G_n ведёт себя иначе, чем любая из мер этих шаров: она хотя и ограничена по n , но не стремится к нулю. Более того, из соотношений (3.10) – (3.11) следует, что

$$\text{mes}_{n-1}(G_n) = s\left(n, \frac{n}{2}\right) = \sqrt{n} \cdot B_n(0) \cong \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{6}{\pi n}} = \sqrt{\frac{6}{\pi}},$$

то есть

$$\text{mes}_{n-1}(G_n) \rightarrow \sqrt{\frac{6}{\pi}} = 1.3819\dots, \quad n \rightarrow \infty.$$

Интересно ещё сравнить $\text{mes}_{n-1}(G_n)$ с $(n-1)$ -мерой μ_n проекции куба Q_n на гиперплоскость $\sum x_i = n/2$. Пусть $n > 1$. Мера $\mu_{n,j}$ проекции j -й грани куба на эту гиперплоскость равна $\cos \varphi_j$, где φ_j — острый угол между нормалью к грани и вектором $\{1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n}\}$. Очевидно, $\cos \varphi_j = 1/\sqrt{n}$. Суммируя по j , получим:

$$2\mu_n = \sum_{j=1}^{2n} \cos \varphi_j = \frac{2n}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n},$$

откуда $\mu_n = \sqrt{n}$, что численно совпадает с длиной диагонали куба. Значит, при любом $n > 1$ равенство (3.10) может быть переписано в виде

$$\frac{s\left(n, t + \frac{n}{2}\right)}{\mu_n} = B_n(t).$$

В частности,

$$\begin{aligned} \frac{\text{mes}_{n-1}(G_n)}{\mu_n} &= \frac{s\left(n, \frac{n}{2}\right)}{\mu_n} = B_n(0) = \max_{t \in \mathbb{R}} B_n(t) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^n d\xi = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - k\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, отношение $(n-1)$ -мер сечения куба Q_n гиперплоскостью $\sum x_i = n/2$ и проекции куба на эту гиперплоскость равно $B_n(0)$. При $n \rightarrow \infty$ указанное отношение асимптотически эквивалентно $\sqrt{6/\pi} \cdot n^{-1/2}$.

Список литературы

1. Невский, М. В. Геометрические методы в задаче о минимальном проекторе / М. В. Невский // Моделирование и анализ информационных систем. – 2006. – Т. 13, № 2. – С. 16 – 29.
2. Невский, М. В. Минимальные проекторы и максимальные симплексы / М. В. Невский // Моделирование и анализ информационных систем. – 2007. – Т. 14, № 1. – С. 3 – 10.
3. Butzer, P. L. Observations on the history of central B-splines / P. L. Butzer, M. Schmidt, E. L. Stark // Archive for History of Exact Sciences. – 1988. – V. 39, № 2. – P. 137 – 156.

4. Comtet, L. Permutations by number of rises; Eulerian numbers / L. Comtet // Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. – Dordrecht, Netherlands: Reidel. – 1974. – P. 51, 240 – 246.
5. Ehrenborg, R. Mixed volumes and slices of the cube / R. Ehrenborg, M. Readdy, E. Steingrimsson // Journal of Combinatorial Theory. – Series A. – 1998. – V. 81. – P. 121 – 126.

Orthogonal projection and minimal linear interpolation on a n -dimensional cube

Nevskij M. V.

Let H be the orthogonal projection onto polynomials of n variables of degree ≤ 1 and $\|\cdot\|$ be the norm of an operator from $C([0, 1]^n)$ to $C([0, 1]^n)$. In this paper we show that $C_1\theta_n \leq \|H\| \leq C_2\theta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Here θ_n denotes the minimal norm of a projection dealing with the linear interpolation on the cube $[0, 1]^n$. The proofs make use of certain properties of the Eulerian numbers and the central B -splines and also some previous results of the author.